This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

AKA
0427
.6

HARVARD UNIVERSITY.

LIBRARY

OF THE

MUSEUM OF COMPARATIVE ZOÖLOGY.

132
Exchange
May 4, 1908 — November 12, 1913.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE.

HUNDERTSECHZEHNTER BAND.

WIEN, 1907.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN KOMMISSION BEI ALFRED HÖLDER,

K. U. K. HOF- UND UNIVERSITÄTSBUCHHÄNDLER,

BUCHHANDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

SITZUNGSBERICHTE

DER

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN KLASSE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

CXVI. BAND. ABTEILUNG II a.

JAHRGANG 1907. — HEFT I BIS X.

(MIT 19 TAFELN UND 93 TEXTFIGUREN.)

WIEN, 1907.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI

IN KOMMISSION BEI ALFRED HÖLDER,

K. U. K. HOF- UND UNIVERSITÄTSBUCHHÄNDLER,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT.

Seite

Bamberger M., Beiträge zur Kenntnis der Radioaktivität der Mineralquellen Tirols. (I. Mitteilung.) [Preis: 50 h — 50 pf] 1473

Basch A. und **Leon A.**, Über rotierende Scheiben gleichen Fliehkraftwiderstandes. (Mit 5 Textfiguren.) [Preis: 1 K 25 h — 1 M 25 pf] . 1353

Cantor M., Zur Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit nach Fizeau und akustische Analogien. (Mit 2 Textfiguren.) [Preis: 40 h — 40 pf] 1001

Carda K., Beitrag zur Theorie des Pfaff'schen Problems. [Preis: 50 h — 50 pf] 1165

Cermak P., Der Peltiereffekt Eisen-Konstantan zwischen 0 und 560° C. (Mit 2 Textfiguren.) [Preis: 45 h — 45 pf] 657

— Der Peltiereffekt Nickel-Kupfer zwischen 20 und 450° C. (Mit 1 Textfigur.) [Preis: 25 h — 25 pf] 1135

Daublebsky v. Sterneck R., Über die Anzahl inkongruenter Werte, die eine ganze Funktion dritten Grades annimmt. [Preis: 35 h — 35 pf] 895

Defant A., Über die Beziehung zwischen Druck und Temperatur bei mit der Höhe variablen Temperaturgradienten. (Mit 3 Textfiguren.) [Preis: 65 h — 65 pf] 1181

Dintzl E., Über die Legendre'schen Symbole für quadratische Reste in einem imaginären quadratischen Zahlkörper mit der Klassenanzahl 1. [Preis: 40 h — 40 pf] 785

Ehrenhaft F., Über eine der Brown'schen Molekularbewegung in den Flüssigkeiten gleichartige Molekularbewegung in den Gasen und deren molekularkinetischer Erklärungsversuch. [Preis: 40 h — 40 pf] 1139

Exner F. M., Grundzüge einer Theorie der synoptischen Luftdruckveränderungen. (II. Mitteilung.) (Mit 3 Tafeln und 3 Textfiguren.) [Preis: 1 K 25 h — 1 M 25 pf] 819

Exner Fr. und **Haschek Ed.**, Über die Verschiebung der Spektrallinien. [Preis: 60 h — 60 pf] 323

Gidály R., Drei Konstruktionen der Fläche zweiter Ordnung aus neun gegebenen Punkten. (Mit 4 Textfiguren.) [Preis: 45 h — 45 pf] . . 1113

Girtler R., Über das Potential der Spannungskräfte in elastischen Körpern als Maß der Bruchgefahr. (Mit 2 Tafeln und 2 Textfiguren.) [Preis: 2 K 40 h — 2 M 40 pf] 509

— Zur Rotation von Gasmolekülen. [Preis: 40 h — 40 pf] 759

Hahn H., Über die nichtarchimedischen Größensysteme. [Preis: 1 K 35 h 1 M 35 pf] 601

Seite

Hanni L., Kinematische Interpretation der Maxwell'schen Gleichungen mit Rücksicht auf das Reziprozitätsprinzip der Geometrie. [Preis: 70 h — 70 pf] 1451

Hasenöhrl F., Zur Thermodynamik bewegter Systeme. [Preis: 50 h — 50 pf] 1391

Hess V. F., Über das Uran *X* und die Absorption seiner α-Strahlung. (Mit 8 Textfiguren.) [Preis: 80 h — 80 pf] 109

— Über die Zerfallskonstante von Ac *A*. (Mit 1 Tafel und 1 Textfigur.) [Preis: 65 h — 65 pf] 1121

— Analyse der Strahlung des Radiobleis. (Mit 7 Textfiguren.) [Preis: 1 K 10 h — 1 M 10 pf] 1289

Hočevar F., Über die Bestimmung der quadratischen Teiler algebraischer Formen. [Preis: 50 h — 50 pf] 153

Hofbauer G., Über das Vorkommen der seltenen Erden auf der Sonne. [Preis: 1 K 30 h — 1 M 30 pf] 267

Hopfner F., Untersuchung über die Bestrahlung der Erde durch die Sonne mit Berücksichtigung der Absorption der Wärmestrahlen durch die atmosphärische Luft nach dem Lambert'schen Gesetze. I. Mitteilung: Analytische Behandlung des Problems. (Mit 1 Textfigur.) [Preis: 1 K 80 h — 1 M 80 pf] 167

Jaumann G., Strahlungen in starken elektromagnetischen Feldern. [Preis: 3 K 10 h — 3 M 10 pf] 389

Klingatsch A., Die Fehlerflächen topographischer Aufnahmen. (Mit 1 Textfigur.) [Preis: 1 K 15 h — 1 M 15 pf] 937

Krčmář J. und **Schneider R.**, Absolute Messungen der nächtlichen Ausstrahlung in Wien. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 95 h — 95 pf] 571

Kruppa E., Über den Pohlke'schen Satz. [Preis: 30 h — 30 pf] 931

Lampa A., Über eine einfache Anordnung zur Herstellung eines elektrostatischen Drehfeldes. (Mit 2 Textfiguren.) [Preis: 35 h — 35 pf] 987

Lang V., v., Versuche im elektrostatischen Wechselfelde. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 50 h — 50 pf] 975

Lecher E., Über das Ohm'sche Gesetz und die Elektronentheorie. (Mit 2 Textfiguren.) [Preis: 45 h — 45 pf] 49

Leitinger R., Über die Ableitung des Gauß'schen Prinzips des kleinsten Zwanges aus den allgemeinsten Lagrange'schen Gleichungen zweiter Art. [Preis: 50 h — 50 pf] 1321

Lerch F., v., Beitrag zur Kenntnis der Thoriumzerfallsprodukte. (Mit 2 Textfiguren.) [Preis: 40 h — 40 pf] 1443

Lichtenfels O., v., Über eine Cubaturformel. [Preis: 20 h — 20 pf] . . 1199

Lohr E., Ein einfacher Zusammenhang zwischen Brechungsexponent, Zähigkeit und Dichte bei Gasen. [Preis: 30 h — 30 pf] 1281

Mach E., Die Phasenverschiebung durch Reflexion an den Jamin'schen Platten. (Mit 1 Textfigur.) [Preis: 25 h — 25 pf] 997

Mache H., Grundzüge zu einer Theorie der Explosionen. (Mit 6 Textfiguren.) [Preis: 85 h — 85 pf] 1081

Seite

Mache H. und **Tagger J.**, Eine einfache Methode zur Bestimmung der Wärmeleitungskonstante von Flüssigkeiten. (I. Mitteilung.) (Mit 1 Textfigur.) [Preis: 35 h — 35 pf] 1105

Mertens F., Über die einfachen Einheiten des Bereichs $(\alpha, \sqrt{D})$, wo α eine primitive Einheitswurzel von Primzahlgrad und D eine negative Zahl bezeichnen. [Preis: 30 h — 30 pf] 1337

— Über die in Bezug auf eine Primzahl des Bereichs der Quadratwurzel aus einer negativen Zahl irreduktibeln ganzen Funktionen einer Variablen. [Preis: 30 h — 30 pf] 1343

Meyer St. und **Schweidler E., v.**, Untersuchungen über radioaktive Substanzen. (VIII. Mitteilung.) Über ein radioaktives Produkt aus dem Aktinium. (Mit 2 Textfiguren.) [Preis: 40 h — 40 pf] 315

— und **Schweidler E., v.**, Untersuchungen über radioaktive Substanzen. (X. Mitteilung.) Über die Zerfallskonstante von Radium *D*. [Preis: 50 h — 50 pf] 701

Meyer W. Fr., Zur Theorie der Drehungen und Quaternionen. [Preis: 50 h — 50 pf] 135

— Zur algebraischen Behandlung eines v. Staudt'schen Fundamentalsatzes der Geometrie der Lage. [Preis: 90 h — 90 pf] 669

Niessl G., v., Bahnbestimmung der Meteore vom 19. Jänner und 29. Juni 1905. [Preis: 1 K 30 h — 1 M 30 pf] 61

Obermayer A., v., Gewitterbeobachtungen und Gewitterhäufigkeit an einigen meteorologischen Beobachtungsstationen der Alpen, insbesondere an Gipfelstationen. (Mit 2 Textfiguren.) [Preis: 1 K 10 h — 1 M 10 pf] 723

Oppolzer E. v., Über die photographische Lichtstärke von Fernrohren. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 50 h — 50 pf] 1151

Pernter J. M., Zur Theorie der »schönsten der Haloerscheinungen«. [Preis: 90 h — 90 pf] 17

Pöch R., Nr. X der Berichte der Phonogramm-Archivs-Kommission der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Zweiter Bericht über meine phonographischen Aufnahmen in Neu-Guinea (Britisch-Neu-Guinea vom 7. Oktober 1905 bis zum 1. Februar 1906). (Mit 1 Tafel und 3 Textfiguren.) [Preis: 80 h — 80 pf] 801

Przibram K., Büschel- und oszillierende Spitzenentladung in Helium, Argon und anderen Gasen. (Mit 5 Textfiguren.) [Preis: 50 h — 50 pf] 557

Riiha K., Änderung des Peltiereffektes Ni-Cu zwischen 20 und 800° C. (Mit 3 Textfiguren.) [Preis: 35 h — 35 pf] 715

Scheimpflug Th., Die Herstellung von Karten und Plänen auf photographischem Wege. (Mit 6 Textfiguren.) [Preis: 1 K 20 h — 1 M 20 pf] 235

Schweidler E., v., Studien über die Anomalien im Verhalten der Dielektrika. (Mit 7 Tafeln und 6 Textfiguren.) [Preis: 2 K 55 h — 2 M 55 pf] 1019

Siegl K., Untersuchung der Kanalstrahlen von Sauerstoff. [Preis: 30 h — 30 pf] 129

Seite

Siegl K., Über das Emissionsvermögen von Gesteinen, Wasser und Eis. [Preis: 80 h — 80 pf] 1203

Stücker N., Über die Unterschiedsempfindlichkeit für Tonhöhen in verschiedenen Tonregionen. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 75 h — 75 pf] . . 367

— Über einige physikalische Eigenschaften der Kolloide. (Mit 1 Tafel und 2 Textfiguren.) [Preis: 75 h — 75 pf] 771

— Über die Lage der Knotenpunkte in einseitig geschlossenen Röhren. (Mit 2 Textfiguren.) [Preis: 55 h — 55 pf] 1231

Szydlowski L., Über die Kältemischung aus kristallisiertem Natriumsulfat und konzentrierter Salzsäure. (Mit 3 Textfiguren.) [Preis: 1 K 20 h — 1 M 20 pf] 855

Tschermak G., Über das Eintreffen gleichartiger Meteoriten. [Preis: 1 K — 1 M] 1407

Wagner R., Über die Bestimmung des linearen Ausdehnungskoeffizienten und dessen Abhängigkeit von der Spannung aus den Temperaturänderungen bei der Dehnung von Hartgummistäben. (Mit 1 Textfigur.) [Preis: 65 h — 65 pf] 905

— Über die Erwärmung beim Dehnen eines Jodsilberstabes. [Preis: 30 h — 30 pf] 925

— Die Schallenergie des elektrischen Funkens. [Preis: 30 h — 30 pf] 1013

Waßmuth A., Über die Bestimmung der thermischen Änderung des Torsionsmoduls aus den Temperaturänderungen bei der Torsion von Stäben. (Mit 1 Textfigur.) [Preis: 70 h — 70 pf] 1245

Weiß E., Über die Sichtbarkeitsverhältnisse des Kometen 1905 IV im Februar und März 1907. [Preis: 50 h — 50 pf] 3

— Über die Berechnung einer Ellipse aus zwei Radien und dem eingeschlossenen Winkel. [Preis: 70 h — 70 pf] 345

Wieleitner H., Über einige Zusammenhänge zwischen speziellen Quartiken. (Mit 3 Textfiguren.) [Preis: 65 h — 65 pf] 1267

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE.

HUNDERTSECHZEHNTER BAND.

WIEN, 1907.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN KOMMISSION BEI ALFRED HÖLDER,

K. U. K. HOF- UND UNIVERSITÄTSBUCHHÄNDLER,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

SITZUNGSBERICHTE

DER

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN KLASSE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

CXVI. BAND. ABTEILUNG II a.

JAHRGANG 1907. — HEFT I BIS IV.

ERSTER HALBBAND.

MIT 9 TAFELN UND 44 TEXTFIGUREN.)

WIEN, 1907.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI

IN KOMMISSION BEI ALFRED HÖLDER,

K. U. K. HOF- UND UNIVERSITÄTSBUCHHÄNDLER,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT.

Seite

Cermak P., Der Peltiereffekt Eisen-Konstantan zwischen 0 und 560° C. (Mit 2 Textfiguren.) [Preis: 45 h — 45 pf] 657

Dintzl E., Über die Legendre'schen Symbole für quadratische Reste in einem imaginären quadratischen Zahlkörper mit der Klassenanzahl 1. [Preis: 40 h — 40 pf] 785

Exner F. M., Grundzüge einer Theorie der synoptischen Luftdruckveränderungen. (II. Mitteilung.) (Mit 3 Tafeln und 3 Textfiguren.) [Preis: 1 K 25 h — 1 M 25 pf] 819

Exner Fr. und **Haschek Ed.**, Über die Verschiebung der Spektrallinien. [Preis: 60 h — 60 pf] 323

Girtler R., Über das Potential der Spannungskräfte in elastischen Körpern als Maß der Bruchgefahr. (Mit 2 Tafeln und 2 Textfiguren.) [Preis: 2 K 40 h — 2 M 40 pf] 509

— Zur Rotation von Gasmolekülen. [Preis: 40 h — 40 pf] 759

Hahn H., Über die nichtarchimedischen Größensysteme. [Preis: 1 K 35 h 1 M 35 pf] 601

Hess V. F., Über das Uran *X* und die Absorption seiner α-Strahlung. (Mit 8 Textfiguren.) [Preis: 80 h — 80 pf] 109

Hočevar F., Über die Bestimmung der quadratischen Teiler algebraischer Formen. [Preis: 50 h — 50 pf] 153

Hofbauer G., Über das Vorkommen der seltenen Erden auf der Sonne. [Preis: 1 K 30 h — 1 M 30 pf] 267

Hopfner F., Untersuchung über die Bestrahlung der Erde durch die Sonne mit Berücksichtigung der Absorption der Wärmestrahlen durch die atmosphärische Luft nach dem Lambert'schen Gesetze. I. Mitteilung: Analytische Behandlung des Problems. (Mit 1 Textfigur.) [Preis: 1 K 80 h — 1 M 80 pf] 167

Jaumann G., Strahlungen in starken elektromagnetischen Feldern. [Preis: 3 K 10 h — 3 M 10 pf] 389

Krčmář J. und **Schneider R.**, Absolute Messungen der nächtlichen Ausstrahlung in Wien. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 95 h — 95 pf] 571

Lecher E., Über das Ohm'sche Gesetz und die Elektronentheorie. (Mit 2 Textfiguren.) [Preis: 45 h — 45 pf] 49

Meyer St. und **Schweidler E., v.**, Untersuchungen über radioaktive Substanzen. (VIII. Mitteilung.) Über ein radioaktives Produkt aus dem Aktinium. (Mit 2 Textfiguren.) [Preis: 40 h — 40 pf] 315

Seite

Meyer St. und Schweidler E., v., Untersuchungen über radioaktive Substanzen. (X. Mitteilung.) Über die Zerfallskonstante von Radium *D*. [Preis: 50 h — 50 pf] 701

Meyer W. Fr., Zur Theorie der Drehungen und Quaternionen. [Preis: 50 h — 50 pf] 135

— Zur algebraischen Behandlung eines v. Staudt'schen Fundamentalsatzes der Geometrie der Lage. [Preis: 90 h — 90 pf] 669

Niessl G., v., Bahnbestimmung der Meteore vom 19. Jänner und 29. Juni 1905. [Preis: 1 K 30 h — 1 M 30 pf] 61

Obermayer A., v., Gewitterbeobachtungen und Gewitterhäufigkeit an einigen meteorologischen Beobachtungsstationen der Alpen, insbesondere an Gipfelstationen. (Mit 2 Textfiguren.) [Preis: 1 K 10 h — 1 M 10 pf] 723

Pernter J. M., Zur Theorie der »schönsten der Haloerscheinungen«. [Preis: 90 h — 90 pf] 17

Pöch R., Nr. X der Berichte der Phonogramm-Archivs-Kommission der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Zweiter Bericht über meine phonographischen Aufnahmen in Neu-Guinea (Britisch-Neu-Guinea vom 7. Oktober 1905 bis zum 1. Februar 1906). (Mit 1 Tafel und 3 Textfiguren.) [Preis: 80 h — 80 pf] 801

Przibram K., Büschel- und oszillierende Spitzenentladung in Helium, Argon und anderen Gasen. (Mit 5 Textfiguren.) [Preis: 50 h — 50 pf] 557

Rziha K., Änderung des Peltiereffektes Ni-Cu zwischen 20 und 800° C. (Mit 3 Textfiguren.) [Preis: 35 h — 35 pf] 715

Scheimpflug Th., Die Herstellung von Karten und Plänen auf photographischem Wege. (Mit 6 Textfiguren.) [Preis: 1 K 20 h — 1 M 20 pf] 235

Siegl K., Untersuchung der Kanalstrahlen von Sauerstoff. [Preis: 30 h — 30 pf] 129

Stücker N., Über die Unterschiedsempfindlichkeit für Tonhöhen in verschiedenen Tonregionen. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 75 h — 75 pf] . . 367

— Über einige physikalische Eigenschaften der Kolloide. (Mit 1 Tafel und 2 Textfiguren.) [Preis: 75 h — 75 pf] 771

Szydlowski L., Über die Kältemischung aus kristallisiertem Natriumsulfat und konzentrierter Salzsäure. (Mit 3 Textfiguren.) [Preis: 1 K 20 h — 1 M 20 pf] 855

Weiß E., Über die Sichtbarkeitsverhältnisse des Kometen 1905 IV im Februar und März 1907. [Preis: 50 h — 50 pf] 3

— Über die Berechnung einer Ellipse aus zwei Radien und dem eingeschlossenen Winkel. [Preis: 70 h — 70 pf] 345

132

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE.

CXVI. BAND. I. HEFT.

JAHRGANG 1907. — JÄNNER.

ABTEILUNG II a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

(MIT 10 TEXTFIGUREN.)

WIEN, 1907.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN KOMMISSION BEI ALFRED HÖLDER.

K. U. K. HOF- UND UNIVERSITÄTSBUCHHÄNDLER.

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT

des 1. Heftes, Jänner 1907, des CXVI. Bandes, Abteilung IIa, der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Klasse.

Seite

Weiß E., Über die Sichtbarkeitsverhältnisse des Kometen 1905 IV im Februar und März 1907. [Preis: 50 h — 50 pf] 3

Pernter J. M., Zur Theorie der »schönsten der Haloerscheinungen«. [Preis: [Preis: 90 h —90 pf] 17

Lecher E., Über das Ohm'sche Gesetz und die Elektronentheorie. (Mit 2 Textfiguren.) [Preis: 45 h — 45 pf] 49

Niessl G., v., Bahnbestimmung der Meteore vom 19. Jänner und 29. Juni 1905. [Preis: 1 K 30 h — 1 M 30 pf] 61

Hess V. F., Über das Uran *X* und die Absorption seiner α-Strahlung. (Mit 8 Textfiguren.) [Preis: 80 h — 80 pf] 109

Siegl K., Untersuchung der Kanalstrahlen von Sauerstoff. [Preis: 30 h — 30 pf] 129

Meyer W. Fr., Zur Theorie der Drehungen und Quaternionen. [Preis: 50 h — 50 pf] 135

Preis des ganzen Heftes: 3 K 25 h — 3 M 25 pf.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE.

CXVI. BAND. I. HEFT.

ABTEILUNG II a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

Über die Sichtbarkeitsverhältnisse des Kometen 1905 IV im Februar und März 1907

von

Prof. Dr. **E. Weiß,**

w. M. k. Akad.

(Vorgelegt in der Sitzung am 10. Jänner 1907.)

Unter den im Jahre 1906 entdeckten Kometen beansprucht der am 3. März von Dr. A. Kopff in Heidelberg aufgefundene in mehrfacher Beziehung ein bedeutenderes Interesse. Er stand auf einer Platte, die behufs Nachsuchens nach in Verlust geratenen Asteroiden aufgenommen wurde, also nahe in Opposition zur Sonne, und ließ durch die geringe Größe seiner Bewegung sofort erkennen, daß er in einer für diese Gestirne ungewöhnlich bedeutenden Entfernung von Erde und Sonne entdeckt worden sei. Infolge der langsamen Bewegung fielen auch die ersten auf Zwischenzeiten von wenigen Tagen gegründeten Bahnberechnungen recht unbefriedigend aus; als aber der Komet einen längeren Bogen durchlaufen hatte, ergaben sich sofort zwei interessante Resultate. Erstens, daß seine Periheldistanz weitaus größer sei als die aller bisher bekannten Kometen mit Ausnahme von dem des Jahres 1729 (der gewöhnlich nach seinem Entdecker der von Sarabat genannt wird), und zweitens, daß sein Periheldurchgang bereits fünf Monate vor seiner Entdeckung stattgefunden habe, weshalb er, einem althergebrachten Usus folgend, als Komet 1905 IV bezeichnet wird.

Aus der Betrachtung seiner Bahnlage erkannte aber außerdem Dr. M. Ebell, daß der Komet nicht nur bereits längere Zeit vor seiner Entdeckung, sondern auch schon lange vor

seiner Perihelpassage in einer Helligkeit am Himmel gestanden haben müsse, die dessen Auffindung ermöglicht hätte. Er hatte nun die glückliche Idee, eine Ephemeride nach rückwärts bis zum Anfange des Jahres 1905 zu rechnen, um eine genaue Revision der Platten anzuregen, die während dieser Zeit in den betreffenden Gegenden aufgenommen worden waren. Dies wurde auch von einem überraschenden Erfolge gekrönt, indem Prof. M. Wolf in Heidelberg den Kometen tatsächlich auf einer Platte vom 14. Jänner 1905 auffand. Das Gestirn war also schon 418 Tage vor seiner Aufnahme am 3. März 1906 einmal photographiert worden!

Das Auffinden dieser Beobachtung läßt es nicht als aussichtslos erscheinen, daß der Komet bei seiner großen Perihelldistanz trotz seiner Lichtschwäche im kommenden Februar nochmals wird gesehen werden können, wo er vor der Anfang Mai 1907 bevorstehenden nächsten Opposition mit der Sonne stationär wird. Zur näheren Untersuchung der dabei eintretenden Sichtbarkeitsverhältnisse und Entfernungen glaubte ich aber nicht von einem der bisher bekannten Elementensysteme ausgehen zu sollen, einerseits weil noch bei keinem derselben die erste Beobachtung vom 14. Jänner 1905 und der ganze im Jahre 1906 beobachtete Bogen in die Rechnung eingezogen wurde, andrerseits weil eine so kleine Neigung der Bahn gegen die Ekliptik, verbunden mit einem geringen Abstande der Knotenlinie von der Bahnachse, erfahrungsmäßig häufig ein Anzeichen einer merkbaren Abweichung der Bahn von einer Parabel ist. Ich ließ daher zunächst aus dem den weitesten Bogen umspannenden, aus Beobachtungen vom 3. und 29. März und 24. April von Ebell abgeleiteten Elementensysteme:

$$
\begin{aligned}
T &= 1905\ \text{Okt.}\ 18{\cdot}6620 \quad \text{mittl. Berliner Zeit} \\
\omega &= 158^\circ\ 42'\ 11''4 \\
\Omega &= 342\ \ 13\ \ 35{\cdot}1 \quad \text{mittl. Aeq. } 1906{\cdot}0 \\
i &= \ \ 4\ \ 14\ \ 32{\cdot}4 \\
\log q &= 0{\cdot}522130
\end{aligned}
$$

drei kurze Ephemeridenstücke berechnen, um mir damit aus den bisher veröffentlichten Beobachtungen drei nahezu äqui-

distante Normalorte bilden zu können. Diese Ephemeridenstücke sind die folgenden, welche für 0^h mittlere Berliner Zeit gelten.

1906	Scheinbare AR	Scheinbare Dekl.	Log. der Entfernung von Sonne	Log. der Entfernung von Erde	Aberrationszeit
März 3·0	11h 36m 12s·58	+1° 38' 53"·3	0·55160	0·41249	21m 31s
4·0	35 47·45	40 13·9	0·55201	54	31
5·0	35 22·08	41 36·1	0·55241	65	32
6·0	34 56·51	43 0·2	0·55282	0·41280	32
7·0	34 30·75	44 25·9	0·55323	0·41300	33
8·0	34 4·84	45 53·0	0·55364	25	34
9·0	11 33 38·81	+1 47 21·3	0·55406	0·41354	21 35
April 11·0	11 21 38·67	+2 27 52·9	0·56875	0·44803	23 22
12·0	26·28	28 20·9	0·56922	0·44972	27
13·0	14·69	28 44·6	0·56970	0·45143	32
14·0	21 3·90	29 4·2	0·57018	0·45318	38
15·0	20 53·89	19·6	0·57065	0·45495	44
16·0	44·69	31·1	0·57113	0·45675	50
17·0	11 20 36·27	+1 29 38·0	0·57161	0·45857	23 56
Mai 23·0	11 25 7·11	+1 41 16·0	0·58975	0·53464	28 31
24·0	25 29·87	38 28·8	0·59027	688	40
25·0	25 53·47	35 36·6	0·59080	0·53912	48
26·0	26 17·79	32 39·9	0·59132	0·54135	28 57
27·0	26 42·84	29 39·0	0·59185	359	29 6
28·0	27 8·63	26 33·8	0·59238	583	15
29·0	27 35·13	23 24·3	0·59291	0·54806	24
30·0	28 2·33	20 10·6	0·59344	0·55029	33
31·0	11 28 30·24	+1 16 52·9	0·59397	0·55251	29 42

Mit dieser Ephemeride verglich ich die nachstehenden Beobachtungen:

1906	Beobachtungsort	Ortszeit	Scheinb. AR	L. f. P.	Scheinb. Dekl.	L. f. P.
März 3	Heidelberg	$14^h\ 4^m\ 18^s$	$11^h\ 35^m\ 55^s53$	9·076	$+1°\ 39'\ 46''0$	0·826
4	»	10 13 24	35 35·87	$9·382_n$	40 37	0·826
4	Straßburg	10 24 30	35 35·60	$9·262_n$	40 46	0·821
4	Bamberg	12 52 43	35 33·34	8·000	40 54·6	0·829
4	Jena	16 30 25	35 28·70	9·486	41 1·1	0·826
5	Nizza	9 2 2	35 11·52	$9·544_n$	42 2·4	0·776
5	Rom	9 26 17	35 11·63	$9·520_n$	42 2·4	0·758
5	Wien	9 44 42	35 11·56	$9·443_n$	42 3·1	0·807
5	Heidelberg	9 37 30	35 11·07	$9·448_n$	41 59	0·826
5	Arcetri	10 15 13	35 10·77	9·415	42 7·0	0·774
5	Straßburg	10 27 31	35 10·18	(−0·09)	42 8·2	(+2·8)
5	München	11 56 30	35 8·83	$8·931_n$	42 8·0	0·805
5	Lyon	16 21 59	35 3·86	9·532	42 30·5	0·790
5	Mt. Hamilton	10 28 24	35 0·80	$9·414_n$	42 40	0·728
6	Rom	9 2 53	34 46·69	$9·551_n$	43 25·7	0·758
6	Arcetri	10 32 11	34 44·97	$9·377_n$	43 31·3	0·772
6	Straßburg	10 57 18	34 43·87	(−0·07)	43 33·5	(+2·8)
6	Utrecht	11 38 27	34 42·58	$8·977_n$	43 41·9	0·831

	6	Nizza	11	48	16		34	43·06	8·997$_n$		43	37·9	0·770
	6	Arcetri	16	21	19		34	38·36	9·546		43	55·6	0·777
	6	Lyon	16	6	55		34	38·41	9·505		43	53·3	0·790
	6	Washington	11	42	36		34	37·07	9·047$_n$		43	49	0·743
	6	Mt. Hamilton	10	0	54		34	35·60	9·473		44	3	0·720
	7	Rom	9	35	24		34	20·17	9·491$_n$		44	53·7	0·756
	7	Straßburg	11	1	53		34	18·15	(−0·07)		45	0·1	(+2·7)
	7	Nizza	11	3	0		34	17·69	9·208$_n$		45	0·7	0·771
	7	Wien	13	19	19		34	16·27	8·876		45	6·9	0·803
	7	Lyon	14	6	17		34	13·99	9·245		45	13·7	0·785
	7	Mt. Hamilton	9	33	50	11	34	10·30	9·522$_n$	+1	45	28	0·728
April	11	Arcetri	8	48	14	11	21	34·73	9·147$_n$	+2	27	55·2	0·766
	11	München	9	33	5		21	34·13	8·694$_n$		27	56·4	0·800
	12	Arcetri	8	50	22		21	22·52	9·114$_n$		28	22·3	0·766
	12	Königsberg	9	27	25		.		.		28	18·3	0·843
	12	»	9	33	55		21	22·59	8·528		.		.
	12	Straßburg	9	52	9		21	21·82	(−0·01)		28	24·9	(+2·2)
	13	Königsberg	9	1	52		.		.		28	39·0	0·843
	13	»	9	3	15		21	11·58	8·894$_n$		.		.
	14	Arcetri	9	33	2	11	21	0·30	8·548$_n$	+2	29	2·3	0·764

1906	Beobachtungsort	Ortszeit	Scheinb. AR	L. f. P.	Scheinb. Dekl.	L. f. P.
April 15	Königsberg	$8^h\ 59^m\ 16^s$	$11^h\ 20^m\ 51^s18$	$8\cdot807_n$	.	.
15	»	8 59 46	.	.	$+2°\ 29'\ 12''6$	0·843
15	Arcetri	8 22 45	20 51·25	9·194	29 15·4	0·766
16	»	9 11 51	20 41·96	$8\cdot783_n$	29 25·4	0·765
16	Königsberg	10 24 1	11 20 41·51	8·455	.	.
16	»	10 24 45	.	.	+2 29 23·4	0·842
Mai 23	Arcetri	9 43 11	11 25 13·33	9·389	+1 40 20·7	0·773
23	Algier	9 10 3	25 13·12	9·329	40 22·5	0·706
23	»	9 28 51	25 13·38	9·393	40 20·6	0·707
23	Straßburg	10 14 17	25 13·94	(+0·08)	40 14·9	(+1·9)
23	Heidelberg	10 53 10	25 14·04	9·488	40 18·4	0·832
25	Arcetri	9 56 31	26 0·49	9·438	34 35·8	0·775
26	Algier	9 12 54	26 24·52	9·376	31 42·7	0·708
26	»	9 52 9	26 24·90	9·483	31 38·0	0·710
28	Arcetri	9 47 45	27 15·79	9·442	25 35·5	0·775
28	Algier	9 26 12	27 15·72	9·436	25 33·1	0·710
28	»	10 8 49	27 16·21	9·531	25 28·6	0·712
29	»	8 49 2	27 41·80	9·329	22 28·7	0·709
29	»	9 14 47	27 42·02	9·414	22 25·3	0·710
30	»	9 47 29	28 10·38	9·503	19 5·7	0·712
30	»	10 8 28	11 28 10·52	9·543	+1 19 2·0	0·713

Bei der Entdeckungsbeobachtung vom 3. März 1906 in Heidelberg ist nicht der scheinbare, sondern mittlere Ort für 1906·0 angegeben.

Unter den Beobachtungen zwischen 4. und 8. März kommen einige vor, wie die vom 4. und 5. März in Heidelberg, die vom 4. in Straßburg u. s. w., wo die Deklination bloß in ganzen Sekunden ohne Zehnteile derselben angegeben ist. Dies rührt daher, daß bisher erst die telegraphisch mitgeteilten, auf Bogensekunden abgerundeten Positionen bekannt geworden sind.

Wurden an einem Orte (in kurzen, 1 bis $1^1/_2$ Stunden nicht übersteigenden Intervallen) von ein und demselben Beobachter mehrere Positionen genommen, so wurden sie in eine zusammengezogen. Dies ist der Fall bei den Beobachtungen von März 5 in Rom, von März 5 und 6 in Lyon und von April 12, 13, 15 und 16 in Königsberg. Hingegen wurden die Maibeobachtungen in Algier, die von zwei verschiedenen Beobachtern herrühren, gesondert aufgeführt und gesondert mit der Ephemeride verglichen.

Bei den Beobachtungen in Straßburg sind mit Ausnahme der ersten vom 4. März, für die ich die parallaktischen Faktoren berechnet habe, die Parallaxen selbst mitgeteilt. Ich habe sie beibehalten (und zur Unterscheidung in Klammern beigesetzt), obwohl dieselben mit einer zu geringen Distanz des Kometen von der Erde angesetzt zu sein scheinen, weil dies für die vorliegende Untersuchung ohne Bedeutung ist.

Die Vergleichung der Beobachtungen mit der Ephemeride ergab im Sinne Beob.—Rechn. folgende Abweichungen:

Mittl. Berl. Zeit	Beobachtungsort	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
März 3·58	Heidelberg	—1ˢ22	— 2″4
4·42	»	—0·91	— 8·8
4·43	Straßburg	—0·91	— 0·7
4·53	Bamberg	—0·71	+ 0·1
4·68	Jena	—1·44	— 5·7

Mittl. Berl. Zeit	Beobachtungsort	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
März 5·38	Nizza	—1ˢ04	— 3″1
5·38	Rom	—0·87	— 3·4
5·38	Wien	—0·86	— 2·5
5·40	Heidelberg	—0·94	— 7·8
5·42	Arcetri	—0·56	— 2·3
5·44	Straßburg	—0·85	— 1·5
5·49	München	—0·82	— 6·4
5·69	Lyon	—0·43	— 1·6
5·80	Mt. Hamilton	—0·97	— 0·9
6·36	Rom	—0·60	— 3·4
6·42	Arcetri	—0·73	— 2·6
6·46	Straßburg	—0·96	— 2·8
6·49	Utrecht	—1·30	+ 2·3
6·49	Nizza	—0·81	— 2·1
6·67	Arcetri	—0·71	+ 0·4
6·68	Lyon	—0·46	— 2·6
6·72	Washington	—0·85	—10·9
6·78	Mt. Hamilton	—0·90	— 1·6
7·38	Rom	—0·68	— 3·6
7·46	Straßburg	—0·78	— 2·9
7·46	Nizza	—1·15	— 3·0
7·53	Wien	—0·67	— 2·7
7·60	Lyon	—0·92	— 2·7
7·76	Mt. Hamilton	—0·92	— 1·9
April 11·36	Arcetri	+0·52	— 6·0
11·38	München	+0·29	— 5·9
12·36	Arcetri	+0·41	— 5·4
12·36	Königsberg	+0·62	— 9·0
12·41	Straßburg	+0·40	— 4·0
13·34	Königsberg	+0·61	—10·3
14·39	Arcetri	+0·38	— 6·5
15·34	Königsberg	+0·47	— 8·9
15·34	Arcetri	+0·53	— 6·4

Mittl. Berl. Zeit	Beobachtungsort	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
April 16·37	Arcetri	+0ˢ49	— 6′9
16·40	Königsberg	+0·28	— 9·0
Mai 23·39	Algier	—2·84	+12·7
23·40	»	—2·86	+13·1
23·39	Arcetri	—2·50	+11·2
23·42	Straßburg	—2·58	+10·8
23·43	Heidelberg	—2·58	+15·1
25·40	Arcetri	—2·55	+11·2
26·39	Algier	—2·95	+14·8
26·42	»	—3·24	+15·1
28·39	Arcetri	—3·13	+ 7·5
28·40	Algier	—3·41	+16·4
28·43	»	—3·69	+17·5
29·37	»	—3·38	+17·3
29·40	»	—3·72	+18·5
30·42	»	—3·39	+18·4
30·43	»	—3·65	+17·6

Für die drei Gruppen resultiert daraus als arithmetisches Mittel der Beobachtungszeiten und Abweichungen in AR und Dekl.

März 6·04	$\Delta\alpha = -0^s86$	$\Delta\delta = -\ 3'0$	(29 Beob.)
April 13·73	+0·45	— 7·1	(11 »)
Mai 26·67	—3·07	+14·5	(15 »)

Die Ausmessung der Platte vom 14. Jänner 1905 ergab für die Position des Kometen, bezogen auf das mittlere Äquinoktium 1905·0,

1905 Jänner 14 $15^h\ 5^m\ 42^s$ mittl. Heidelberger Zeit:

$\alpha = 5^h\,12^m\,12^s88$	9·641	+28° 10′ 44″9	0·723

Die Reduktion auf 1906·0 beträgt: $+3^s78$ und $+4'1$.

Um diesen Ort von Aberration und Parallaxe zu befreien, rechnete ich ebenfalls aus den Elementen von Ebell die geozentrische Distanz des Kometen für Jänner 14·5 und fand $\log \rho = 0{\cdot}52559$.

Läßt man die oben mitgeteilten Differenzen für den nächstliegenden Mittag gelten und fügt man den Ort für 1905 Jänner 14 bei, so erhält man als Grundlagen für die weiteren Rechnungen die folgenden vier auf 1906·0 bezogenen Orte:

1905 Jänner 14·6226 mittl. Berl. Zeit	$\alpha =$	$5^h12^m16^s{\cdot}79$	$\delta = +28°10'50''{\cdot}4$
1906 März 6·0		11 34 55·65	+ 1 42 57·2
April 14·0		11 21 4·35	+ 2 28 57·1
Mai 27·0		11 26 39·77	+ 1 29 53·5

oder in Länge und Breite umgesetzt mit Beifügen der Sonnenkoordinaten:

Mittl. Berl. Zeit	λ	β	L	$\log R$
1905 Jänner 14·6226	79°27'28''8	+5° 9'53''4	294°18'11''6	9·992847
1906 März 6·0	173 34 0·6	—0 54 51·4	344 59 8·1	9·996667
April 14·0	170 4 55·2	—1 34 25·9	23 35 22·0	0·001425
Mai 27·0	171 45 9·3	—1 55 47·6	65 14 9·6	0·005797

Ich legte nun zunächst durch die beiden Orte 1906 März 6·0 und Mai 27·0 mit dem aus der Ephemeride folgenden: $\log M = \log\left(\frac{\rho_3}{\rho_1}\right) = 0{\cdot}130789$ und einem um 200 Einheiten der 6. Dezimale verminderten Werte die beiden Parabeln:

	I	II
$\log M$	0·130789	0·130589
T 1905	Okt. 17·5580	Okt. 17·2173
ω	158° 27' 56''2	158° 23' 9''2
Ω	342 15 57·9	342 16 5·9
i	4 15 43·9	4 15 49·2
$\log q$	0·522312	0·522762

Die Vergleichung der Beobachtungen vom 14. Jänner 1905 und 14. April 1906 mit Parabel II und die der beiden Parabeln untereinander führte zu folgendem Resultate:

	Beob.—Par. II		Par. I—Par. II	
	$d\lambda$	$d\beta$	$d\lambda$	$d\beta$
1905 Jänner 14	+14' 52'6	—14'8	—10' 33'3	+0'9
1906 April 14	+ 0 58·7	— 7·7	— 1 23·7	+5·2

Der Anblick dieser Zahlen läßt sofort erkennen, daß durch eine Variation von M eine entsprechende Darstellung nicht erreichbar sei. Der Versuch, durch Einführen einer Ellipse die Fehler herabzumindern, führte ebenfalls zu keinem befriedigenden Ergebnisse; ich ermittelte daher aus den obigen Daten den wahrscheinlichsten Wert von log M für 1905 Jänner 14 und 1906 Mai 27 und erhielt damit folgende Bahn:

$$T = 1905 \text{ Okt. } 18{\cdot}0347$$
$$\omega = 158^\circ\ 39'\ 57'3 - 1'2\ (t - 1906{\cdot}0)$$
$$\Omega = 342\ 17\ 11{\cdot}4 + 51{\cdot}4\ (t - 1906{\cdot}0)$$
$$i = 4\ 16\ 9{\cdot}3 + 0{\cdot}4\ (t - 1906{\cdot}0)$$
$$\log q = 0{\cdot}523566$$

Dieses Elementensystem läßt in den vier Orten wieder im Sinne Beob.—Rechn. folgende Fehler zurück, denen ich auch die Entfernungen des Gestirnes von Sonne (r) und Erde (ρ) beigesetzt habe.

Datum	$\Delta\lambda$	$\Delta\beta$	log r	log ρ
1905 Jänner 14·6226	+2'6	+0'3	0·623116	0·525858
1906 März 6·0	—5·3	—2·1	0·554234	0·414753
April 14·0	+3·0	—0·5	0·571492	0·454915
Mai 27·0	+1·9	—0·1	0·593042	0·544993

Die Wiedergabe der beiden äußersten Orte ist zwar nicht besonders befriedigend, aber in Anbetracht der obwaltenden Verhältnisse bei einer sechsstelligen Rechnung immerhin erträglich. Jedenfalls aber erhellt aus der geringen Größe aller Abweichungen, daß die Bahn von einer Parabel nicht merkbar abweicht und die Elemente der Wahrheit schon sehr nahe kommen.

Aus diesen Elementen erhält man zur Berechnung der rechtwinkligen heliozentrischen Koordinaten die folgenden, auf das mittlere Äquinoktium 1907·0 sich beziehenden Relationen:

$$x = \overline{9{\cdot}999872}\, r \sin (v + 231^\circ\ 0'\ 41''{\cdot}2)$$
$$y = \overline{9{\cdot}947876}\, r \sin (v + 140\ \ 20\ \ 10{\cdot}2)$$
$$z = \overline{9{\cdot}665076}\, r \sin (v + 143\ \ 29\ \ 56{\cdot}8)$$

Eine damit gerechnete, für Berliner Mitternacht geltende Ephemeride, welche mittlere Orte für 1907·0 gibt, lautet:

1907	α	δ	log r	log ρ
Febr. 13·5	$14^h\ 59^m\ 7^s$	$-20^\circ\ 48'0$	0·73669	0·72136
21·5	15 0 28	−21 1·0	0·74081	0·71517
März 1·5	0 59	10·4	0·74490	0·70924
9·5	15 0 42	16·4	0·74896	0·70378
17·5	14 59 38	19·0	0·75299	0·69901
25·5	57 40	18·0	0·75600	0·69517
April 2·5	14 55 25	−21 13·7	0·76097	0·69251

Nimmt man an, daß die Helligkeit des Kometen dem Ausdrucke $\frac{1}{r^2\rho^2}$ proportional sich verändere, was bei der großen Periheldistanz desselben sehr nahe zutreffen dürfte, so können zur Beurteilung seiner Lichtstärke die nachstehenden Angaben dienen.

Datum	log r	log ρ	log $r\rho$	H_1	H_2
1905 Jänner 14	0·62312	0·52586	1·1490	0·44	1·00
1906 März 6	0·55423	0·41475	0·9690	1·00	2·29
April 14	0·57149	0·45492	1·0264	0·77	1·76
Mai 27	0·59304	0·54499	1·1380	0·46	1·05
1907 Febr. 13	0·73669	0·72136	1·4580	0·11	0·24
März 9	0·74896	0·70378	1·4527	0·11	0·25
April 2	0·76097	0·69251	1·4535	0·11	0·25

Bei den Helligkeiten ist für H_1 (in der fünften Kolumne) die zur Zeit der Entdeckung des Kometen zu Grunde gelegt, für H_2 jene, welche er bei seiner ersten Aufnahme besaß. Über die Lichtstärke und das Aussehen des Kometen zu den obigen Zeiten besitzen wir folgende Notizen:

Auf der Platte vom 14. Jänner 1905 nennt Prof. Wolf den Kometen 12. Größe.

Das Aussehen des Kometen zur Zeit seiner Entdeckung beschreibt Prof. Wolf wie folgt: »Der Komet ist auf den Platten gut zu sehen und hat einen etwa $^1/_2{}^\circ$ langen Schweif, der vor dem Kometen einhergeht. Im Zehnzöller zeigte der Komet am 4. März (1906) einen scharfen Kern und einen gegen NW gerichteten Schweif«. Von anderer Seite wird erwähnt, daß der Komet ein rundlicher Nebel von 10″ bis 15″ mit einem sternartigen Kerne 10.11. Größe gewesen sei. Daß der Komet in der ersten Hälfte des März eine ziemlich große Helligkeit besaß, geht auch daraus hervor, daß er selbst zur Zeit des Vollmondes (10. März) gesehen und beobachtet wurde.

Auch Anfang April wurde der Komet, wiewohl bereits schwer, noch bei Mondschein gesehen. Der Schweif scheint indes Ende März und in den ersten Tagen von April von einer größeren Lichtstärke gewesen zu sein.

Ende April nahm das Gestirn rasch an Helligkeit ab, wird Ende Mai durchgehends 12.13. Größe geschätzt und bei der letzten Beobachtung vom 12. Juni in Straßburg sogar nur 13.14. Dazu mag wohl manches der Umstand beigetragen haben, daß er nur mehr am dämmerigen Abendhimmel beobachtet werden konnte.

Nach der obigen Zusammenstellung wird die theoretische Helligkeit des Kometen im Februar, März und April 1907 noch ein Neuntel jener betragen, die er bei seiner Entdeckung im März 1906 besaß, und noch ein Viertel jener, die er zur Zeit seiner ersten Aufnahme im Jänner 1905 und bei den letzten Maibeobachtungen im Jahre 1906 hatte. Man könnte daher einer Wiederauffindung desselben, mindestens mit Hilfe der Photographie, mit einer ziemlichen Zuversicht entgegensehen, wenn seine Stellung am Himmel nur nicht eine so

südliche wäre. Als ein günstiger Umstand hingegen ist es zu bezeichnen, daß er beiläufig zu derselben Zeit, wo er stationär wird, seine größte Helligkeit erreicht. Die Wahrscheinlichkeit, den Kometen im Februar und März dieses Jahres nochmals zu sehen und dann noch einige Zeit verfolgen zu können, halte ich daher, alles in allem genommen, für eine nicht allzu geringe.

Nachtrag.

Während des Druckes dieser Zeilen sind Beobachtungen des Kometen auf der Licksternwarte bis zum 24. Juni 1906 mit der Notiz publiziert worden, daß er damals noch in einem Zwölfzöller sichtbar und im großen Fernrohre ein leicht zu beobachtendes Objekt war. Diese, den europäischen Angaben gegenüber weit günstigeren Helligkeitsschätzungen sind der Hauptsache nach wohl zweifellos der südlicheren Lage der Licksternwarte und den dadurch bedingten kürzeren Dämmerungen zuzuschreiben, verstärken aber in nicht geringem Maße die oben ausgesprochene Hoffnung, das Gestirn nochmals aufzufinden.

Zur Theorie der »schönsten der Haloerscheinungen«

von

J. M. Pernter,

k. M. k. Akad.

(Vorgelegt in der Sitzung am 10. Jänner 1907.)

Den oberen Berührungsbogen des Halo von 46° nennt Bravais[1] die prachtvollste der Haloerscheinungen: »C'est sans contredit la plus brillante de toutes les apparitions qui se rattachent aux Halos et aux parhelies.« Es ist wichtig für die Theorie, diese Tatsache genau festzustellen. Die zusammenfassende Beschreibung Bravais' lautet: »Der Berührungsbogen (obere) des Halo von 46° ist ein wahrhaftiger Regenbogen durch die Lebhaftigkeit seiner Farben, die deutliche Trennung derselben und durch die Reinheit, mit welcher die Ränder und die Enden des Bogens sich vom Himmel abheben. Man sieht in diesem Bogen leicht alle Farben des Spektrums mit Ausnahme des Violett und zuweilen sogar auch dieses; sie sind deutlicher als bei der Nebensonne von 22°.«

Diese Deutlichkeit und Pracht der Farben ist somit die erste und auffallendste Eigenschaft der Erscheinung dieses Berührungsbogens. Als zweite auffallende Eigenschaft desselben bezeichnet Bravais die Horizontalität des Bogens. Von

[1] Sur les Halos, p. 91. In seiner »Notice sur les Halos« im »Annuaire météorologique de la France pour 1851«, p. 177, sagt er: »Car c'est sans contredit la plus remarquable de toutes les apparitions qui peuvent accompagner le halo.« Er ersetzt also hier das »brillante« durch »remarquable«. Im übrigen beschreibt er die Erscheinung hier wie dort in der im Texte angeführten Weise.

ihr sagt er:[1] »Für den Blick erscheint dieser Bogen horizontal; das schien er fast allen Beobachtern zu sein. Allerdings kenne ich keine direkte Messung, durch welche diese Horizontalität festgestellt worden wäre.« Die horizontalen Bögen sind jene, welche in ihrer ganzen Ausdehnung mit dem Horizonte parallel laufen, ob sie nun volle Kreise oder nur Teile solcher Kreise sind. Der bekannteste derselben ist der Nebensonnenring, der auch schlechthin der Horizontalkreis heißt. In der Tat ist er der einzige regelmäßig auftretende Horizontalkreis, alle anderen zählen zu den außerordentlichen Halos, wenn man von dem oberen und unteren Berührungsbogen des Halo von 46° absieht.

Ob man nun diese nur nach dem Augenschein und nicht auf Grund von Messungen dem Bogen zugesprochene Eigenschaft der Horizontalität als feststehende, ihm wesentliche Eigenschaft ansehen muß oder ob dieselbe nur Schein ist und nicht einen mit dem Horizonte streng parallelen Bogen bedeutet, das ist für die Theorie dieses Bogens die entscheidende Frage.

Bravais hat, trotzdem er keine Messung kannte, durch welche die strenge Horizontalität festgestellt worden wäre, sich für die Horizontalität als eine erwiesene Tatsache entschieden und demgemäß nennt er diesen Bogen[2] »den horizontalen oberen Berührungsbogen des Halo von 46°« oder auch einfach den (oberen) circumzenithalen Bogen.[3] Diese Benennung sagt ja an sich das gleiche wie »horizontal«, da ein Bogen, dessen »Mittelpunkt« im Zenith liegt, horizontal sein muß.

---

[1] Sur les Halos, p. 91: »A la vue, l'arc est sensiblement horizontal; il a paru tel à presque tous les observateurs; cependant je ne connais aucune messure directe qui ait constaté cette horizontalité«.

[2] In seiner großen, berühmten Abhandlung »Sur les Halos« findet sich diese Bezeichnung nur im Inhaltsverzeichnisse.

[3] Diese Benennung führt er bei diesem Bogen erst in seiner oben zitierten »Notice sur les Halos«, p. 177, ein. In der großen Abhandlung sagt er nur gelegentlich der Behandlung der »außerordentlichen circumzenithalen Bogen«: »Les arcs circumzenithaux ordinairs sont les arcs tangents au halos de 22 degrés et de 46 degrés«.

Bravais stellte, wie gesagt, die Horizontalität dieses Bogens in den Vordergrund und erklärte sie als die maßgebende, entscheidende Eigenschaft, die diesen Bogen charakterisiert. Demgemäß gab er eine Erklärung dieser Haloerscheinung, welche in erster Linie die Horizontalität des Bogens erklärt. Ich muß diese hier kurz rekapitulieren.

1. Theorie von Bravais.

Um einen horizontalen Bogen, dessen Abstand von der Sonne im Vertikal der Sonne etwa gleich dem Radius des Halo von 46° ist, durch Brechung der Sonnenstrahlen in den Eiskristallen zu erhalten, nimmt Bravais an, daß das Licht auf die vertikal schwebenden säulenförmigen Eisprismen so auffällt, daß der Strahl an der oberen horizontalen Basisfläche eintritt und von da an eine Seitenfläche gebrochen wird, durch die er austritt. Bleibt das Eisprisma vertikal, d. h. bleibt die Hauptachse stets in der Schwererichtung, dreht sich aber der Kristall um diese vertikale Achse,[1] so wird auch der vom Eisprisma abgelenkte Strahl mit der Basis des letzteren sich parallel dem Horizonte drehen und so muß für das Auge ein horizontaler Bogen entstehen, dessen Mitte im Vertikal der Sonne etwa 46° von der letzteren liegt.[2] Man erhält für die Berechnung der Höhe (h) des Bogens über dem Horizont bei der Sonnenhöhe H die Formel:

$$\sin h = \sqrt{n^2 - \cos^2 H}.$$

Man sieht hieraus ohneweiters, daß die Höhe h des Bogens für eine bestimmte Sonnenhöhe konstant ist, d. h. also an jedem Punkte des Bogens dieselbe und daher der Bogen mit dem Horizonte parallel sein muß.

---

[1] Es versteht sich von selbst, daß in der Natur die Kristalle so verschiedene Stellungen ihrer Seitenflächen aufweisen, daß es aufs gleiche herauskommt, wie wenn sich das Eisprisma um seine vertikale Hauptachse dreht; letzteres ist nur für die Darstellung der anschaulichere Ausdruck für die naturgemäße Annahme der immer vorhandenen verschiedenen Stellungen aller Art der Seitenflächen zu dem in der Ebene des Vertikals der Sonne geführten Vertikalschnitt durch das Prisma.

[2] Bravais, Sur les Halos, p. 96; siehe auch meine Meteorolog. Optik, p. 364.

Es verlangt aber diese Theorie von Bravais andererseits, daß die Höhe des Bogens über dem Horizonte mit der Sonnenhöhe veränderlich ist, wie dies obige Formel besagt. Das ist in der Tat ein Kriterium für die Richtigkeit der Theorie, wie es nicht besser gewünscht werden könnte und es sei gleich gesagt, daß Messungen von Ekama im Jahre 1883 und seither solche von Besson den Beweis erbracht haben,[1] daß »circumzenithale« Bögen, welche der Theorie Bravais' entsprechen, wirklich zur Beobachtung gelangten. Eine andere Frage ist es, ob diese Bravais'schen circumzenithalen Bögen mit Recht als die Berührungsbögen des Halo von 46° angesehen werden dürfen. Ich glaube, genügend beweisende Gründe theoretischer Art und auch Beobachtungen für die Auffassung beibringen zu können, daß die eigentlichen Berührungsbögen des Halo von 46° von diesen Bravais'schen circumzenithalen Bögen verschieden sind und eine besondere Haloerscheinung bilden, deren Theorie der von Galle zuerst gegebenen Theorie der Berührungsbögen des Halo von 46° entspricht.

2. Theorie von Galle.

Geht man von der Tatsache aus, daß der Glanz und die Farbenpracht dieses Bogens eine so auffallende und von den Beobachtern meistens als so schön wie bei keiner anderen Haloerscheinung beschrieben und bewundert worden ist, so findet man die Erklärung für diese Pracht nur durch die Farben- und Glanzbildung in jenen Eisprismen gegeben, welche im Minimum der prismatischen Ablenkung erzeugt wird. Es ist ja richtig, auch jene Refraktionen, welche nicht im Minimum der Ablenkung stattfinden, sind wirksam, geben Glanz und Farben, aber bekanntlich in um so geringerem Grade von Intensität und Reinheit, als sie vom Minimum der Ablenkung mehr abweichen. Um die allgemein angestaunte Pracht des oberen Berührungsbogens zu erklären, ist es daher absolut notwendig, anzunehmen, daß die Erscheinung erzeugt wird durch Eisprismen,

[1] Siehe Ekama, Mijne Warnemingen omtrent de Halo, p. 58; Besson, Compt. rend. vom 3. April 1905 und vom 5. November 1906. Siehe auch meine Meteorolog. Optik, p. 375, und Compt. rend. vom 15. Mai 1906.

die im Minimum der Ablenkung wirken. Ich halte dafür, daß dies allein die Grundlage einer Erklärung der herrlichen Erscheinung bilden kann und daß somit die Theorie von Galle hier die richtige ist.[1] Galle nimmt an, daß die eine vertikale Mittellage einnehmenden, säulenförmigen Eisprismen pendeln, und zwar mit solchen Ausschlägen, daß auch die bei anderer Sonnenhöhe als 22° 8′ (bei welcher die genau in die Schwerelinie mit der Hauptachse einspielenden Eisprismen gerade im Minimum der Ablenkung stehen) wirkenden Eisprismen ins Minimum der Ablenkung sich einstellen und so die Erscheinung erzeugen. Ein Kriterium für die so erzeugte Erscheinung bietet wieder der Abstand der im Vertikal der Sonne befindlichen Mitte des Bogens; er muß stets gleich sein dem Radius des Halo von 46° und daher stets mit dem höchsten Punkte dieses Halo zusammenfallen; der Bogen ist daher stets ein echter Berührungsbogen dieses Halo.

Die vorliegenden Messungen sind zu unsicher und zu ungenau und überhaupt viel zu wenige, als daß dieses Kriterium allein zur Entscheidung genug sicher wäre, die Messung Weidler's etwa ausgenommen. Wohl aber ist daraus und aus gar manchen Beschreibungen von Beobachtungen mit größter Wahrscheinlichkeit zu entnehmen, daß diese geforderte Gleichheit des Radius des Halo von 46° und des Abstandes der Mitte des Berührungsbogens wiederholt beobachtet wurde, und zwar nicht nur bei 22° 8′ Sonnenhöhe, wo sie auch für den Bravaisschen Bogen besteht.

Es ist somit auf Grund der Glanz- und Farbenpracht des Bogens, sowie aus den Beobachtungen der Gleichheit des Ab-

---

[1] Galle, Pogg. Ann. *49*, p. 264 — Galle hat, allerdings nicht speziell aus dem oben angeführten Grunde, die Minimumstellung bei Erklärung dieses Bogens seiner Erklärung zu Grunde gelegt, sondern weil er eine wirksame Licht- und Farbenentwicklung bei den ganzen Haloerscheinungen nur dann annahm, wenn dieselben durch Eisprismen in der Minimumlage erzeugt werden. Bravais (Sur les Halos, p. 94) bemerkt zwar dagegen mit Recht, daß auch andere Stellungen der Prismen »wirksame« Strahlen geben, aber er hat entschieden unrecht, wenn er annimmt, die Prismen, die nicht in der Minimumstellung wirken, könnten so auffallende Prachtentwicklungen erzeugen. Darüber noch mehr weiter unten.

standes der Mitte desselben und des Radius des Halo von 46° der Schluß zu ziehen, daß außer dem Bravais'schen Bogen, häufiger wohl als der letztere, auch der wirkliche Berührungsbogen des Halo von 46° sich bildet.

3. Wirklichkeit zweier verschiedener Bögen.

Die Auffassung, daß es sich hier um zwei verschiedene Haloerscheinungen handle, den oberen Berührungsbogen an den Halo von 46° und den circumzenithalen Bogen von Bravais, ergibt sich notwendig aus den obigen Erwägungen über die Theorie der beiden Bögen. Da aber diese Auffassung in der Theorie der Haloerscheinung neu ist, mag es geboten erscheinen, dieselbe ausführlich zu begründen.

Wir haben es in der Tat nach den zwei Theorien mit zwei theoretisch deutlich und scharf verschiedenen Bildungen zu tun, deren jede drei, nur ihr eigene, die der anderen ausschließende Eigenschaften aufweist.

a) Die Theorie des Berührungsbogens verlangt, daß er stets in wirklicher Berührung mit dem Halo von 46° sei, da im Vertikal der Sonne der Abstand seiner Mitte von der Sonne stets gleich dem Radius des Halo sein muß. Der Abstand aber der Mitte des circumzenithalen Bogens nach der Theorie von Bravais kann nur bei einer Sonnenhöhe von 22° 8′ dem Radius des Halo gleich sein, bei allen anderen Sonnenhöhen ist dieser Abstand größer als der Radius des Halo.

b) Der Berührungsbogen muß sich je nach der Sonnenhöhe vom Berührungspunkt aus nach oben oder nach unten biegen;[1] der circumzenithale Bogen von Bravais läuft aber wesentlich genau parallel mit dem Horizonte.

c) Der Berührungsbogen muß — Störungen ausgenommen — einen Glanz und eine Farbenpracht aufweisen, die jener der Nebensonne von 22° gleichkommt, in der Schönheit der Farben sogar übertrifft; der circumzenithale Bogen von Bravais kann keine besondere Pracht der Erscheinung besitzen.

Diese drei Kriterien sind zweifellos geeignet, zu entscheiden, ob und wann man es mit dem einen oder dem

[1] Siehe die Zeichnung Fig. 149 auf p. 371 in meiner Meteorolog. Optik.

anderen Bogen zu tun hat. Wir werden die vorhandenen Beobachtungen daraufhin zu prüfen haben, ob mit Hilfe der drei Kriterien das wirkliche Vorkommen beider Bögen sich nachweisen läßt oder ob nur einer der beiden Bögen in der Natur sich verwirklicht.

Das erste Kriterium verlangt, daß man durch Messungen des Abstandes des im Vertikal der Sonne liegenden Punktes der fraglichen Bögen von der Sonne einerseits zeigt, daß ein Bogen vorkommt, bei welchem dieser Abstand mit der Sonnenhöhe veränderlich ist, und andrerseits ein zweiter derartiger Bogen auftritt, bei welchem dieser Abstand bei allen Sonnenhöhen gleich ist dem Radius des Halo von 46°. Um diese Verhältnisse leichter zu überblicken, setze ich eine kleine Tabelle hieher, welche den theoretischen Abstand des circumzenithalen Bogens von Bravais im Vertikal der Sonne vom Sonnenmittelpunkte nach der Theorie dieses Bogens ausweist. Ich bezeichne mit H die Sonnenhöhe, mit h die Höhe der im Vertikal der Sonne liegenden Mitte des Bogens, mit d den Wert des Abstandes der letzteren von der Sonne, also $h - H = d$. Die Tabelle geht von $H = 5$, der niedrigsten Sonnenhöhe, bei welcher bisher ein solcher Bogen beobachtet wurde, bis $H = 31$, der wohl höchsten Höhe, bei welcher er möglich ist. An dieser Tabelle sind dann nicht nur die eigentlichen Messungen, sondern auch die Schätzungen und andere Bemerkungen über die Höhe und den Abstand des Bogens von der Sonne zu prüfen.

H	h	d
5°	58° 17′	53° 17′
6	58 30	52 30
7	58 40	51 46
8	59 2	51 3
9	59 25	50 25
10	59 45	49 45
11	60 10	49 10
12	60 37	48 37
13	61 7	48 7
14	61 40	47 40
15	62 12	47 14

H	h	d
16°	62°52′	46°52′
17	63 33	46 33
18	64 16	46 16
19	65 3	46 3
20	65 53	45 53
21	66 46	45 46
22	67 44	45 44
23	68 45	45 45
24	69 52	45 52
25	71 4	46 4
26	72 22	46 22
27	73 48	46 48
28	75 24	47 24
29	77 13	48 13
30	79 23	49 23
31	82 9	51 51

Alle Rechnungen, diese und die späteren, wurden für die Strahlen durchgeführt, deren Brechungsexponent im Eise $n = 1{\cdot}31$ ist, d. h. also für Gelb. Wo für Rot gerechnet wurde, ist es ausdrücklich bemerkt.

Messungen der Höhe beider Bögen, beziehungsweise des Abstandes d lagen bis zur Zeit Bravais' nur sehr wenige vor; es waren ihm neun Messungen und vier Schätzungen bekannt. Seither kamen dazu zehn Messungen an 5 Tagen von Ekama im Jahre 1883 und 18 Messungen an 7 Tagen von Besson in den Jahren 1905 und 1906. Was nun die Genauigkeit dieser Messungen betrifft, so muß im allgemeinen bemerkt werden, daß sie der Natur der Sache nach keine größere Genauigkeit beanspruchen als etwa einen Grad und daß gar oft die Umstände, unter denen die Messungen gemacht wurden, die Verschwommenheit der Erscheinung, die Unsicherheit des Punktes, auf den eingestellt werden muß u. dgl. m., noch größere Fehlerquellen bedingen. Selbst ein so gewiegter und erfahrener Beobachter dieser Erscheinungen wie Ekama[1] macht gerade bei

[1] A. a. O.

den Messungen dieser Bögen darauf aufmerksam, daß die große Höhe dieses Bogens über dem Horizonte schon wegen der unbequemen Stellung, die der Beobachter bei den Messungen einnehmen muß, eine Unsicherheit bedingt. Wir werden also bei diesen Messungen durchwegs eine gewisse Ungenauigkeit erwarten müssen. Wenn es sich um die Frage handelt, ob der gemessene Bogen ein circumzenithaler Bogen von Bravais war, bieten uns Messungen von solchen Bögen bei Sonnenhöhen unter 12° und über 28° die meisten Bürgschaften für eine gesicherte Entscheidung, weil hier die Abweichung der theoretischen Höhe des circumzenithalen Bogens von der des Berührungsbogens so groß ist, daß sie nicht mehr als Messungsfehler erklärt werden kann. Ein größeres Vertrauen bezüglich der Genauigkeit verdienen aber die Messungen derjenigen, die schon in Kenntnis der Theorie von Bravais sich befanden und daher naturgemäß bestrebt waren, ihren Messungen die möglichste Genauigkeit zu sichern; es ist dies Bravais selbst, ferner Ekama und Besson, die auch für die Messungen gut vorbereitet waren und nicht, wie die meisten anderen, nur wie zufällig und im Vorbeigehen sie machten.

Wir wollen nun die bislang bekannten Messungen und Schätzungen daraufhin untersuchen, ob sie sich auf den circumzenithalen Bogen beziehen oder auf den Berührungsbogen. Ich gebe zu diesem Zwecke in der folgenden Tabelle Datum, Sonnenhöhe zur Zeit der Messung und die Werte der letzteren als Abstand d von der Sonne sowie das theoretische d dieser Sonnenhöhe für den circumzenithalen Bogen; ein M neben d bedeutet Messung, ein S Schätzung; D_0 ist der Radius des Halo, 45° 44′.

Beobachter	Datum	H	d beobachtet	d berechnet	Beob.— berechnet	Beob.$-D_0$
Weidler	1735, 31. Dez.	15° 30'	45° 30' *M*	47° 3'	— 1° 33'	— 0° 14'
Parry	1825, 29. März	16 36	46 40 *M*	46 42	— 0 2	+ 0 56
Greshow	1750	18 30	47 10 *M*	46 19	+ 0 51	+ 1 26
Whiston und Barker	1721, 23. Okt. a.St.	22 20	46 40 *M*	45 44	+ 0 56	+ 0 56
Bravais et Martins	1839, 4. Okt.	20 15	45 41 *M*	45 51	— 0 10	— 0 3
Bravais[1]	1849, 4. Mai	22° bis 24°	45 9 *M*	45 6	+ 0 3	— 0 1
Wrede	1801, 20. Febr.	23° 40'	46 20 *S*	45 49	+ 0 31	+ 0 36
»	1801, 20. »	26 20	47 10 *M*	46 29	+ 0 41	+ 1 26
Muschenbroek	1753, 18. Okt.	24 10	47 — *S*	45 54	+ 1 6	+ 1 16
»	1734, 23. Febr.	24 14		45 54		
»	1734, 23. »	26 36		46 34		
»	1734, 23. »	27 44		47 14		
»	1734, 23. »	27 49		47 17		
Nollet	1755, 10. Sept.	13 10	46 50 *S*	48 3	— 1 13	+ 1 6
Ekama	1882, 23. August	7 11	52 0	51 37	+ 0 23	+ 6 16

Ekama	1882, 23. August	8°	15'	51°	19'			50°	52'	+ 0°	27'	+ 5°	35'
»	1882, 16. März	15	0	47	33	2		47	14	+ 0	19	+ 1	49
»	1882, 30. »	18	5	47	0			46	15	+ 0	45	+ 1	16
»	1882, 30. »	19	9	47	0			46	1	+ 0	59	+ 1	16
»	1883, 5. April	19	9	46	50	3	*M*	46	1	+ 0	49	+ 1	6
»	1883, 5. »	19	15	46	45		*M*	46	0	+ 0	45	+ 1	1
»	1883, 25. Juni	23	20	46	20		*M*	45	47	+ 0	33	+ 0	36
»	1883, 25. »	11	0	49	20		*M*	49	10	+ 0	10	+ 3	36
»	1883, 25. »	10	20	49	50		*M*	49	35	+ 0	15	+ 4	6
Besson	1905, 26. März	7	56	51	4		*M*	51	6	— 0	2	+ 5	20
»	1905, 8. August	10	10	49	50		*M*	50	2	— 0	12	+ 4	6
»	1906, 10. Mai	11	13	48	47		*M*	49	2	— 0	15	+ 3	3
»	1906, 8. Juli	13	20	47	10		*M*	47	58	— 0	48	+ 1	26
»	1906, 5. Okt.	13	11	47	19	4	*M*	47	30	— 0	11	+ 1	35
»	1906, 13. »	12	53	47	37		*M*	48	15	— 0	38	+ 1	53
»	1906, 13. »	12	35	47	25		*M*	48	19	— 0	54	+ 1	41
»	1906, 13. »	12	26	47	34		*M*	48	24	— 0	50	+ 1	50
»	1906, 13. »	12	13	47	17		*M*	48	30	— 1	13	+ 1	33

Beobachter	Datum	H	d beobachtet	d berechnet	Beob.—berechnet	Beob.—D_0
Besson	1906, 29. Okt.	23° 24'	45° 36'[4] M	45° 9'	+ 0° 27'	+ 0° 26'
«	1906, 29. »	24 57	45 33 [4] M	45 21	+ 0 12	+ 0 23
«	1906, 29. »	26 40	46 20 M	46 38	— 0 18	+ 0 36
«	1906, 29. »	12 35	47 55 M	48 19	— 0 24	+ 2 11
«	1906, 29. »	11 58	47 32 [4] M	48 12	— 0 40	+ 2 22
«	1906, 29. »	11 41	49 19 M	48 47	+ 0 32	+ 4 35
«	1906, 29. »	5 50	52 10 M	52 40	— 0 30	+ 6 26
«	1906, 29. »	5 20	52 40 M	53 1	— 0 21	+ 6 56
«	1906, 29. »	4 59	53 1 M	53 18	— 0 17	+ 7 17
«	1906, 29. »	20 43	46 — [5] S	45 48	—	—

[1] In der oben zitierten »Notice sur les Halos«, p. 178; bezieht sich auf Rot.
[2] Mittel aus drei Messungen.
[3] Mittel aus zwei Messungen.
[4] Die Messung bezieht sich auf Rot und wurde daher auch das berechnete d für Rot gerechnet ($n = 1 \cdot 307$).
[5] »A une distance du Soleil qui m'a paru être egal au rayon du grand halo.«

Aus dieser Tabelle entnimmt man, daß man eine Entscheidung, ob man es mit dem circumzenithalen Bogen von Bravais oder mit dem Berührungsbogen zu tun hat, nur dort erhält, wo Theorie und Beobachtung mehr als einen oder gar zwei Grade differieren. Es kommt dies von der Unsicherheit, welche diesen Messungen naturgemäß anhaftet, selbst bei jenen, welchen die Theorie Bravais' schon bekannt war und die also gewiß mit aller Sorgfalt gemessen haben. Am schwersten wird die Entscheidung durch die Messung da, wo die theoretischen Werte für den circumzenithalen Bogen von Bravais auch nur etwa einen Grad vom theoretischen Werte für den Berührungsbogen abweichen; da wird es leicht vorkommen, daß die Messungswerte sowohl vom theoretischen Werte des circumzenithalen Bogens als von dem des Berührungsbogens fast gleichweit und nach keiner Seite bedeutend abstehen. Es wird dann aber bei Messungsfehlern von etwa einem Grade, die ja so leicht zu machen sind und wenn dabei der theoretische Wert des circumzenithalen Bogens etwa zwei Grade von dem des Berührungsbogens verschieden ist, vorkommen, daß die Messungen nach beiden Seiten beiläufig gleichweit von den theoretischen Werten abstehen. Man wird daher meistens nur auf solche Messungen sich stützen können, welche bei Sonnenhöhen ausgeführt wurden, bei welchen die theoretischen Werte für den circumzenithalen Bogen mehrere Grade vom theoretischen Werte des Berührungsbogens (45° 44′) abweichen. Diese Abweichungen sind in der letzten Vertikalreihe der Tabelle angegeben.

Es ist aus derselben leicht und unzweideutig zu entnehmen, daß die Beobachtungen von Ekama vom 23. August bei den Sonnenhöhen von 7° 11′ und bei 8° 15′ und die zwei letzten vom 25. Juni 1883 bei 10° 0′ und 10° 20′ Sonnenhöhe zweifellos auf den circumzenithalen Bogen von Bravais sich beziehen. Das gleiche gilt von den Beobachtungen Besson's vom 26. März, 8. August 1905 und vom 10. Mai und 29. Oktober 1906. Da diese Messungen ganz unbezweifelbar die Tatsächlichkeit des circumzenithalen Bogens von Bravais beweisen, so ist es überflüssig zu untersuchen, ob auch andere Messungen sich auf diesen Bogen beziehen. Wohl aber werden

wir zu untersuchen haben, ob unter denselben sich solche finden, die die Tatsächlichkeit auch des Berührungsbogens des Halo von 46° erweisen. Da ergibt sich nun, daß von den vorhandenen wenigen Messungen nur die eben genannten bei solchen Sonnenhöhen gemacht wurden, welche eine gänzlich unbezweifelbare, eindeutige Entscheidung ermöglichen, und diese Messungen wurden eben an circumzenithalen Bogen gemacht. Man möchte versucht sein, den voreiligen Schluß zu ziehen: folglich kommt nur der circumzenithale Bogen in der Natur vor, der Berührungsbogen aber nicht. Das wäre aber nicht nur voreilig, sondern auch ganz unerlaubt. Der Messungen sind doch allzuwenige, als daß auch ohne Rücksicht auf andere Beobachtungstatsachen aus ihnen allein ein solcher Schluß gezogen werden dürfte; man kann mit größter Wahrscheinlichkeit erwarten, daß im Laufe der Zeit die Messungen sich mehren und dabei ist es um so weniger ausgeschlossen, daß auch bei Sonnenhöhen, die der Entscheidung der Frage günstig sind, Berührungsbogen gemessen werden dürften, als die beiden sub *b* und *c* angeführten Kriterien auf das deutlichste die Wirklichkeit auch des Berührungsbogens nachweisen. Bevor ich dazu übergehe, muß ich aber feststellen, daß die oben in der Tabelle mitgeteilte Messung von Weidler wenn auch nicht so auffallend wie die Messungen von Ekama und Besson für den circumzenithalen Bogen, so doch auch unbezweifelbar beweisen, daß Weidler den Berührungsbogen vor sich hatte. Denn wenn man selbst annehmen will, daß Weidler einen Messungsfehler von einem ganzen Grad gemacht habe, so würde das Anbringen dieser Korrektion doch noch einen Ausfall von mehr als einem halben Grad zurücklassen. Allein die Annahme eines solchen Fehlers bei der Messung Weidler's dürfte schon aus dem Grunde nicht gestattet sein, weil alle vorliegenden Messungen dartun, daß die Messungsfehler fast ausschließlich in der Messung zu großer Werte bestehen und, wenn sie in zu niedrigen Werten auftreten, die Fehler immer kleiner als ein Grad sind. Die Messung Weidler's würde selbst mit dem höchsten negativen Werte der Abweichung, der in unserer Tabelle vorkommt, nämlich 1° 13′, erst an 46° 43′ hinaufkorrigiert werden können und da

von dem theoretischen Werte der circumzenithalen Bögen von 47° 3′ noch immer 20′ abstehen, was ja nach Anbringung der richtigen Korrektion nicht mehr möglich wäre; eine größere Korrektion anzubringen, wäre aber unter keinen Umständen gerechtfertigt. Die Messung Weidler's beweist also zweifellos, daß der Berührungsbogen ebenfalls in der Natur tatsächlich vorkommt.

Es ist richtig, der gegen jeden Zweifel ganz gefeite Beweis für die Tatsächlichkeit des Berührungsbogens wäre gewiß der, wenn derselbe bei einer der Sonnenhöhen sich zeigte, bei welchen der circumzenithale Bogen vier oder mehr Grade über dem Halo von 46° erreichen müßte. Es liegt uns nun freilich keine Messung dieser Art vor, wohl aber eine Beobachtung, die hier die Messung vollkommen ersetzt; es ist die berühmte Beobachtung von Lowitz,[1] das »Petersburger Phänomen«. Die Sonnenhöhe zur Zeit der Beobachtung des den Halo von 46° berührenden Bogens betrug[2] etwa 31°. Der circumzenithale Bogen von Bravais hätte bei dieser Sonnenhöhe (51° 51′— 45° 44′=) 6° 7′ höher erscheinen müssen als der Halo von 46°. Aber Lowitz zeichnet den Berührungsbogen, d. h. er stellt den Halo von 46° so dar, daß der fragliche Bogen denselben voll berührt. Es wäre ganz ausgeschlossen, daß Lowitz einen Bogen, der 6° vom Halo abgestanden hätte, in Kontakt mit ihm gezeichnet hätte, besonders da er ausdrücklich erklärt, daß er das Phänomen »mit der allergrößten Genauigkeit aufzeichnete«. Überdies sagt Lowitz in der Beschreibung dieses oberen Bogens, daß derselbe den Halo von 46° »gehörnt erscheinen ließ«. Das hätte er nicht können, wenn er 6° vom Halo abgestanden hätte.[3] Wir haben also

---

[1] Siehe meine Meteorolog. Optik, p. 222.

[2] Dies schließt Bravais selbst daraus, daß die Erscheinung um $7^h 30^m$ morgens am 18. Juli begann und in St. Petersburg um diese Zeit die Sonnenhöhe etwa 31° beträgt. Später wäre sie noch höher. (Sur les Halos, p. 109.)

[3] Bravais gibt die Tatsache der Berührung des Bogens mit dem Halo zu und erklärt sie dann durch starkes Pendeln der Eiskristalle. Ganz richtig; dieses Pendeln ist stets vorausgesetzt bei der Erzeugung des Berührungsbogens bei Sonnenhöhen, die von 22° 8′ verschieden sind, und es ist eigentlich ein Abgehen Bravais' von seiner Theorie, die vertikale Achsen und horizontale

hier den gesuchten Beweis, der jeden Zweifel an der Tatsächlichkeit des Berührungsbogens ausschließt: den den Halo von 46° berührenden Bogen, bei einer Sonnenhöhe von 31°, wo der circumzenithale Bogen von Bravais selbst vom äußeren Rande des Halo noch um 4° abstehen müßte.

Um zu entscheiden, ob die übrigen Bögen, deren Messungen in der obigen Tabelle mitgeteilt sind, und die zahlreichen anderen beobachteten Bögen, von denen keine Messungen, sondern nur Beschreibungen vorliegen, zu den Berührungsbögen oder zu den circumzenithalen Bögen gehörten, müssen wir die beiden weiteren, oben sub *b)* und *c)* angeführten Kriterien heranziehen.

Das zweite Kriterium für die beiden Bögen läßt sich folgendermaßen formulieren: läuft der Bogen in seiner ganzen Ausdehnung streng parallel mit dem Horizonte, so ist er ein circumzenithaler Bogen, wenden sich die rechts und links von der Mitte des Bogens liegenden Äste desselben zenithwärts oder im weiteren Verlaufe gegen den Horizont, so ist er ein Berührungsbogen.

Wir haben eingangs gesehen, daß Bravais die Horizontalität als die maßgebendste und eigentlich charakteristische Eigenschaft auffaßte, und zwar für alle zur Beobachtung gekommenen Bögen dieser Art. Er ging deshalb so weit, die Existenz des eigentlichen Berührungsbogens, wie ihn die Theorie von Galle verlangt, zu leugnen; für ihn gibt es nur den circumzenithalen Bogen.

Wir werden daher in erster Linie zu untersuchen haben, ob denn die auf Grund der vorliegenden Beobachtungen behauptete Horizontalität in der Tat in allen Fällen so zweifellos feststeht, wie es Bravais glaubt annehmen zu müssen. Wir wissen schon, daß nicht eine einzige Messung dieser Art vorliegt, welche diese Horizontalität experimentell feststellen

---

Basisflächen der Eiskristalle voraussetzt. Er sieht sich übrigens öfters gezwungen, bei Erklärung mehrerer Beobachtungen dieses Bogens zu pendelnden Kristallen die Zuflucht zu nehmen. Es wäre naturgemäßer, zwei verschiedene Bögen zuzunehmen: den Berührungsbogen und den circumzenithalen; siehe unten p. 43.

würde.[1] Allerdings ist es aus der Theorie sicher, daß jene Bögen, welche durch die Messungen von Ekama und Besson als Bravais'sche circumzenithale Bögen sich ergaben, zweifellos horizontal waren. Aber von den übrigen zahlreichen Beobachtungen haben wir keine, seien es direkte, seien es indirekte Beweise für die Horizontalität. Bei einem sehr großen Teile der vorliegenden Beobachtungen ist allerdings die Bemerkung gemacht, daß er horizontal schien oder daß er seinen Mittelpunkt im Zenith zu haben schien, allein das war eben nur der Eindruck, den der Beobachter hatte, ohne exakte Feststellung, daß der Schein objektive Wirklichkeit war. Es ist daher mit Recht vorerst zu untersuchen, ob der Schein der Horizontalität bei diesen Bögen etwa nicht durch die Umstände, unter welchen sie sich zeigen, verursacht wird, ohne daß eine strenge Horizontalität vorhanden ist.

Diese Bögen entstehen fast ausschließlich in sehr großen Höhen über dem Horizonte; selbst bei Sonnenhöhen von nur 10° müssen sie schon 56°, bei 15° Sonnenhöhe aber 61° hoch über dem Horizonte erscheinen; bei noch größeren Sonnenhöhen von 18 bis 24°, bei welchen diese Bögen am öftesten beobachtet wurden, liegen sie schon mehr als 64° über dem Horizonte. Wir wissen aber,[2] daß uns schon bei Winkelhöhen von 50°, und noch entschiedener bei größeren, das Himmelgewölbe derart flach und, man möchte sagen, horizontal erscheint, daß man Erscheinungen, die in diesen Höhen auftreten, wenn sie keine nennenswerte Längserstreckung haben, ohneweiters im Zenith zu sehen glaubt. Wenn nun eine Längserstreckung vorhanden ist, wie bei unseren Bögen, so hält man sie für horizontal und wenn sie im Bogen um den Zenith sich erstreckt, wird man wegen der dem Auge stets horizontal erscheinenden Ausdehnung den Zenith als den

---

[1] Durch Beobachtung wäre diese mittels eines in Altazimut montierten Lineales (Diopters) dadurch festzustellen, daß man dasselbe auf die Mitte einstellte, dann muß bei der Drehung um die vertikale Achse des Instrumentes der Bogen ununterbrochen im Visierfeld des Lineales bleiben; der Visierpunkt des Lineals muß einen mit dem Horizonte parallelen, mit dem Bogen zusammenfallenden Kreisbogen beschreiben.

[2] Siehe Meteorolog. Optik, p. 22.

Mittelpunkt des Bogens annehmen, jedenfalls so lange, als man sich dem unmittelbaren Sinneneindrucke überläßt. Dies wird um so mehr der Fall sein, wenn der Bogen in Wirklichkeit nahezu horizontal, ohne stärkere Ein- oder Ausbiegungen, verläuft, wie dies gerade bei dem Berührungsbogen des Halo von 46° bei den Sonnenhöhen von etwa 20 bis 36° der Fall ist.[1] Der Schein der Horizontalität für das Auge, der unwillkürliche Sinneneindruck, findet hiedurch eine genügende Erklärung. Daß trotzdem Bravais gerade zur Erklärung der Horizontalität seine Theorie der circumzenithalen Bögen entwarf, die heute durch Ekama und Besson für gewisse Fälle ihre Bestätigung fand, muß uns mit Dankbarkeit und Befriedigung über den so erzielten Fortschritt in dem Verständnisse der Haloerscheinungen erfüllen.

Wenn wir so gesehen haben, daß für Sonnenhöhen von etwa 22° und darüber die Erscheinung der Horizontalität auch am eigentlichen Berührungsbogen eine unwillkürliche, wohl unausweichliche ist, so mag man wohl bei niedrigeren Sonnenhöhen, mit größerer Aufmerksamkeit und unter günstigen Verhältnissen (wenn die Kurve, welche den minimal abgelenkten Strahlen entspricht, ohne eine merkliche Verbreiterung durch die nicht im Minimum der Ablenkung wirksamen Strahlen erlitten zu haben, erscheint) erkennen, daß die Äste links und rechts von der Mitte des Bogens »nach oben« dem Zenith zu sich biegen. In der Tat besitzen wir vier Beobachtungen, bei welchen dies ausdrücklich von den Beobachtern hervorgehoben wird.

Die erste dieser vier Beobachtungen rührt von Maraldi her, der sie am 27. Februar 1721 machte und in den Memoires de l'Academie des Sciences pour 1721, p. 231, beschreibt. Er sagt ausdrücklich, daß die Enden des Bogens gegen den Zenith sich wendeten;[2] die Sonnenhöhe betrug 15° 30′.

[1] Siehe in Meteorolog. Optik, p. 371. die Zeichnung. Die dargestellten Kurven sind gezeichnet ohne Berücksichtigung der gewiß sie verbreiternden und ausgleichenden, nicht im Minimum der Ablenkung wirksamen Strahlen. 36° ist wohl nur ein idealer Fall.

[2] »Ses extrémités regardaient le Zenith.« — Bravais, Sur les Halos, p. 103.

Zwei weitere Beobachtungen rühren von Gmelin her;[1] in der Beschreibung wird bei beiden der Ausdruck verwendet: »arcus cruribus sursum versis«.

Endlich viertens die Beobachtung von Chetwode,[2] der den Bogen in Form eines großen zunehmenden Mondes sah.

Bravais versucht, diesen deutlichen Beschreibungen der drei Beobachter eine andere Bedeutung zu geben — ganz mit Unrecht; die Theorie der eigentlichen Berührungsbögen erklärt diese Beschreibungen auf das natürlichste und beste. Nach der letzteren Theorie sind die Äste des Bogens um so deutlicher »nach oben«, dem Zenith zu gebogen, je niedriger die Sonnenhöhe ist; bei Sonnenhöhen wenig unter 20° ist dies schon erkennbar und wird bei 15° sogar recht deutlich wahrnehmbar. Die Höhe der Sonne war bei der Beobachtung von Maraldi 15° 30′ und bei der ersten von Gmelin 17°; die Höhe des Mondes war bei der zweiten Beobachtung von Gmelin 17° 45′, bei der von Chetwode aber 19°. Es liegt da kein Grund vor, die Beschreibungen anders zu deuten,[3] als sie lauten, es handelt sich einfach um den eigentlichen Berührungsbogen in allen vier Fällen, und so beweisen diese vier Beobachtungen wieder, daß auch der eigentliche Berührungsbogen in der Natur tatsächlich sich bildet.

Erbringen diese vier Beobachtungen durch die Beschreibungen selbst den vollen und entscheidenden Beweis, daß es auch solche Bögen gibt, die nicht streng parallel mit dem Horizonte verlaufen und daher nicht circumzenithale Bögen sein konnten, so ergeben die Ausmessungen von gar manchen Zeichnungen von Haloerscheinungen, bei welchen

[1] Sie werden von Braun in den Novi Commentarii, die erste in t. VI, p. 464, die andere in t. XI, p. 343, mitgeteilt. — Bravais, l. c., p. 104 und 105.

[2] Bravais, l. c., p. 106: »à la forme d'un grand croissant«.

[3] Maraldi's Bemerkung, daß er den Radius des Bogens auf 46° schätzte, bietet Bravais einen Anhaltspunkt zum Zweifeln. Allein es mußte, gerade wenn es sich um den eigentlichen Berührungsbogen handelte, die Öffnung des Bogens eine bedeutend größere sein als beim circumzenithalen Bogen. Die Zweifel Bravais' bei den anderen zwei Beobachtungen sind aber ganz ohne jedwede Unterlage.

auch unser Bogen vorkommt, einen Verlauf des Bogens, der nicht parallel mit dem Horizonte, nicht circumzenithal ist. Ich finde solche Zeichnungen, unter den von Bravais selbst reproduzierten, vier:

1. Die Zeichnung der Beobachtung vom 24. Jänner 1684, die Colbius selbst gegeben hat, reproduziert bei Bravais, Taf. III, Fig. 106;

2. die von Zahn gegebene Zeichnung seiner Beobachtung vom 1. März 1688, reproduziert bei Bravais, Taf. III, Fig. 107;

3. Parry's Zeichnung seiner Beobachtung vom 5. April 1820, reproduziert von Bravais, Taf. IV, Fig. 135; endlich

4. die Zeichnung der Beobachtung von Hof's vom 21. Mai 1824, reproduziert von Bravais, Taf. IV, Fig. 136.

Es ist richtig, Zeichnungen solcher Erscheinungen taugen gewiß nicht zur Erbringung eines eigentlich strengen Beweises, sie zeigen aber immerhin, daß die Auffassung der Beobachter nicht die eines circumzenithalen Bogens war, und dienen neben den oben erbrachten vier direkten Beweisen als weitere Begründungen.

So hat sich ebenfalls aus der Untersuchung über das zweite Kriterium mit Sicherheit ergeben, daß dasselbe wirklich in der Natur vorgekommene Bögen als eigentliche Berührungsbögen des Halo von 46° erwiesen hat und somit die Tatsächlichkeit auch der letzteren neuerlich festgestellt erscheint.

Es erübrigt uns noch, durch die Untersuchung der vorliegenden Beobachtungen auf Grund des Eintreffens des dritten Kriteriums den Beweis zu erbringen, daß beide Bögen, der eigentliche Berührungsbogen und der circumzenithale Bogen von Bravais, tatsächlich in der Natur vorkommen. Ist das Prinzip richtig, daß eine auffallende Leuchtkraft, Glanz und Pracht der Farben nur beim Durchgang der Strahlen in der Minimumablenkung auftreten kann, so handelt es sich in allen jenen Fällen, wo die Beobachter diese herrliche Pracht in Glanz und Farbe hervorheben, um den eigentlichen Berührungsbogen.

Da Bravais dieses Prinzip zwar selbst auch aufgestellt und anerkannt hat, es jedoch bei der Anwendung auf unseren Fall in die zweite Linie gestellt und praktisch außer acht

gelassen hat, so muß ich diesen Punkt gerade in Bezug auf den Berührungsbogen vollkommen klarstellen.

Galle[1] hatte die Ansicht geäußert, daß es für die Wirksamkeit der Strahlen beim Durchgang durch die Eisprismen nötig sei, daß die Eisprismen in der Minimumstellung der Ablenkung sich befinden. Bravais bemerkt dagegen mit Recht, daß auch bei anderen Stellungen die Strahlen wirksam sind, und nennt diese Wirksamkeit[2] »efficacité par dispersion conique«. Er unterscheidet daher sehr zutreffend eine zweifache Wirksamkeit der Strahlen, die Wirksamkeit durch die Minimalablenkung und die Wirksamkeit durch konische Dispersion. Allein diese beiden Fälle von Wirksamkeit der durch Eisprismen hindurchgegangenen Strahlen sind von sehr verschiedener Intensität. Die Wirksamkeit durch konische Dispersion kommt allen Strahlen zu, die durch das Eisprisma noch hindurchgehen können; die Dispersion heißt konisch, weil die am Himmel gleiche Fluchtpunkte besitzenden Achsen der Eisprismen gleich orientiert sind und so die Achse eines Kegels durch diese gemeinsame Orientierungslinie gebildet erscheint und die durchgehenden Sonnenstrahlen am Umfange der Basis dieses Kegels eine Lichterscheinung, eine Haloerscheinung, erzeugen müssen. Es wird von der Orientierung der Achsen der Eiskristalle einerseits und der Höhe der Sonne andrerseits abhängen, ob der Strahlendurchgang einem Minimum der Deviation entspricht oder aber nicht, stets aber wird die erzeugte Haloerscheinung der Wirksamkeit durch konische Dispersion entsprechen, auch bei der Minimalablenkung.

Die durch Minimalablenkung entstandenen Haloerscheinungen werden daher die Wirksamkeit ihrer Strahlen gleichzeitig der konischen Dispersion und der Minimalablenkung verdanken.

Da somit die konische Dispersion stets mitwirkt, wird die größere oder geringere Intensität der Erscheinung davon abhängen, ob diese konische Dispersion näher oder ferner von der Minimumablenkung stattfindet, und sie wird am größten

---

[1] Pogg. Ann., Bd. 49, p. 22 und 243, sowie p. 264.

[2] Sur les Halos, p. 94, insbesonders p. 23.

sein bei vorhandener Minimumablenkung der die Haloerscheinung erzeugenden Strahlen.

Was den Unterschied der Intensität der wirksamen Strahlen in der Minimumablenkung und außerhalb derselben betrifft, so ist er in der Physik allbekannt; es möge aber Bravais selbst zum Worte kommen; er sagt:[1]

»Mais l'éclairement est très différent vers ces deux limites: à la première correspond un minimum de deviation dans l'acception analytique de ce terme; de là une grande accumulation de clarté vers ce point. Rien de semblable n'a lieu vers l'autre limite et l'éclairement diminue rapidement à mesure que l'on s'en rapproche. Si l'on part de la position qui donne la déviation minimum et si l'on fait tourner le prisme de degré en degré .... jusqu'à ce que le rayon immergent se confonde avec la face d'entrée, on obtiendra pendant cette rotation .... une série de rayons émergents dont la divergence va rapidement en croissant, en s'approchant à la seconde limite, ce qui atténuera l'éclairement correspondant. En outre, sous les incidences très obliques, la lumière réflechie augmentant dans une forte proportion, l'image par refraction éprouvera un affaiblissement dans son intensité.«

Er fährt dann mit Bezug auf die Nebensonnen von 22° fort:

»Il y aura donc à droite et à gauche du soleil deux lignes lumineuses horizontales s'étendants depuis les points situés à 21° 50′ de distance de l'astre, ou l'éclairement sera très intense, jusqu'à 43° 28′, ou l'éclairement cessera par des degrés insensibles. La partie brillante la plus voisine du soleil et correspondante au maximum de clarté, est le parhélie proprement dit; le prolongement lumineux opposé au soleil, est la queue du parhélie. L'efficacité du parhélie proprement dit est due aux deux causes réunies de la dispersion conique et du minimum de déviation.«

So ist also auch nach Bravais' eigener Auffassung, der er übrigens auch sonst im Laufe seiner Schriften Ausdruck gibt, die Minimalablenkung notwendig, um den größten Glanz

[1] Sur les Halos, p. 26.

bei einer Erscheinung zu erzielen. Ich setze zur Exemplifizierung gerade bei den Nebensonnen von 22° an. Der Glanz der Nebensonne nimmt schon sehr nahe nebenan im Schweif sehr rasch ab und 2° außerhalb der Nebensonne, d. h. 24 bis 25° von der Sonne ist der Glanz derart gedämpft, daß ihn das Auge ohne Schutz vertragen kann. Im Schweife haben wir es mit den Strahlen außerhalb der Minimumablenkung zu tun und schon eine Abweichung von einigen Graden von dieser bringt eine so starke Schwächung mit sich. Sehen wir uns nun den Fall beim circumzenithalen Bogen von Bravais an. Nur bei der Sonnenhöhe von 22° 8′ gehen bei vertikaler Achse der säulenförmigen Prismen die Sonnenstrahlen im Minimum der Ablenkung durch die Eiskristalle und nur bei dieser Sonnenhöhe könnte also die Beschreibung zutreffen, daß der Bogen »die strahlendste aller Haloerscheinungen sei«; bei Sonnenhöhen, welche mehrere Grade größer oder kleiner sind als 22° 8′, muß dieser blendende Glanz verschwinden und um je mehr Grade die Sonnenhöhe von der genannten abweicht, um so mehr muß sein Glanz verblassen.

Dazu kommt, daß selbst bei 22° 8′ Sonnenhöhe nur die Mitte des Bogens, welche genau im Vertikal der Sonne liegt, bei dem circumzenithalen Bogen von Bravais die Intensität der Minimumablenkung haben und nur ein paar Grade links und rechts einigermaßen stark leuchten kann; die mehr als etwa 3° links und rechts von der Mitte befindlichen Stellen des Bogens müssen sicher ebenso an Intensität verloren haben wie die 3° von der Nebensonne abstehenden Partien des Schweifes derselben. Bei anderer als der günstigsten Sonnenhöhe wird schon die Mitte des Bogens an Intensität geschwächt sein, die links und rechts gelegenen Partien aber schon in der Nähe der Mitte des Bogens rasch, ja rapid an Leuchtkraft verlieren, so daß sie niemals der Beschreibung des herrlichen Glanzes des oberen Berührungsbogens, der »brillantesten aller Haloerscheinungen«, gerecht werden können.

Gilt dies von der Intensität, dem Glanze, der Pracht der ganzen Erscheinung, so gilt es auch von den einzelnen Farben, d. h. dem Leuchten und der Kraft dieser Farben, aus demselben Grund. Aber auch bezüglich der Reinheit der Farben

wird eine Verwaschung eintreten, wenn die Erscheinung nicht durch Minimumablenkungen entstanden ist. Dies ist jedem bekannt, der das Sonnenspektrum durch ein Prisma öfter entworfen hat; man erkennt das Einspielen des Prismas in die Minimumstellung nicht nur an dem Kürzerwerden des Spektrums, sondern auch an der Reinheit und dem Glanze der Farben.

Die begeisterte Beschreibung über den Glanz und das Leuchten »reiner Regenbogenfarben« trifft nicht zu für die Farben eines Bogens, der nicht durch Minimumablenkungen entstanden ist. Besonders bei einer ausgedehnten Lichtquelle ist die Überlagerung der Farben bei anderen als Minimumablenkungen außerordentlich groß und zerstört durch Farbenmischung sehr stark die Reinheit und Schönheit der Farben. Wir werden unten an den Beobachtungen zeigen, daß auch bei Sonnenhöhen, die stark von der für die Bravais'schen Circumzenithalbögen günstigsten Sonnenhöhe abweichen, die beobachteten Bögen als herrlich leuchtend in Glanz und Farbe beschrieben werden.

Es ist jedoch beim Glanze und der Intensität der Erscheinung wohl zu beachten, daß dieser Glanz aus verschiedenen Ursachen stark vermindert und tief herabgesetzt werden und daher nicht nur fehlen kann, weil die erzeugenden Eisprismen nicht in der Minimumstellung sich befinden, sondern auch dann, wenn diese maßgebende Bedingung für das Auftreten eines besonderen Glanzes erfüllt ist.

Wir wissen, daß die Nebensonnen von 22°, welche diese Bedingung stets erfüllen, oft schwach glänzend und fast farblos auftreten. Ursachen hiefür gibt es mehrere, z. B. vorgelagertes Zirrusgewölk mit anders orientierten Eisprismen, geringe Anzahl günstig orientierter Eisprismen in der erzeugenden Wolke, zwischen Sonne und Nebensonne eingeschobene nicht wirksame Wolken und vielleicht noch andere. Das Fehlen des Glanzes ist daher auch kein Beweis dafür, daß die Erscheinung nicht durch Eisprismen in der Minimumstellung erzeugt wurde. Aber das Vorhandensein des bewunderten Glanzes ist zweifellos ein positives Zeichen für das Ent-

stehen der Erscheinung durch Eisprismen, die sich im Minimum der Ablenkung befinden.

Wir können nun an den Beobachtungen nachweisen, daß durch das wiederholte Vorkommen eines besonders auffallenden Farbenglanzes die Wirklichkeit des eigentlichen oberen Berührungsbogens des Halo von 46° festgestellt erscheint.

Allerdings ist dieses Kriterium nur für die Tatsächlichkeit des Berührungsbogens verwendbar, denn das Fehlen des ungewöhnlichen und auffallenden Glanzes beweist, wie wir gerade sahen, nicht, daß der Bogen nicht der Berührungsbogen ist. Man beachte ferner, daß auch für den Berührungsbogen der Beweis nur dann entscheidend ist, wenn die Sonnenhöhe nicht 22° 8′ ist oder in der Nähe dieses Wertes liegt; denn bei 22° 8′ sind auch für die Entstehungsweise des circumzenithalen Bogens die (vertikalen) Eisprismen im Minimum der Ablenkung für die einfallenden Sonnenstrahlen und wird es daher auch hiebei zu auffallendem Glanze der Erscheinung kommen können. Ich will daher die Sonnenhöhen von 19 bis 25° unberücksichtigt lassen.

Ich finde unter den von Bravais[1] mitgeteilten Beobachtungen folgende für unsere Frage entscheidende:

1. Beobachtung von Weidler am 31. Dezember 1735 bei einer Sonnenhöhe von 15° 30′. Der Bogen »glich einem schönen Regenbogen«.

2. Beobachtung eines Ungenannten in Kent vom 19. Dezember 1741 bei einer Sonnenhöhe von 15° 30′. »Der Bogen war sehr strahlend und von den lebhaftesten Farben«.

3. Beobachtung von Folkes vom 17. September 1737 bei einer Sonnenhöhe von 16° 30′. Man sah den Halo von 22° mit seinem oberen Berührungsbogen, den Halo von 46° mit seinem oberen Berührungsbogen, die Nebensonnen mit Schweifen; der obere Berührungsbogen des Halo von 46° »war die herrlichste Erscheinung unter allen«, also strahlender als die Nebensonnen, welche offenbar sehr schön auftraten, weil ihre Schweife sichtbar waren.

---

[1] Sur les Halos, p. 102 bis 108.

4. Beobachtung von Parry vom 29. März 1825; Sonnenhöhe 16° 36′. »Kurzes Segment farbenglänzend wie ein herrlicher Regenbogen.«

5. Beobachtung von Verdries vom 7. Februar 1742 (a. St.). Sonnenhöhe 17°. »Halonis segmentum iridis coloribus elegantibus et satis distinctis conspicuum.«

6. Beobachtung von Baxter vom 22. Jänner 1771 bei einer Sonnenhöhe von 18° 30′. Der Bogen wird als »sehr strahlend« bezeichnet.

7. Beobachtung von Hevel vom 20. Februar 1661 bei einer Sonnenhöhe von 25°. Der Berührungsbogen von 46° wird als sehr schön und sehr strahlend beschrieben.

8. Beobachtung von Hof's vom 21. Mai 1824 bei einer Sonnenhöhe von 25°. »Die Farben des Bogens strahlten in außerordentlichem Glanze.«

Bravais führt noch für die Sonnenhöhen von 19 bis 25° neun Beobachtungen an, welche diesen Bogen mit besonderem Glanze und Schönheit der Farben ausgestattet beschreiben, doch ich führe dieselben nicht ausführlich an, weil man doch auch in der Theorie Bravais' bei diesen Sonnenhöhen einen größeren Glanz der Erscheinung, besonders bei solchen von 22 bis 24°, erwarten kann.

In Bezug auf den circumzenithalen Bogen von Bravais läßt sich dieses Kriterium nicht zu direkter Beweisführung für seine Tatsächlichkeit benützen, denn wir sahen, daß das Fehlen der besonderen Leuchtkraft und Farbenpracht durch Ursachen bewirkt werden kann, welche auch den eigentlichen Berührungsbogen des strahlenden Glanzes berauben. Wohl aber mag erwähnt sein, daß die Bögen, welche zweifellos circumzenithale Bögen waren, von ihren Beobachtern nicht als farbenprächtig und strahlend beschrieben werden; Ekama macht überhaupt keine Bemerkung hierüber und auch Besson hebt nirgends die ungewöhnliche Schönheit und den besonderen Glanz des Bogens hervor. Die Beobachtungen ergeben daher, daß die vorhandenen Beschreibungen dem aufgestellten Kriterium bestens entsprechen und die Wirklichkeit der eigentlichen Berührungsbögen bekräftigen.

4. Die Orientierung der Eiskristalle in der Luft.

Die Verschiedenheit der Auffassungen bezüglich der Entstehung dieser Bögen bei Galle und Bravais ist wohl beiderseits auf Vorstellungen zurückzuführen, die nicht als allgemein gültig sich erweisen, von ihnen aber als exklusiv richtige angesehen werden. Daß die Voraussetzung von Galle, zur Wirksamkeit der durch die Eisprismen durchgehenden Strahlen sei es absolut notwendig, daß sie im Minimum der Ablenkung ein- und austreten, nicht exklusiv richtig ist, hat Bravais, wie wir oben sahen, erkannt und hervorgehoben. Es ergibt sich hieraus, daß der eigentliche Berührungsbogen nicht der allein mögliche ist und die Beobachtung hat gezeigt, daß er nicht der allein tatsächlich vorkommende ist. Es ist sicherlich ein großes Verdienst Bravais', dies gegenüber der Theorie von Galle gezeigt zu haben, wie es sein Verdienst ist, auch die Theorie der Entstehung eines anderen, des circumzenithalen Bogens, gegeben zu haben, dessen wirkliches Vorkommen spätere Beobachtungen nun bewiesen haben. Aber Bravais ist andrerseits in denselben Fehler verfallen wie Galle, indem er auch nur eine Möglichkeit der Bildung eines Bogens durch Eisprismen von 90° brechendem Winkel in dem großen Sonnenabstand von 46° und darüber zugab, also wieder exklusiv nur Bildung solcher Bögen nach seiner Theorie für möglich hielt. Darin ist er offenbar fehlgegangen, wie wir wohl schon aus den Beobachtungen gezeigt haben, wie wir aber auch aus allgemeinen Gesichtspunkten der natürlichen Orientierung und der Art des Schwebens der Eiskristalle in der Luft ganz evident zu machen in der Lage sind.

Bravais hatte die Horizontalität des »oberen Berührungsbogens des Halo von 46°« derart streng aufgefaßt, daß er bei dem Versuche, diese zu erklären, alles andere und selbst die Pracht der Farben und den Glanz der Erscheinung in den Hintergrund stellen zu müssen glaubte. Die Horizontalität konnte er in außerordentlich geistreicher Weise erklären, allein nur unter der Annahme, daß die Eisprismen exakt senkrecht in der Schwerlinie schweben, ohne Pendeln der Achsen senkrecht auf diese, aber Drehungen der Kristalle um die

vertikalen Achsen nicht ausschließend. Es ist wahr, daß ein leichtes, sehr schwaches Pendeln mit ganz kleinen Ausschlägen von nur 1 bis 3° aus der Vertikalen zwar die Horizontalität der Erscheinung beeinträchtigt, aber immerhin nur so wenig, daß die Abweichung nicht wohl wahrnehmbar sein wird. Bravais nimmt denn auch an, daß solches leichtes Pendeln häufig auftrete. Das ist sicherlich schon ein Abgehen von der strengen Exaktheit des gewählten Erklärungsprinzipes, das ja von ihm gerade gegen die von Galle angenommene Grundlage der Erklärung der Erscheinung durch Pendeln der Eisprismen aufgestellt worden ist. Das Wesen des Prinzipes, die konstant strenge Horizontalität der Basisflächen der Eisprismen und damit des zu erklärenden Bogens ist damit fallen gelassen und man wird schwer tun, nur den größeren Grad des Pendelns, der manchmal bei der Erklärung der Erscheinung nach Galle angenommen werden muß, abzulehnen, wenn man einmal das Pendeln mit kleinen Ausschlägen angenommen hat. Die Wirklichkeit des Pendelns der vertikalen Eisprismen ist unbezweifelbar; wir kennen eine Erscheinung, bei deren Erklärung Galle[1] und Bravais[2] übereinstimmend das Pendeln der vertikalen Eisprismen zu Grunde legen. Ich habe,[3] darauf fußend, diese Erscheinung so vollkommen erklären können, daß kein unklarer Rest mehr dabei übrig bleibt. Nach dieser Erklärung ist es eine unbezweifelbare Tatsache, daß beim St. Petersburger Phänomen von Lowitz die schiefen Bögen bei einer Sonnenhöhe von 31° beweisen, daß die Eisprismen mit einem Ausschlage von wenigstens 15° pendelten. Besson macht in einem Briefe an mich besonders auch darauf aufmerksam, daß kleinere Ausschläge, als zur vollen Ausbildung der schiefen Bögen bei einer gegebenen Sonnenhöhe notwendig sind, häufig dadurch sich kundgeben, daß die Nebensonnen schief nach unten ausgezogen erscheinen. Aber Bravais selbst nimmt ja bei verschiedenen Haloerscheinungen dieses Pendeln der vertikalen Eisprismen an, in erster Linie, wie wir sahen, bei den schiefen Bögen von Lowitz, dann noch ganz besonders zur Erklärung der Lichtsäulen. Aber selbst bei der in

[1] Pogg. Ann., l. c., Bd. 49, p. 274.

[2] Sur les halos, p. 47. Sur les parhélies, p. 84.

[3] Meteorol. Optik, p. 322.

Frage stehenden Erscheinung des oberen Berührungsbogens, beziehungsweise des circumzenithalen Bogens des Halo von 46° sieht er sich wiederholt gezwungen, zur Erklärung bestimmter Beobachtungen zum Pendeln der Eisprismen seine Zuflucht zu nehmen. Besonders entscheidend für unsere Frage ist, was Bravais bezüglich der Beobachtung von Weidler (siehe oben p. 30) sagt: »Il est très probable que les prismes avaient des balancements très-étendus autour de la verticale, et que l'arc devait être tangent au lieu géométrique qu'aurait occupé le halo de 46 degrés, s'il ait été visible.« Damit gibt aber doch Bravais selbst zu, daß der eigentliche Berührungsbogen nach der Theorie von Galle ebenfalls in Erscheinung treten kann, ja im Falle Weidler tatsächlich in Erscheinung getreten ist.

Bei der Besprechung der Beobachtung von Lowitz (siehe oben p. 31) sagt er bezüglich der Sonnenhöhe von 31°, die er richtig als die zur Zeit der Beobachtung anzunehmende bezeichnet: »Cette hauteur est très considérable; mais la présence des arcs de jonction des parhélies au halo nous à déjà prouvé l'existence de balancements étendus des axes verticaux: il n'est donc pas étonnant que l'arc ait paru tangent au halo de 46 degrés.«

Er sagt dann, daß der Ausschlag bei dieser Beobachtung 5 bis 6° betragen haben müsse. Wir haben gesehen, daß aus den schiefen Bögen von Lowitz ein solcher von jedenfalls 15° nachweisbar ist. Bravais' Bestreben geht auch da noch immer darauf aus, möglichst geringe Pendelausschläge anzunehmen, was gewiß zum Teil gerechtfertigt ist. Es zeigt sich aber, daß größere Ausschläge vorkommen, wie in der Beobachtung von Lowitz, und wir werden gleich sehen, daß solche größere Ausschläge in der Natur der Sache gelegen sind und daher gewiß öfters vorkommen. Ein prinzipielles Hindernis für die Auffassung Galle's ist nicht vorhanden, wenn man einmal das Pendeln zugibt, und ob dasselbe 6 oder 15° Ausschlag erheischt für die Erklärung des eigentlichen Berührungsbogens, fällt begrifflich nicht mehr ins Gewicht.

Bleiben wir aber bei dem größten nachgewiesenen Ausschlag von 15 bis 16° als Maximum, so sind die eigentlichen

Berührungsbögen möglich bis zu Sonnenhöhen von 37° (22° 8′ + 15°) einerseits und 7° (22° 8′—15°) andrerseits. Bei einem Ausschlage von 6° wird der eigentliche Berührungsbogen möglich sein zwischen den Sonnenhöhen von 16° und 28°. Es ergibt sich also schon aus den Beobachtungen selbst die Möglichkeit der Bildung des eigentlichen Berührungsbogens des Halo von 46° und die Notwendigkeit, ein beträchtliches Pendeln der Eisprismen mit vertikaler Hauptachse anzunehmen.

Es ergibt sich endlich daraus, daß die Orientierung der Eisnadeln unter dem Einflusse der Schwere erfolgt, daß die Eisprismen mit Hauptachsen, die länger sind als die Nebenachsen, beim Streben, im Fallen sich so zu stellen, daß sie den kleinsten Widerstand erfahren, notgedrungen ins Pendeln geraten müssen. Dieses Pendeln wird allerdings am geringsten sein bei den flaschenförmigen Kristallen, aber beträchtlicher bei den reinen säulenförmigen Prismen. Die flaschenförmigen Kristalle, d. h. die Eisprismen mit Pyramidenaufsatz an nur einer Basisfläche, werden, die Pyramidenspitze voraus, fallen und erhalten hiedurch eine größere Stabilität der Hauptachse und werden am geeignetsten sein für die Herstellung der Bedingungen zur Bildung der circumzenithalen Bögen.[1] Die reinen Prismen aber, die wenigstens ebenso häufig, wahrscheinlich häufiger vorkommen als die flaschenförmigen Kristalle, werden bei ihrem Bestreben, die Längsachse in die Schwerlinie zu stellen, größere Pendelausschläge während des Fallens dauernd ausführen müssen und es ist gewiß, daß die oben als tatsächlich vorkommend erwiesenen Ausschläge von 15 bis 16° für reine

[1] Dem schon in meiner Meteorol. Optik durchgeführten Grundsatze treu, muß ich auf das entschiedenste mich ablehnend verhalten gegen Annahmen von Bildungen von Kristallen, welche bei den nun so reichlich gebotenen photographischen Bildern der Eiskristalle entweder ganz fehlen oder nur äußerste Seltenheiten darstellen. Was nicht massenhaft vorkommt, kann nie so viel Lichtintensität hervorrufen, daß eine sichtbare, geschweige denn eine lichtstarke Haloerscheinung erzeugt werde. Bravais lagen die so zahlreichen Mikrophotographien der Eiskristalle noch nicht vor und so ist zu erklären, daß er sich gewisse Formen bildete, die in der Natur gar nicht oder nur ausnahmsweise vorkommen. Heute ist es nicht mehr erlaubt, solche Formen zur Erklärung von Erscheinungen zu verwenden. Das gilt hier von Prismen mit Eisansätzen an den Enden der kurzen Achsen an einer Basisfläche und ähnliches.

säulenförmige Prismen ohne Pyramidenaufsatz schon a priori anzunehmen sind.

Wenn nun aber nach alldem feststeht, daß das Pendeln der säulenförmigen und flaschenförmigen Eisprismen theoretisch und tatsächlich außer Zweifel steht und es ebenso sicher ist, daß wenigstens für Sonnenhöhen, sagen wir, von 10° bis 30° genügend große Ausschläge bei der Pendelbewegung der Hauptachse der Kristalle theoretisch möglich sind und tatsächlich vorkommen, welche für das Einspielen der Eisprismen in die Minimumablenkung der Strahlen nötig sind und dadurch für die Bildung des eigentlichen Berührungsbogens des Halo von 46° hinreichen, so kann man auch über das tatsächliche Vorkommen dieser Berührungsbögen nicht länger im Zweifel sein: sie müssen mit Naturnotwendigkeit sich bilden, sobald die objektiven Bedingungen ihrer Bildung vorhanden sind.

Aus den bisherigen Auseinandersetzungen ergibt sich, daß die Theorie die Möglichkeit beider Bögen, des eigentlichen Berührungsbogens des Halo von 46° und des ihm entsprechenden circumzenithalen Bogens, nachweist und daß die Beobachtungen das tatsächliche Vorkommen des einen wie des anderen Bogens ergeben. Aus den theoretischen Betrachtungen über die Formen und das Schweben der diese Bögen verursachenden Eiskristalle kommt man zu der Schlußfolgerung, daß säulenförmige reine Eisprismen ohne Pyramidenaufsatz auf einer der Basisflächen der Prismen, infolge der größeren Schwankungen, die ihre Achsen beim Fallen ausführen müssen, die Bedingungen für die Bildung des eigentlichen Berührungsbogens am leichtesten liefern werden, während die flaschenförmigen Kristalle, also Eisprismen mit Pyramidenaufsatz an nur einer der Basisflächen, beim Fallen die Pyramidenspitze nach unten stellen und dadurch eine stabilere Lage der Hauptachse erzielen werden und so leichter die Bedingungen für die Bildung des circumzenithalen Bogens erfüllen werden; sehr kleine Pendelausschläge (1° bis 2°), besonders bei sehr großen (28° bis 32°) oder sehr kleinen (unter 10°) Sonnenhöhen, werden nur eine Verbreiterung des Bogens nach unten bewirken. Größere Ausschläge, die aber nicht hinreichen zur Erzeugung des eigentlichen Berührungsbogens, werden starke Ver-

waschungen der Farben erzeugen und auch der Horizontalität Eintrag tun. Niemals aber kann der circumzenithale Bogen, wenigstens nicht bei Sonnenhöhen von 25° und darüber oder von 19° und darunter, in der vollen, so sehr angestaunten Pracht des eigentlichen Berührungsbogens auftreten.

Der schlagendste Beweis für unseren Satz der Wirklichkeit beider Bögen wäre zweifellos das gleichzeitige Erscheinen beider Bögen. Theoretisch muß dasselbe möglich sein, praktisch liegt aber die Sache nicht günstig für die gleichzeitige Sichtbarkeit. Bei Sonnenhöhen von 18° bis 25° würden beide Bögen wohl noch immer als ein einziger erscheinen und doch wären wegen der kleinen Pendelausschläge, die hier genügen, den eigentlichen Berührungsbogen zu bilden, die Bedingungen für die gleichzeitige Bildung des circumzenithalen Bogens am günstigsten, da bei kleinen Ausschlägen am ehesten gleichzeitig eine genügende Anzahl Prismen mit der Hauptachse streng vertikal stehen könnte. Bei Sonnenhöhen über 25° und unter 18° wird wohl immer nur entweder der eine oder der andere der beiden Bögen sich bilden können, wenigstens normalerweise. Ich könnte mir freilich den gewiß sehr unwahrscheinlichen Fall als Ausnahme denken, wenn gleichzeitig in der erzeugenden Eiswolke reine säulenförmige Eisprismen und flaschenförmige Kristalle in ziemlich gleicher Anzahl und beide sehr zahlreich vorhanden wären, die ersteren mit genügend großen Ausschlägen des Pendelns, um den eigentlichen Berührungsbogen zu bilden, die anderen mit keinen oder zu vernachlässigenden kleinen Ausschlägen, um den circumzenithalen Bogen zu erzeugen. Die absolute Unmöglichkeit wird man nicht behaupten können, aber die äußerste Unwahrscheinlichkeit liegt vor und hat ihre Stütze darin, daß gleichzeitig wohl ausnahmslos nur eine Form der Kristalle einer bestimmten Gruppe in großer Menge, abweichende Formen aber nur sporadisch eingestreut vorzukommen scheinen.

Über das Ohm'sche Gesetz und die Elektronentheorie

von

Ernst Lecher,

k. M. k. Akad.

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Deutschen Universität in Prag.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 10. Jänner 1907.)

Die folgenden Versuche sind durch einen Ausspruch von W. Weber veranlaßt, der wohl als Erster genauer präzisierte Vorstellungen über elektrische Leitung in Metallen vom Standpunkte einer Elektrizitätsatomistik aus lieferte.[1] W. Weber meint, daß die den Strom darstellende Bewegung elektrischer Teilchen vielleicht Abweichungen vom Ohm'schen Gesetz bewirken könne, »daß die Stromintensität mit der elektromotorischen Kraft nicht immer gleichmäßig fortwächst, sondern sich endlich einem bestimmten Grenzwerte nähert, den sie nicht überschreitet«. Dieser Grenzwert würde erreicht sein, wenn einmal alle Elektrizitätsteilchen zur Leitung herangezogen werden. »Es würden hienach Versuche mit sehr großen und kleinen elektromotorischen Kräften im nämlichen Leiter, um zu entscheiden, ob die Intensitäten der von ihnen erzeugten Ströme ihnen immer proportional seien, von größter Wichtigkeit sein.« Maxwell[2] diskutiert diese Äußerung Weber's und erwähnt ebenso Experimente von Schuster, welcher eher eine Abweichung im entgegengesetzten Sinne argwöhnt, wonach

[1] W. Weber, Pogg. Ann., *156*, p. 49 (1875).

[2] Maxwell, Scientific Papers, II, p. 533 (1890).

der Widerstand für starke Ströme kleiner wäre als für schwache. Die British Association nahm deshalb zur Prüfung des Ohmschen Gesetzes diesbezügliche Versuche vor, welche G. Chrystall nach einem Plane von Maxwell mit größter Umsicht ausführte. Nach dieser Arbeit ändert sich der Widerstand eines Metalldrahtes nicht um den 10^{12}ten Teil, wenn der Strom von ganz kleinen Größen bis 1 Ampère pro Quadratzentimeter ansteigt.[1]

Das sind aber immer noch verschwindende Stromdichten. Für größere Stromstärken liegen nur ungenaue Messungen vor.

Bucknell[2] gibt an, daß zwei Platin-Iridiumdrähte von 0·0076 *cm* Durchmesser und etwa 3 *m* Länge beim Erhitzen zur hellen Weißglut gerade vor dem Schmelzen durch einen Gasofen etwa 40, beim Erhitzen durch den Strom selbst aber nur etwa 34 Ohm Widerstand hatten.

W. Kohlrausch[3] konnte hingegen einen spezifischen Einfluß des erwärmenden Stromes auf den Widerstand der untersuchten Drähte nicht konstatieren. Kohlrausch untersuchte in einer längeren Arbeit den Zusammenhang zwischen Magnetisierbarkeit und elektrischem Leitvermögen von verschiedenen Eisensorten und Nickel, und er legte sich da auch die Frage vor, ob der Strom nicht infolge der Zirkularmagnetisierung im Eisen verschiedenen Widerstand finde, je nachdem die Temperaturerhöhung durch Joule'sche Wärme oder aber durch Heizung von außen erzeugt wird. Neben Eisen untersuchte Kohlrausch diesbezüglich auch Platin. Diese Frage behandelt Kohlrausch aber nur nebenbei und er selbst nennt seine Methode nur eine ungefähre, so daß die Resultate nur auf einige Prozente genau erscheinen.

Die im folgenden angewandte Methode ist mit der von Kohlrausch identisch; nur sind eine Reihe von Fehlerquellen vermieden; überdies habe ich den Strom in einer Versuchsreihe von $^1/_3$ bis 20 Ampère gesteigert, während Kohlrausch nur

---

[1] Rep. Brit. Assoc., 1876. Mir nur zugänglich im Referate: Fortschritte für 1878, p. 747, und Beibl. der Ann. der Physik, II, p. 267.

[2] J. of the Soc. Telgr. Engin., 1876, p. 327. Diese Arbeit ist mir nur bekannt durch das Referat in dem Lehrbuch der Elektrizität von G. Wiedemann, I, p. 494 (1893).

[3] W. Kohlrausch, Wied. Ann., *33*, p. 54 (1888).

zwischen den Grenzen 1 und 10 Ampère arbeitete. In einer zweiten Versuchsreihe konnte ich die Stromdichte noch viel weiter erhöhen.

Versuche mit Platindraht.

Ein solcher Draht wurde durch Gasflammen bis zur Weißglut erhitzt, wobei man seine Ausdehnung genau bestimmte. In diesem Zustande wurde der elektrische Widerstand mittels eines schwachen Stromes (von etwa $^1/_8$ Ampère) gemessen. Dann

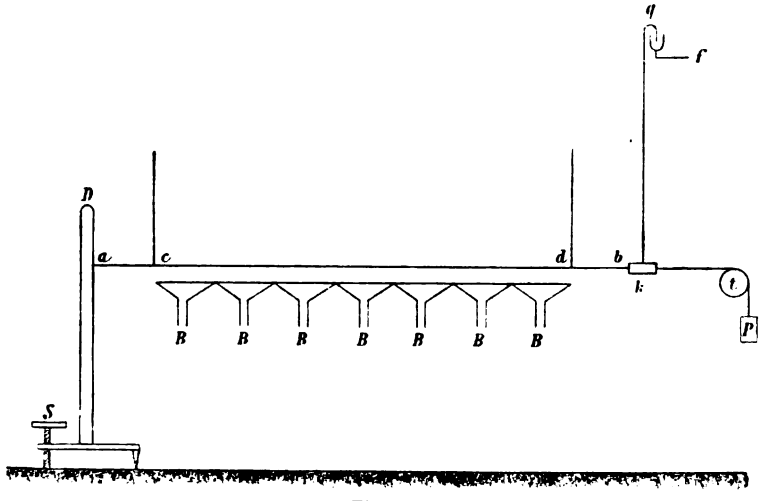


Fig. 1.

wurde derselbe Draht durch einen Strom von etwa 30 Ampère so stark erhitzt, daß er genau dieselbe Länge zeigte wie früher und es wurde jetzt der elektrische Widerstand mittels dieser 30 Ampère gemessen.

Der untersuchte Platindraht *ab* in Fig. 1 hat eine Länge von 90 *cm* und einen Durchmesser von 1 *mm*. Je 10 *cm* von den Enden in *c* und *d* ist ein dünner Platindraht von $^1/_2$ *mm* Durchmesser angenietet. Der Hauptdraht *ab* ist horizontal gespannt und die dünnen Drähte von *c* und *d* führen senkrecht zu *ab* und unter etwa 45° gegen die Horizontalebene geneigt nach aufwärts. Es wird der Widerstand der Horizontalstrecke *cd* gemessen. Unter dem Drahte befinden sich sieben Teklu-Brenner (*B*) mit spaltförmigem Aufsatz, und es sind diese Spalten so gestellt,

daß sie möglichst enge sich berühren und alle Spaltöffnungen in einer geraden, horizontalen Linie genau vertikal unter dem Drahte und diesem parallel verlaufen. Das eine Ende des Drahtes *a* ist an einem Dreifußstativ *D* befestigt, das so aufgestellt ist, daß man die Neigung des Stativs gegen den Draht zu mittels der Stellschraube *S* bequem ändern kann. Das andere Ende des Drahtes *b* führt zu einer Klemmschraube *k*, die an einem etwa 80 *cm* langen, dicken Drahte hängt (dieser Draht ist in der Figur zu kurz gezeichnet). Derselbe geht oben gabelförmig auseinander und seine zwei umgebogenen, oberen spitzen Enden hängen in zwei Quecksilbernäpfchen *q* (in der Zeichnung ist der Übersichtlichkeit wegen nur eines dieser Näpfchen gezeichnet). Die zwei Näpfchen ermöglichen ein genaues Hin- und Herpendeln der Klemmschraube *k* in der Richtung *ab*. Von dieser Klemmschraube führt dann ein Seidenfaden über eine fixe Rolle *R* zu einem Gewichte *P*. Dieses Gewicht ist so groß, daß es den glühenden Faden gerade spannt, ohne eine dauernde Verlängerung zu verursachen.

Der ganze Draht ist nach beiden Seiten hin durch Asbestpappendeckel und Glasschirme gegen Luftströmungen geschützt. Zunächst werden die sieben Brenner so angezündet, daß der Draht gleichmäßig hell glüht. Diese Glut erstreckt sich über die zu messende Strecke hinaus etwa 2 *cm* von *c* gegen *a* und von *d* gegen *b*.

Vor *c* steht in einer Entfernung von etwa 25 *cm* und in gleicher Höhe mit dem Draht ein Fernrohr und es wird mittels der Schraube *S* der Punkt *c* genau auf das Fadenkreuz eingestellt. Dieses Fernrohr selbst bleibt während der ganzen Versuchsreihe fix. Vor *d* steht ein Theodolit. Das Fernrohr desselben ist in gleicher Höhe mit dem Drahte und das Objekt ungefähr 25 *cm* von *d* entfernt.

An diesem Theodoliten ist ein Fühlhebel mit einer Spiegelvorrichtung befestigt. Die Winkeldrehung dieses Spiegels ist etwa zehnmal so groß als die des Theodoliten. Man stellt das Theodolitenfernrohr mittels Mikrometerschrauben auf den Punkt *d* ein. Diese Einstellung von *d* und *c* kann bei der hellen Glut der Drähte und der starken Vergrößerung der Fernrohre

sehr genau geschehen; die Drehung des Spiegels wird dann mittels Fernrohrs in einer 3 *m* entfernten Skala abgelesen. Die Verlängerungen des Drahtes lassen sich so sehr scharf, wenn auch nicht ihrem absoluten Betrage nach, bestimmen. Die Grenze dieser Genauigkeit liegt nur in der Schärfe der Einstellung der glühenden Punkte *c* und *d*.

Zur Bestimmung des Widerstandes wurde die Thomson-Methode nach folgendem Schema geändert (Fig. 2). Der Strom fließt von *f* (und die Quecksilbernäpfchen *q*) durch den Platindraht *bdca*, dann weiterhin durch einen Widerstand *R* über *e* zur Akkumulatorenbatterie zurück; *R* ist der Shunt eines Siemens'schen Normalgalvanometers (für 100 Ampère) mit

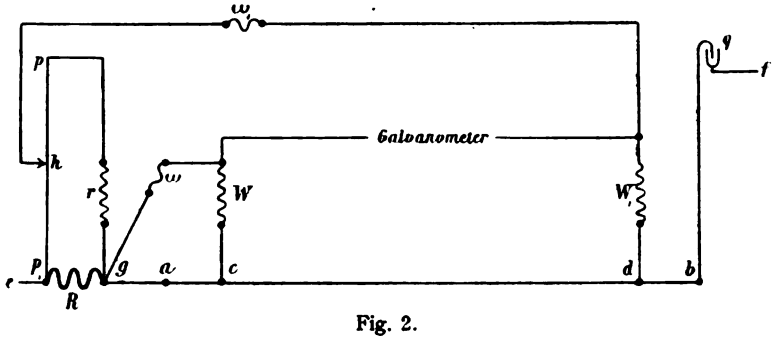


Fig. 2.

$^3/_{999}$ Ω und besteht aus einem gewellten, starken Bleche, das über 100 Ampère ohne Erwärmung verträgt, so daß die Erwärmung durch die 30 Ampère in vorliegenden Versuchen zu vernachlässigen ist.

Parallel mit *R* liegen in Serie ein Meßdraht pp_1 und ein Ruhstrat'scher Rheostat *r*; *h* ist ein Quecksilberkontakt, wie er bei den alten Poggendorf'schen Rheochorden in Verwendung kommt. Die Thomson'schen Brückenzweigleitungen sind *cWwg* und dW_1w_1h. Es sind *W* und W_1 Widerstände von etwa 10.000 Ω, hingegen sind *w* und w_1 nur Widerstände von etwa 1 Ω. Zwischen diesen beiden Widerständen liegt ein Drahtspulengalvanometer (Edelmann) von sehr großer Empfindlichkeit. Die große Ungleichheit der Widerstände *W* und W_1 war notwendig, weil der Vergleichswiderstand *R* so klein war, und dieser mußte so klein genommen werden, um Erwärmung (und Widerstandsänderung) bei 30 Ampère zu vermeiden.

Die Ausführung der Versuche geschieht nun in folgender Weise. Es werden zunächst die Brenner B (Fig. 1) angezündet, so daß der Draht hell glüht. Dann wird mittels der Stellschraube S der Punkt c in das Fadenkreuz des ersten fixen Fernrohres gebracht. Dann wird das Theodolitenfernrohr auf d eingestellt. Hierauf schickt man durch $f\,e$ einen Strom von $^1/_8$ Ampère und bringt durch passende Verlängerung des Meßdrahtes (Verschiebung des Quecksilberkontaktes h) das Galvanometer auf den Nullpunkt. Hierauf werden die Brenner abgelöscht und die Stellung des Spiegels an der Ableseskala gemessen. Man erhält so ein Maß für die Länge des glühenden Drahtes. Hierauf bringt man vor das Galvanometer G einen Shunt, welcher die Empfindlichkeit des Galvanometers auf den hundertsten Teil herunterdrückt. Dann leitet man durch $f e$ 30 Ampère, wodurch der ganze Draht $a\,b$ ins Glühen kommt. Man stellt nun wieder mit der Stellschraube S das c in das Fadenkreuz des ersten Fernrohres, wodurch der Anfangspunkt der zu messenden Länge $c\,d$ auf die alte Stelle im Raume kommt. Dann stellt man den Theodoliten auf den Punkt d und bringt dann durch Verschieben des h am Meßdrahte das Galvanometer zur Ruhe. Hat man die Stromstärke so gewählt, daß $c\,d$ jetzt infolge der Joule'schen Erwärmung dieselbe Länge hat wie früher bei der Erhitzung durch die Brenner, so liegt auch der Punkt h an derselben Stelle der Meßbrücke. Die einzelnen Resultate weichen in positiver und negativer Richtung um etwa $^1/_{10}\,\%$ voneinander ab.[1]

Die größte Schwierigkeit liegt natürlich im Erhitzen des Drahtes durch die Bunsen-Brenner. Aber auch die Messung der Verlängerung des glühenden Drahtes ist mit Fehlern behaftet, so daß man hier, außer man würde mit ganz besonders kostspieligen Mitteln arbeiten, nicht zu jener Genauigkeit kommen kann, die man für Widerstandsmessungen bei gewöhnlichen Zimmertemperaturen erreicht.

---

[1] Da die Anordnung nicht genau der Thomson'schen entspricht, mußte der Wert der Verschiebung h am Meßdrahte empirisch gefunden werden. Zu dem Zwecke wurde bei schwachem Strome statt des Platindrahtes $a\,b$ ein Stöpselrheostat eingeschaltet.

Des historischen Interesses wegen möchte ich einen möglichen Einwand erwähnen. Edlund glaubte an eine spezielle Ausdehnung eines stromdurchflossenen Drahtes; es sollen zwei Drähte von genau gleichen Temperaturen, von denen der eine stromdurchflossen ist und der andere nicht, verschiedene Länge zeigen. Die Unrichtigkeit dieser Behauptung ist durch Versuche von J. Exner dargetan. Die Methode von Exner[1] ist im Wesen dieselbe Methode, wie sie später von Kohlrausch und auch in vorliegender Arbeit angewendet wurde.

Versuche mit Silberdraht.

Nun erreicht man aber noch viel größere Stromdichten in einem künstlich gekühlten Silberdraht und ich habe diesbezüglich einige überraschende Versuche gemacht.

Klemmt man einen dünnen Silberdraht von etwa 3 bis 4 *cm* Länge zwischen zwei dicke Kupferklemmen und bringt das Ganze in ein Gefäß, das von einem kräftigen Strome der Wasserleitung (Temperatur 12°) durchflossen wird, so ist die Stromstärke, die so ein Draht zu tragen vermag, verblüffend.

Ich arbeitete zunächst mit einem Drahte, der den Durchmesser 0·09 *mm* hatte, den dünnsten Draht, den ich mit meinem gewöhnlichen Zieheisen herzustellen vermochte; ich konnte diesen Draht mit den stärksten mir zur Verfügung stehenden Stromstärken, zirka 50 Ampère, nicht durchschmelzen. Ein noch günstigeres Resultat erhält man der größeren Kühlung wegen mit einem Draht von 0·03 *mm* Durchmesser[2]. Hier tritt das Durchschmelzen bei zirka 10 Ampère ein, ja es gelang mir in einem Falle sogar 10·8 Ampère während etwa 1 Minute durch einen solchen Draht zu senden. Nimmt man noch kleinere Durchmesser, 0·02 *mm*, so wird das Resultat wieder etwas ungünstiger, weil diese dünnen Drähte durch die Wasserströmung leicht gerissen werden.

Die Stromdichte war also hier etwa 400mal so groß als im Platindraht, wenn dieser in Luft unmittelbar vor dem Durchschmelzen maximal belastet wird und es schien mir von vorn-

---

[1] J. Exner, Diese Berichte, LXXI, p. 761 bis 790 (1876).

[2] Geliefert von Hartmann & Brem, Bockenheim.

herein nicht absolut sicher, daß hier das Ohm'sche Gesetz noch gelte.[1]

Um dies zu prüfen, wurde ein solcher Silberdraht (Durchmesser 0·03 *cm*, Länge 3 *cm*) gleichzeitig mit einem Ampèremeter in den einen Zweig einer Wheatstone'schen Brücke gebracht. Im anderen Zweig wurde als Vergleichswiderstand ein dicker Konstantanwiderstand (Ruhstrat) verwendet. Zunächst wurde statt des Silberdrahtes ein Siemens'scher Stöpselrheostat eingeschaltet und für die Widerstände 0·4 bis 0·7 Ω jene Stellungen des an der Brücke verschieblichen Kontaktes bestimmt, für welche das Galvanometer keinen Ausschlag gab. Die hier verwendete Stromstärke betrug etwa 0·1 Ampère. Hierauf wurde an Stelle des Widerstandskastens der Silberdraht eingeschaltet und in einem Luftbade von 0 bis 150° erhitzt. Man erhielt so die Abhängigkeit des Widerstandes des Silberdrahtes von der Temperatur. Diese einfache Substitutionsmethode in der Wheatstone'schen Brücke wendete ich an, weil dadurch die Widerstände der Zuleitungsdrähte und des Ampèremeters eliminiert wurden.

Hierauf wurde der Silberdraht in strömendes Wasser gebracht und es wurden neuerlich Widerstandsbestimmungen mit größeren Stromstärken veranstaltet, wobei das Galvanometer durch einen Shunt weniger empfindlich gemacht wurde. Die Stromstärken, welche durch den Silberdraht gingen, stiegen hiebei allmählich. Wenn man die Stromstärke bis 8 und 9 Ampère steigerte, riß der Draht gewöhnlich. Da der Silberdraht und der Vergleichswiderstand zusammen im Maximum nur etwa 1 Ω hatte, der Brückendraht hingegen 3·4 Ω, so war die Belastung des letzteren nie so stark, daß eine störende Erwärmung eingetreten wäre. Es dauerte auch bei den größeren Stromstärken keine Messung länger als höchstens eine Minute.

---

[1] Versuche mit stärkerer Abkühlung bis etwa —100° C. mittels einer Mischung von fester Kohlensäure und Aceton, wobei der Draht selbst in gekühltem Alkohol oder Aceton oder direkt in der Kältemischung war, gaben keine günstigeren, sondern im Gegenteil minder auffallende Stromdichten. Es dürften hier wohl Leidenfrost'sche Erscheinungen stören.

Der Widerstand steigt mit der Stromstärke infolge der Erwärmung des Drahtes. Berechnen wir aus dieser Widerstandsänderung die Temperatur des Drahtes, so ist dieselbe auch im Momente des Durchschmelzens im Durchschnitt höchstens 130° C. Unmittelbar vor dem Durchschmelzen tritt ein eigentümlich singendes Geräusch auf infolge der aufsteigenden Dampfbläschen; ist dann die Dampfentwicklung an irgend einer Stelle so stark, daß die Wasserkühlung versagt, so wird an dieser kleinen Stelle die Temperatur bis zum Schmelzpunkt des Silbers ansteigen. Da aber der Gesamtwiderstand nur einer Temperatur von 130° C. entspricht, kann das nur eine ganz kleine Strecke sein.[1]

Genaue Messungen lassen sich hier natürlich nicht ausführen; jedenfalls aber kann man behaupten, daß innerhalb der Versuchsgrenzen die Erscheinungen dem Ohm'schen Gesetz nie widersprechen. Vor allem tritt sicher keine Widerstandsvermehrung ein, wie es die eingangs erwähnte Bemerkung von Weber argwöhnt.

Überlegungen vom Standpunkte der Elektronentheorie.

Mit diesen experimentellen Resultaten stimmt auch vollständig die Ausgestaltung der modernen Elektronentheorie. Hier wird der Einwand Weber's dadurch unmöglich, daß nach dieser neuen Anschauung die Anzahl der Elektronen (der Weber'schen Elektrizitätsteilchen) sehr groß genommen wird. Infolgedessen ist der Mechanismus auch bei der größten Stromdichte noch lange nicht an der Grenze der Erschöpfung angelangt. Wie zuletzt H. A. Lorentz[2] gezeigt, erhält man

---

[1] Eine andere merkwürdige Erscheinung ist folgende: Hat man bei einer solchen größeren Stromstärke das Galvanometer zur Ruhe gebracht, so tritt plötzlich eine scheinbare Verminderung des Widerstandes infolge des Stromdurchganges auf. Wahrscheinlich sind die Ursache dieser Erscheinung kleine Luftbläschen, die sich immer an den Draht anlegen. Beim Stromschluß bekommt daher der Draht zunächst eine höhere Temperatur und wenn diese Luftbläschen aufgestiegen sind, tritt eine Widerstandsverminderung infolge der besseren Wasserkühlung ein.

[2] H. A. Lorentz, K. Akad. v. Wetenschappen te Amsterdam, XIII, 27, p. 715 (1905).

ein vorläufig befriedigendes Bild für die Elektrizitätsleitung der Metalle durch die Annahme von ruhenden positiven Molekeln, zwischen denen eine einzige Art von beweglichen negativen Elektronen herumfliegt; letztere sind gegen erstere sehr klein. Die Potentialdifferenz längs der Stromleitung bewirkt eine beschleunigte Bewegung dieser Elektronen, die durch den Anprall an die festen Molekel sich in Joule'sche Wärme umsetzen. Setzen wir für diese stoßweise erfolgende gleichförmig beschleunigte Bewegung eine gleichförmige Bewegung ein, welche mit der Geschwindigkeit v fließend denselben Elektrizitätstransport zur Folge hätte, so haben wir die Gleichung

$$i = eNv.$$

Hier bedeutet i die elektrostatische Strommenge für den Querschnitt 1 cm^2, e die Ladung eines Elektrons und N die Anzahl der Elektronen pro Kubikzentimeter. Wir erhalten als Geschwindigkeit der Elektrizität

$$v = \frac{i}{eN}.$$

Es ist also diese Geschwindigkeit, wenn wir e und N konstant annehmen, unabhängig vom spezifischen Widerstand und proportional der Stromstärke. Die Ladung eines Elektrons wollen wir nach J. J. Thomson[1] gleich 6.10^{-10} elektrostatische Einheiten setzen. Die Anzahl der Elektronen pro Kubikzentimeter N wollen wir mit 10^{20} in Rechnung ziehen. Man muß zur Erklärung der thermoelektrischen Erscheinungen und des Thomson-Effektes annehmen, daß diese Zahl bei verschiedenen Metallen verschieden ist und überdies mit der Temperatur variiert. So schätzt z. B. H. A. Lorentz das Verhältnis von N für Wismut und Antimon bei gewöhnlicher Temperatur auf 3, und auch für die Abhängigkeit des N von der Temperatur werden wir vielleicht später nach genauerer Untersuchung des Thomson-Effektes klare Vorstellungen gewinnen.[2]

---

[1] J. J. Thomson, Phil. May. (5), 46, p. 528 (1898).

[2] H. A. Lorentz, l. c., p. 572.

Alle diese Einflüsse werden aber die Größenordnung 10^{20} nicht allzusehr berühren und wir haben es auch in folgenden Überlegungen nur mit einer ganz rohen Schätzung zu tun.

Wir hatten bei Platin bei einem Querschnitt von $0{\cdot}8\ mm^2$ 30 Ampère und bei Silber bei einem Querschnitte von $7{\cdot}10^{-4}\ mm^2$ 10 Ampère. Berechnen wir aus diesen Daten die Stromdichte in elektrostatischem Maße für einen Querschnitt von 1 cm^2 und setzen wir diese Zahl und die Werte von e und N in obige Gleichung ein, so erhalten wir für Platin

$$v = 1{\cdot}9.10^8\ cm/\text{sec.},$$

für Silber

$$v = 7{\cdot}2\ .\ 10^4\ cm/\text{sec.}$$

Zum Schluß wollen wir noch das v für einen Strom, wie er in der Telegraphie verwendet wird, schätzen. Wir haben hier etwa einen Draht von 5 mm Durchmesser und eine Stromstärke von $0{\cdot}01$ Ampère. Diese Daten geben uns in letzterem Falle

$$v = 2{\cdot}4.10^{-2}\ cm/\text{sec.}$$

In Wirklichkeit ist diese letztere Geschwindigkeit natürlich infolge von elektrostatischen Ladungen und anderen Störungen noch geringer.

Diese Betrachtungen zeigen, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Elektrizität, wenn wir sie nach dem Standpunkte der Elektronentheorie als Fluidum auffassen, eine ganz überraschend kleine ist. Sie zählt in den meisten praktischen Fällen nach Zentimetern pro Sekunde. Beim Telegraphieren ist diese Geschwindigkeit der Elektrizität nur ein kleiner Bruchteil eines Millimeters. Die Fortpflanzung der elektrischen Wirkungen aber, der elektromagnetischen Störungen, erfolgt selbstverständlich mit einer Geschwindigkeit von der Größenordnung der Lichtgeschwindigkeit.

Als Resultat dieser Studie ergibt sich:

Das Ohm'sche Gesetz gilt auch für die größten Stromdichten, die man in dünnsten Silberdrähten mit Wasserkühlung erreicht. Die Geschwindigkeit der Elektrizität in solchen Drähten kann nach der Elektronentheorie bis zu 70.000 *cm*/sec., in einem frei in Luft gespannten Platindraht bis zu 200 *cm*/sec. ansteigen.

Bahnbestimmung der Meteore vom 19. Jänner und 29. Juni 1905

von

Prof. **G. v. Niessl** in Brünn,

k. M. k. Akad.

(Vorgelegt in der Sitzung am 24. Jänner 1907.)

Das Jahr 1905 war reich an größeren Meteorerscheinungen, doch ist es in den meisten Fällen leider nicht gelungen, eine ausreichende Anzahl für die Bahnberechnung geeigneter Beobachtungen zu erlangen.

Von den beiden Erscheinungen, auf welche sich nachstehende Untersuchungen beziehen, war jene am 19. Jänner die minder glänzende. Sie war auch durch das noch herrschende Zwielicht in ihrer optischen Wirkung beeinträchtigt, und weil Sterne erst später sichtbar wurden, war auch die Bahnlage schwieriger zu fixieren.

Dennoch sind infolge eines durch die k. k. Wiener Universitäts-Sternwarte in einigen Tagesblättern veröffentlichten Aufrufes dort mehrere gute Beobachtungen eingelaufen, welche Herr Direktor Hofrat Prof. Dr. Edmund Weiss mir auch diesmal zu überlassen die Güte hatte.

Da dieses Meteor auch in Brünn beobachtet wurde, konnte ich selbst nach Angabe der Beobachter einige Messungen vornehmen. Überdies erhielt ich teils direkt, teils durch freundliche Vermittlung der Herren Ingenieur Hugo Meixner in Quellhütten, Bürgerschuldirektor Theodor Wranitzky in Trebitsch und Winterschuldirektor Paul Maresch in Schiltern brauchbare mährische Beobachtungen, welche durch die neuerlichen Bemühungen meines langjährigen werten Mitarbeiters, Herrn Prof. Dr. Eugen Reimann in Hirschberg, eine wichtige Ergänzung fanden.

Da der Endpunkt und auch fast der ganze sichtbar gewordene Bahnteil ziemlich weit entfernt von allen Beobachtungsorten über Ungarn, also gleichsam exzentrisch gelegen war, konnte die Genauigkeit der Schlußresultate nicht völlig der Güte der Beobachtungen entsprechen. Es mangelte eben an Beobachtungen aus Ungarn, ja sogar, ungeachtet des Aufrufes der Sternwarte, an solchen aus Wien, wo, wie es scheint, der Himmel auf der Ostseite bewölkt war. Auch aus Kalocsa erhielt ich auf eine Anfrage die Nachricht, daß völlige Bewölkung jede Beobachtung verhindert habe.

Das Meteor, welches am 29. Juni 1905 in späterer Nachtstunde über Kärnten und Salzburg bis über die Gegend östlich von München hingezogen ist, steht einigermaßen im Gegensatz zum vorigen. Es muß, nach den vielen ausdrucksvollen Schilderungen, eine sehr bedeutende Erscheinung gewesen sein. Die Möglichkeit der Bahnbestimmung für diesen wegen der weit südlichen Lage des Radiationspunktes und auch sonst sehr wichtigen Fall wurde mir indessen nur durch die besondere Liebenswürdigkeit des Herrn Prof. Dr. Max Toepler in Dresden erschlossen. Dieser hatte das Meteor zwar aus weiter Ferne, aber eben deshalb unter für die Bahnmarkierung zumeist sehr günstigen Umständen in der Nähe des Horizonts beobachtet und alles Nötige in sehr bestimmter Form durch Messungen festgelegt.

Herrn Direktor Dr. A. Brezina verdanke ich die Mitteilung zahlreicher Zeitungsnachrichten aus Nieder- und Oberösterreich, Salzburg und Tirol mit zumeist wohl nur ganz beiläufigen Angaben. Ein ungenannter freundlicher Förderer erfreute mich durch Einsendung van Zeitungsnotizen aus Beobachtungsorten in Bayern, welchen der Fallpunkt relativ nahe gelegen war. Diese Mitteilungen konnte ich später während eines Aufenthaltes in Reichenhall durch einige Feststellungen ergänzen.

Das so gesammelte reichliche Material war zwar von sehr ungleichem Wert; da aber die Beobachtungsorte, von Dresden bis an die südliche Grenze Kärntens und von Vorarlberg bis Mähren, über $4^1/_2$ Breiten- und nahezu $7^1/_2$ Längegrade, also auf einer Fläche von etwa 500 *km* Durchmesser auf allen Seiten der Bahn, und zwar in sehr verschiedenen Entfernungen, verteilt

sich befanden, war die Lage geometrisch und optisch sehr günstig. Obwohl nur wenige Angaben sich zur rechnerischen Benützung eigneten, ist doch die Sicherheit der Ergebnisse, namentlich in Bezug auf den Radianten und die Abschätzung der Geschwindigkeit, eine recht befriedigende.

Sehr ausgeprägt ist die Verschiedenartigkeit der optischen Eindrücke, welche die Mitteilungen aus nah und fern deutlich erkennen lassen. Man wird überhaupt bei Betrachtungen allgemeiner Natur die Feuerkugel vom 29. Juni 1905 in mancher Hinsicht als zutreffendes Beispiel benützen können.

In kosmischer Hinsicht konnten für beide Meteorerscheinungen mehrfache Beziehungen zu anderen Fällen hervorgehoben werden.

Schließlich sei noch allen hier und im folgenden Genannten für ihre freundliche Unterstützung und Mitwirkung wärmstens gedankt.

I. Meteor am 19. Jänner 1905.

Beobachtungen.

1. Hohenberg (33° 17′; 47° 54′). Um $5^h\,12^m$ abends[1] war hier durch 2^s eine ungefähr kindskopfgroße feurigrote Kugel mit etwa 4^m langem intensiven Lichtstreifen von NE nach E fallend auf dem Firmament sichtbar. Die Erscheinung verschwand in den Wolken und hinterließ einen kurz andauernden Lichtschein. (Österreichische Volkszeitung.)

2. Türnitz (33° 10′; 47° 55·5′). Der hochwürdige Herr Kooperator P. Candidus Sengstbratl berichtete noch am selben Tage an die Wiener Sternwarte: Heute um ungefähr $5^h\,15^m$ abends wurde ein Meteor gesehen, das, direkt vom hellleuchtenden Mond seinen Ausgang nehmend, nach Osten abfuhr und dort dann leider weiter nicht beobachtet werden konnte, da es im Gewölk verschwand. Es war intensiv lichthell und zog einen Lichtstreifen nach sich.

Für die Ermittlung des Radianten war nach der Sachlage die Wahrnehmung in Türnitz sehr wichtig, ja entscheidend,

[1] Das Datum 19. Jänner 1905 ist hier und im folgenden überall weggeblieben, um überflüssige Wiederholungen zu vermeiden.

nicht allein wegen ihrer bestimmten Beziehung auf den Mond, sondern auch deshalb, weil die übrigen Orte, aus welchen einigermaßen brauchbare Beobachtungen vorliegen, allzu gleichartig gegen die reelle Bahn und weit entfernt gruppiert sind. Da nun Bezeichnungen nach den Hauptweltgegenden gewöhnlich nicht ganz genau zu nehmen sind, war es mir darum zu tun, diese Unsicherheit hier möglichst einzuschränken.

Der Mond, in $\alpha = 6^h\,31{\cdot}7^m$ $\delta = 18°\,40'$, stand zur angegebenen Zeit in Türnitz $19{\cdot}8°$ hoch und $6{\cdot}4°$ nördlich vom Ostpunkt. Wenn also das Meteor vom Mond nach Ost abzufallen schien, so konnte die scheinbare Bahn nicht sehr viel (wenig über 18°) gegen die Vertikale geneigt gewesen sein.

Meine in diesem Sinne an den Herrn Beobachter gerichtete Anfrage wurde mit erwünschter Sachkenntnis sehr eingehend beantwortet. Die Aufklärung lieferte aber ein unerwartetes Ergebnis. Infolge nachträglich beseitigter Unsicherheit in der Orientierung sah sich der Herr Beobachter veranlaßt, seine erste Angabe dahin zu berichtigen, daß der Punkt, an dem das Meteor sich seinen Blicken entzogen hatte, nicht östlich, sondern in ESE, ungefähr in einem Drittel der Mondhöhe (das wäre also etwa $6{\cdot}6°$ hoch), gelegen und die Bahn gegen den Horizont nicht steil, sondern »nur wenig geneigt« erschien. Für die angegebenen beiden Höhen würde bei dem Unterschiede der Azimute von $28{\cdot}9°$ die scheinbare Neigung der Bahn am Horizontknoten 33° südlich von Ost nur 29° betragen. In der dem Berichte beigefügten Skizze erscheint die Neigung noch geringer, weil dort der zweite Punkt, nämlich das Ende der wahrnehmbaren Bahn, höher als im Text, ungefähr in halber Mondeshöhe angegeben ist.

Diese nachträgliche Ergänzung gibt zwar vermutlich die ersten Eindrücke auch nicht mehr genau wieder, doch kann nach derselben eine sehr hohe Lage des Radianten nicht angenommen werden. Wesentlich verändert wird der Eindruck des ersten Berichtes auch dadurch, daß nach der zweiten Mitteilung das Meteor nicht schon beim Mond, sondern etwa erst im letzten Drittel der bezeichneten Bahn erschienen ist. Nach der Zeichnung wäre der Anfangspunkt genau im Osten zu nehmen.

3. Weitenegg (32° 58′; 48° 14′). Um $^1/_2 6^h$ abends war in südöstlicher Richtung ein Meteor sichtbar, welches in fast senkrechter Richtung sehr rasch fiel. Es erschien in gelblicher Farbe, um kurz vor dem Verschwinden intensiv rot aufzuflammen. (Österreichische Landzeitung; Krems.)

4. Laa a. d. Thaya (34° 3′; 48° 43′). Knapp nach $5^1/_4{}^h$ wurde in südlicher Richtung ein Meteor beobachtet. Es hatte Tropfenform und die Größe einer Birne, war unten grün, nach oben hin gelb, in der oberen Hälfte »von gelblichem Dunst« umgeben und hinterließ einen langen, weißglänzenden Schweif. D: 4 — 5°. (Kremser Zeitung.)

5. Göding (34° 48′; 48° 51′). Der Wiener Universitäts-Sternwarte berichtete Herr K. Fürst, Tabak-Hauptverleger, daß er soeben, um $5^h 15^m$, in fast südlicher Richtung den Fall eines Meteors beobachtet habe. Es war von prächtig blauweißer Farbe mit einem alsbald verschwindenden Lichtschweif. Auf meine Anfrage teilte mir der Herr Beobachter ferner mit, daß der Endpunkt der Bahn nach seiner Schätzung zwischen der Richtung nach Kopcsan (10° Azim.) und Holitsch (330° Azim.) in der Linie über die Kote 160 bei Ribnik (in der Spezialkarte) zu nehmen wäre, welche mit 352° Azimut in der Tat fast die Mitte zwischen jenen beiden darstellen würde. In seinen Berichten findet sich die Bemerkung, »daß die Lichtbahn am Ende zwei kurze Unterbrechungen hatte«. Diese könnten wohl auch durch kleines Gewölk hervorgerufen worden sein.

6. In Znaim (33° 42′; 48° 51′) wurde um $^1/_4 6^h$ abends »im Osten bis Südosten« ein Meteor von stahlgrüner bis bläulicher Farbe beobachtet »von der Größe der hellsten Sterne am Himmel«. (Znaimer Wochenblatt.)

7. Schiltern (33° 30·5′; 48° 56·2′). Herr Paul Maresch, Direktor der landwirtschaftlichen Winterschule, war so freundlich, Umfrage zu halten und mir die Wahrnehmungen des Fräuleins Marie Jarolim und des Schülers Soukop zu vermitteln. Nach der Skizze des Fräuleins Jarolim wäre der Endpunkt nur wenig südlich (was nicht genau angegeben werden kann) von SE, nach der zweiten Aussage direkt in SE gesehen worden und nach einer Messung durch Herrn Maresch 8° bis 10° hoch zu nehmen. Das Azimut habe ich demnach mit 315° in

Rechnung gezogen. Die Höhe des Anfangspunktes scheint nach verschiedenen Angaben mit 45° nur abgeschätzt worden zu sein.

Fräulein Jarolim war so gütig, auch eine Zeichnung der scheinbaren Bahn im Vergleiche mit der Vertikalen zu liefern, welche die Abweichung vom lotrechten Fall etwa zu 18°, und zwar nach unten östlich, also links, darstellt. Das Meteor war erst bläulichweiß, dann rot und den größten Sternen am Himmel gleich. D : 3^s.

8. Budweis (32° 38′; 48° 59′). Um $^1/_4 6^h$ wurde hier ein stark leuchtendes Meteor beobachtet, das sich gegen Ost bewegte und dann in mehrere Teile auflöste. (Budweiser Zeitung.)

Teltsch (33° 7′; 49° 11′). Von hier berichtete der Oberrealschüler Jaroslav Maschka der Wiener Sternwarte folgendes: »Am 19. Jänner bemerkte ich bei hellem Mondlicht, um $5^1/_2{}^h$ abends, am südöstlichen Himmel einen ungewöhnlich leuchtenden Stern, welcher südlich vom Sternbilde des Orion nicht hoch über dem Horizont gegen die Erde zu fallen schien. Er bewegte sich in südöstlicher Richtung unter dem Winkel von etwa 65° gegen den Horizont, und zwar so langsam, daß seine verhältnismäßig nur kurze Bahn über 5^s deutlich zu sehen war.

Seine Lichtstärke war bedeutend, obwohl der Vollmond hell leuchtete und die Dämmerung noch nicht zu Ende war.

Etwa bis über die Hälfte seiner steilen Bahn leuchtete das Meteor in grünlichgelber Farbe und es hinterließ einen gleichfalls leuchtenden Schweif nach Art eines Kometen. Dann wurde sein Licht plötzlich rot. Der Stern verjüngte sich zu einem rötlich leuchtenden Punkt und verschwand nach etwa einer Sekunde gänzlich.«

10. Trebitsch (33° 33·5′; 49° 12·5′). Herrn Bürgerschuldirektor Th. Wranitzky verdanke ich eine sehr ausführliche Wiedergabe der Wahrnehmung seiner Tochter, Fräulein Theodora, welche sich eben mit Frau Wranitzky auf der Jarmeritzer Straße nach Trebitsch, also gegen N hin zurückkehrend befand, als sie etwa um $5^h\ 20^m$, plötzlich rechtsseitig (östlich), durch auffallendes Leuchten überrascht, sich umwendete und das Meteor über den Klučover Wäldern erblickte, als

Stern, scheinbar größer als der Abendstern, nach allen Seiten Strahlen aussendend, herrlich grün-bläulich leuchtend und schief herabfallend.

Die hervorragendste Kuppe der nordwestlich von Klučov hinziehenden bewaldeten Höhen, die Klučanska hora, liegt von dem der Beschreibung nach ungefähr anzunehmenden Beobachtungspunkt 37° östlich von Süd, die etwas niedrigere »Zaboři« aber 48° östlich von Süd. Das Mittel gäbe also etwa 317·5° Azimut.

Herr Direktor Wranitzky versuchte dann am 24. Jänner das Azimut mittels einer Boussole zu bestimmen und gab darnach 135° östlich von magnetisch Nord, d. i. (mit 8° magn. Deklination) $A = 307°$ an, doch schrieb er am 27. Jänner, der Fehler würde gewiß nicht groß sein, wenn man direkt *SE* ($A = 315°$) annehmen wollte. Die Unsicherheit scheint hauptsächlich durch Zweifel an der Identität des Standpunktes begründet zu sein. Da die oben erwähnte Beziehung auf die Klučover Waldhöhen im ersten Bericht unmittelbar nach der Beobachtung vorkommt, habe ich den dort angeführten Mittelwert beibehalten.

Herr Wranitzky hat mit einem Gradbogen die ihm bezeichneten Höhen für Anfang und Ende mit 8° und 4° ermittelt sowie den scheinbaren Neigungswinkel der Bahn gegen die Vertikale zu 22°, nach unten zu östlich abweichend. Für die Dauer wurden 2ˢ angegeben.

11. Brünn (34° 16′; 49° 12′). Hier wurde das Meteor mehrfach beobachtet. Die brauchbaren Angaben führe ich an:

a) Herr Franz Eßler, Studierender der technischen Hochschule, war der Azimute nicht ganz sicher. Für die Höhen ergaben sich durch nachträgliche Messung in meiner Gegenwart am Anfang 22°, am Ende 8°. Die Bahn erschien 26° gegen die Vertikale, nach unten östlich abweichend, geneigt. Dauer: 2ˢ, »bestimmt nicht länger«. Das Meteor war bedeutend größer als Venus, weiß leuchtend mit einem roten zurückbleibenden Streifen.

b) Herr Studierender Richard Strebinger befand sich bei Nr. 13 der Rudolfsgasse und sah das Meteor hinter dem Dache von Nr. 18 bis 20, 23° östlich von Süd unter

15° Höhenwinkel, der somit nicht dem Endpunkt entspricht, verschwinden. Der Anfang war 30° hoch. Die Bahnneigung wurde ganz so — wiewohl völlig unabhängig — wie in *a)* skizziert. Dauer: $1^1/_4{}^s$ bis $1^1/_2{}^s$. Die Erscheinung war »heller als jeder Stern, gelbweiß mit pfirsichblührotem Schweif«.

c) Herr J. Fleischer sah, wie um $5^h\ 15^m$ bis 20^m das Meteor von rechts nach links (W—E) einen Bogen über dem Neubau des Abfahrtsbahnhofes beschrieb. Da sein Standort nicht genau bezeichnet war, blieb die Orientierung ungewiß. Die Neigung der Bahn gegen die Vertikale skizzierte er ungefähr zu 32°. Das Meteor erschien wie ein sehr heller Stern, zeigte aber keine Scheibe, deren Durchmesser im Vergleiche zum Mond abzuschätzen gewesen wäre. Zum Schlusse »zerstob es in viele kleinere Leuchtkugeln«.

Diese Angabe, welche sich in andern Beobachtungen nicht findet, wurde von ihm mehrmals wiederholt. Beim Vorzählen von Sekunden entschied sich Herr Fleischer für »etwa $1^1/_2{}^s$ bis 2^s Dauer«. Er hatte ganz freien Ausblick und konnte auch das Ende genau sehen.

12. Weißkirchen (35° 25′; 49° 33′). Herrn Prof. G. Merker an der höheren Forstlehranstalt verdanke ich nachstehende Angaben über seine eigene Beobachtung. Das Meteor fiel um $5^h\ 21^m$ Ortszeit am südlichen Himmel mit weißlichem Licht und erlosch am Hemmungspunkt ziemlich genau südlich und nach Messung mit einem Dendrometer 10° bis 11° hoch mit purpurrotem Lichte. Dauer: 2 bis $2^1/_2{}^s$. Die Bahnneigung wurde nur ganz beiläufig, unter Vorbehalt, zu etwa 45° geschätzt, mit Bewegung rechts-links. Zwei Forstschüler geben 55° bis 60° Neigung gegen den Horizont an; allein es scheint, daß sich ihre Beobachtung auf ein anderes Meteor bezieht, denn sie behaupteten, daß der Mond rechts von der Erscheinung sich befand. Weil dieser aber nahe im Osten war, das in Rede stehende Meteor aus Weißkirchen dagegen nicht weit von Süd gesehen worden sein mußte, war der Mond sehr weit links davon.

Fräulein Jarolim in Schiltern erwähnte übrigens am Schlusse ihres Berichtes, daß gleich nach dem Meteor in der

Richtung des Mondes eine kurz aufleuchtende Sternschnuppe zu sehen war. Vielleicht bezieht sich auf diese auch die Angabe der beiden Studierenden in Weißkirchen.

13. Quellhütten bei Brüsau (34° 9′; 49° 40′). Hier wurde das Meteor von dem Hauptpolier der Brünner städtischen Quellenfassung, Herrn Franz Linha, beobachtet und alles Nötige von dem Herrn Ingenieur Hugo Meixner, ehemaligem Assistenten an meiner geodätisch-astronomischen Lehrkanzel, mit einem nach dem Polarstern ungefähr orientierten kleinen Universalinstrument gemessen. Dabei ergab sich nach den Einstellungen und Bezeichnungen des Herrn Beobachters für den Anfang: $A = 328° 10′$, $h = 20°$, für das Ende über einem bewaldeten Bergrücken: $A = 325° 56′$, $h = 7° 20′$. Da bei so kurzen Bahnen die unvermeidlichen Fehler der Endpositionen sehr entstellend auf die Lage einwirken können, war eine beigefügte Skizze, welche den Abfall in etwa 20° Abweichung von der Vertikalen darstellte, sehr willkommen. Die Kugel verlief in einen Schweif von ungefähr 2° Länge. Dauer: 4 bis 5^s.

14. Zwittau (34° 8′; 49° 45·5′). Herr A. Jung, Portier der k. k. Tabakfabrik, berichtete der Wiener Sternwarte, daß er am Tore der Fabrik, gegen Süden gekehrt, um $5^h 15^m$ Ortszeit am südlichen Himmel ein Meteor bemerkte, das sich sehr schnell in südöstlicher Richtung bewegte und scheinbar in gleicher Höhe mit dem Turme der Pfarrkirche zersprang. Es leuchtete intensiv gelb und spaltete sich in zwei Teile, wobei rotes Licht aufblitzte und Funken sprühten. Dauer nahezu 3^s.

15. Wiesenberg (34° 46′; 50° 4′). Ungefähr $5^h 25^m$ fiel ein hell leuchtendes Meteor am südlichen Himmel, hinter sich eine intensiv helle Spur lassend. Die Fallrichtung war wegen des vorliegenden Radersberges nicht recht wahrnehmbar, doch dürfte es in der Gegend von Sternberg gewesen sein. (Herr Obergärtner Jirasek an die k. k. meteorol. Zentralanstalt.) Das Azimut Wiesenberg — Sternberg beträgt 338°.

16. Hirschberg (33° 24′; 50° 54·3′). Den freundlichen Bemühungen des Herrn Prof. Dr. E. Reimann verdanke ich wieder mehrere Beobachtungen.

a) Der Abiturient Frenzel und der Unterprimaner Peterssen-Borstel standen nebeneinander auf der Kunners-

dorfer Eisbahn. Sie geben die Zeit zu 5^h 13^m und das Verschwinden hinter einem Berge in ungefähr 15° östlich von Süden, 4° hoch, ferner den Anfangspunkt in 8° Höhe an. Die scheinbare Bahn skizziert Peterssen 30° gegen die Vertikale geneigt, nach unten östlich abweichend, während Frenzel die Bahn viel weniger steil, etwa 46° von der Vertikalen, in demselben Sinne abweichend, angibt. Die Skizze Frenzel's macht übrigens den Eindruck, als ob ein Bahnteil fast horizontal erschienen wäre, was hier nur im Gegensatze zu den beiden folgenden Beobachtungen horvorgehoben wird.

Peterssen gibt die Dauer zu 2 bis 3^s an und fügt bei, daß das Meteor groß, heller als Venus erschien, von grüner Farbe, welche allmählich in Rot überging.

b) Die Untersekundaner Prinz Reuß und Galle sahen das Meteor von den »Abruzzen«, südlich von Hirschberg, um 5^h 15^m. Der Karte nach verschwand es ihnen hinter dem zirka $3^1/_2$° hohen »Forstkamm« in 19° östlich von Süd. Die Neigung gegen die Vertikale wird von diesen beiden Beobachtern viel geringer, also der Abfall viel steiler angegeben als von den beiden ersteren. Galle skizziert ihn mit 13°, Prinz Reuß kaum zu 10°. Letzterer gibt für die Dauer 2^s oder eher etwas länger und für die Farbe orange, dann etwas bläulich. Ersterer nimmt 2 bis 3^s für die Dauer an. Hervorgehoben wird, daß neben der Dämmerung bereits heller Mondschein herrschte, gleichwohl aber das Meteor sehr intensiv erschien.

Aus den verschiedenen Angaben habe ich für die Fallepoche 5^h 17^m mittlere Brünner Zeit, also 4^h 11^m mittlere Greenwicher Zeit abgeleitet.

Schon eine flüchtige Beobachtung der Karte bei Durchsicht dieser Beobachtungen lehrt, daß sich der Endpunkt der gesehenen Bahn in großer Entfernung von den Beobachtungsorten, welche sich alle im Nordwestquadranten desselben befanden, gelegen war, ungefähr innerhalb des großen Dreiecks Raab—Budapest—Veszprim. Darauf weist auch die

äußerst geringe Parallaxe in Höhe hin, welche zumeist durch die unvermeidlichen Beobachtungsfehler verdeckt ist und allenfalls erst in Hirschberg deutlicher wird.

Hinsichtlich der Azimute bilden die mährischen Orte in der Richtung SW — NE von Teltsch bis Weißkirchen noch immer eine zu kurze Basis mit Rücksicht auf die vielfach nur beiläufigen Angaben. Richtungen, welche durch tatsächliche Messungen oder nach Plänen festgestellt wurden, wie jene aus Brünn, Quellhütten und Hirschberg, fallen zusammen oder laufen gar auseinander, wie z. B. die letztere gegen die beiden ersteren u. s. w., so daß ohne die Angaben aus dem südlichen Ternitz überhaupt kaum auf die Lage des Hemmungspunktes geschlossen werden könnte. Allein auch diese Beobachtung kann zur Bestimmung des Endpunktes nur indirekt herangezogen werden, teils weil von dort berichtet wurde, daß das Meteor hinter einer Wolke verschwunden ist, teils, weil selbst hinsichtlich dieses Punktes zwei voneinander stark abweichende Angaben vorliegen.

Das in meinen Rechnungen fast immer eingehaltene und schon mehrmals begründete Verfahren, vorerst den Endpunkt der Bahn sicherzustellen und an diesen die übrigen Elemente der Beobachtungen verbessernd und ergänzend anzuknüpfen, kann daher im vorliegenden Falle mit Vorteil nicht angewendet werden, weil es sehr fraglich bleibt, ob damit eine Verbesserung der für die Aufsuchung des Radianten verwendbaren scheinbaren Bahnbogen erzielt würde.

Daß dieser Fall einen für diese Epoche noch nicht nachgewiesenen Radianten erschließt und dadurch andere Erscheinungen, welche in der Epoche ziemlich weit auseinanderliegen, miteinander verbindet, erschien mir schon bei vorläufiger Untersuchung wahrscheinlich und dies hielt mich schließlich doch davon ab, die Bearbeitung desselben, wegen der wenig günstigen Lage der Beobachtungsorte und der durchschnittlich geringen Genauigkeit der Richtungsangaben, gänzlich zu unterlassen.

Um nun die sämtlichen Beobachtungen wenigstens ihrer Qualität nach entsprechend auszunützen, habe ich mich dann entschlossen, die Aufgabe hier allgemeiner zu lösen, nämlich

den Endpunkt der Bahn und den Radianten im Zusammenhang zu bestimmen.

Eine direkte Durchführung dieser Aufgabe wäre jedoch mit dem vorliegenden Material nicht lohnend gewesen. Ich benützte dabei mit Vorteil den Weg des Näherungsverfahrens, welches grundsätzlich durch nachstehende Erörterung hinreichend charakterisiert sein dürfte.

Zunächst wird eine Bestimmung des Endpunktes und des Radianten nach der gewöhnlich von mir angewendeten Methode vorgenommen, diese jedoch nur als vorläufig angesehen und weiter verbessert. Dabei wurden die Abweichungen des vorläufigen Radianten von den scheinbaren Bahnbogen auf sämtliche den Beobachtungen entnommene Bestimmungsstücke des Bogens verteilt, also nicht allein auf den Anfangspunkt oder auf die scheinbare Neigung, sondern auch auf den Endpunkt. Im gegenwärtigen Falle kamen hinsichtlich des letzteren jedoch nur die vielfach so ungenauen Azimute in Betracht, da die gemessenen Höhen nur sehr geringe Widersprüche darboten.

Diese Verbesserungen wurden hier überall derart ermittelt und verteilt, daß die Summe der mit ihren Gewichten multiplizierten Quadrate ein Minimum war.

Mit den neuen Richtungen wurde dann eine verbesserte Bestimmmung des Endpunktes und auf Grund derselben wieder eine neue Ermittlung des Radianten vorgenommen.

Man gelangt dabei bald dahin, daß eine weitere Wiederholung des Vorganges keine wesentliche Verminderung der erwähnten Quadratsumme hervorruft, also überflüssig wird. Im vorliegenden Falle konnte ich es schon bei der zweiten Näherung bewenden lassen.

Die dabei erlangten Resultate sollen nun hier angeführt werden.

Der Hemmungspunkt ergab sich über der Gegend in $\lambda = 35° 33{\cdot}2'$ östlich von Ferro, $\varphi = 47° 18{\cdot}3'$ nördlicher Breite, ungefähr über dem Weiler Imre mjr im Bakonyerwald, 6 *km* südlich von Magyar Szt. Király.

Nachstehende Übersicht ermöglicht eine Vergleichung der für diese Bestimmung aus den bezeichneten Beobachtungen benützten mit den schließlich berechneten Azimuten:

Azimute.

	Beobachtet:	Berechnet:	Verbesserungen:
Türnitz (2).....	292·5°	287·8°	— 4·7°
Göding (5).....	352·0	342·4	— 9·6
Schiltern (7)	315·0	319·0	+ 4·0
Teltsch (9).....	315·0	320·4	+ 5·4
Trebitsch (10).....	317·5	324·0	+ 6·5
Brünn (11).....	334·0	335·2	+ 1·2
Weißkirchen (12) ...	0·0	357·7	— 2·3
Quellhütten (13)	325·9	339·1	+13·2
Hirschberg (16).....	341·0	337·8	— 3·2

Die den Beobachtungen entnommenen Azimute bedürfen keiner weiteren Erklärung. Nur hinsichtlich Brünn sei erinnert, daß sich die Höhenangabe 8° für das Ende in *a)* und die Bezeichnung eines Bahnpunktes in $A = 337°$, $h = 15°$ unter *b)* durch die scheinbare Bahnneigung von 64° ergänzen. Hieraus folgt für das Ende in 8° Höhe das oben angesetzte Azimut. Die Angabe aus Türnitz wurde benützt, ungeachtet des Verschwindens hinter der Wolke, weil der Endpunkt sicher nicht viel südlicher gelegen sein konnte. Dagegen konnte die Wiesenberger Beobachtung nicht verwendet werden, weil in der dort bezeichneten Richtung der Radersberg schon die ganze Bahn verdeckt hätte.

Aus diesen Zahlenwerten ergibt sich der mittlere Fehler eines beobachteten Azimutes zu $\pm 7·5°$, welcher allerdings für Beobachtungen dieser Art keineswegs auffallend groß ist. Allein wegen der minder günstigen Lage der Beobachtungsorte und ihrer großen Entfernung vom Endpunkt ist das Ergebnis für die geographischen Koordinaten des letzteren doch viel unsicherer als sonst, denn die betreffenden mittleren Fehler desselben betragen in Länge $\pm 15'$ oder 18·7 *km*, im Parallel und in Breite $19·5'$ oder 36·2 *km* im Meridian.

Eine bessere Bestimmung hätten Angaben aus Ungarn, welche nicht zu erlangen waren, oder aus den niederösterreichischen und steierischen Grenzgebieten, wo, wie es scheint, der Himmel bewölkt war, geliefert. Aus Wien

selbst ist, ungeachtet der veröffentlichten Aufforderung der Sternwarte, keine Nachricht über dieses Meteor bekannt geworden.

Die auf die lineare Höhe des Endpunktes über der Erdoberfläche bezüglichen Ergebnisse sind aus der nachstehenden Zusammenstellung ersichtlich:

	Entfernung vom Ende:	Beobachtete scheinb. Höhe:	Berechnete lineare Höhe:	Berechnete scheinb. Höhe:	Verbesserungen:
Türnitz (2)	195 *km*	6·6°	24·7 *km*	10·2°	+3·6°
Schiltern (7)	238	9·0	42·5	8·1	−0·9
Trebitsch (10)	261	4·0	23·6	7·2	+3·2
Brünn (11)	234	8·0	37·4	8·3	+0·3
Weißkirchen (12)	250	10·5	51·6	7·5	−3·0
Quellhütten (13)	299	7·3	45·6	6·0	−1·3
Hirschberg (16)	431	<3·5	<41·1	3·1	—

Es ist hier kaum wesentlich Besseres zu erwarten, als das Mittel der einzelnen berechneten Werte darbieten kann. Ich habe dazu auch die letzte Angabe benützt, obwohl sich die Höhe von 3·5° nicht genau auf den Endpunkt bezieht, da sie diesem doch gewiß weit näher liegt, als die wahrscheinliche Fehlergrenze beträgt.

Auf diese Weise erhält man für die Höhe des Endpunktes: 38·1 *km* ± 10 *km*.

Der mittlere Fehler der benützten scheinbaren Höhen beträgt nur ± 2·6°, was sehr günstig ist; allein der Einfluß auf das Resultat ist, eben wegen der großen Entfernungen, doch sehr erheblich.

Für die Ermittlung des Radiationspunktes standen nur zwei jener Beobachtungen zur Verfügung, welche je zwei Bahnpunkte bezeichnen, jene aus Türnitz und Quellhütten. Für erstere wurde (der Richtung nach) der Mond als Bahnpunkt unter I genommen. Für letztere schien es am sichersten, den Anfang in der dort bezeichneten Höhe von 20° mit der skizzierten Bahnneigung an den verbesserten Endpunkt zu knüpfen.

Bei den übrigen Beobachtungen konnten nur Richtungen der scheinbaren Bahnbogen benützt werden, im Anschluß an die unter II nachstehend angeführten verbesserten Endpositionen.

Unter I ist bei allen diesen (mit einem *) bezeichneten Bahnen der eine Knoten am Äquator angesetzt, weshalb zu allen diesen Rektaszensionen die Deklination 0 gilt.

Bei der geringen Zahl der verfügbaren Beobachtungen wollte ich jene aus Weitenegg (3) mit »fast senkrechtem« Fall nicht ganz unbeachtet lassen und habe für diese 90° Neigung gegen den Horizont, aber nur mit Gewicht ein Viertel genommen, weil mir nur zu gut bekannt ist, daß derartige Bezeichnungen in der Regel nur sehr beiläufig zu nehmen sind.

In der folgenden Übersicht sind die benützten neun scheinbaren Bahnbogen verzeichnet:

	I		II	
	α	δ	α	δ
Türnitz (2)	98·0°	+18·7°	86·6°	— 4·0°
Quellhütten (13)..	17·8	—20·3	39·5	—28·7
Weitenegg* (3)...	249·8	0	78·1	—11·5
Schiltern* (7)	40·0	0	61·6	—22·5
Teltsch* (9)	31·6	0	60·1	—24·8
Trebitsch* (10)...	32·6	0	57·7	—25·5
Brünn* (11)	19·3	0	45·8	—28·5
Weißkirchen* (12)	351·6	0	21·6	—32·8
Hirschberg* (16) .	13·8	0	43·6	—32·8

Hieraus erhielt ich den scheinbaren Radianten in 268·8° Rektaszension und 45·8° nördlicher Deklination im nordöstlichsten Teile des »Herkules«.

Die Sicherheit dieser Bestimmung ist jedoch nicht groß, denn der mittlere Fehler in Rektaszension ist $\pm 9°$ und jener in Deklination $\pm 5°$.

Die Verbesserungen der oben angeführten Beobachtungen, abgesehen vom Endpunkt unter II, welcher bei der letzten Näherung keine Änderung mehr erfahren hat, sind im Folgenden enthalten. Für Türnitz beträgt am Punkt I die Verbesse-

rung in α: $-11°$ und für Quellhütten dieselbe ebenfalls in α: $+ 6{\cdot}6°$. Die beiden Deklinationen erleiden keine wesentlichen Änderungen.

Neigungen der scheinbaren Bahnen gegen den Horizont.

	Den Beobachtungen entnommen:	Berechnet:	Verbesserungen:
Weitenegg (3)	90°	67·3°	— 22·7°
Schiltern (7)	72	81·0	+ 9·0
Teltsch (9)	65	77·8	+ 12·8
Trebitsch (10)	68	72·3	+ 4·3
Brünn (11)	62	58·1	— 3·9
Weißkirchen (12)	45	37·9	— 7·1
Hirschberg (16)	60	51·0	— 9·0

Der mittlere Fehler einer Beobachtung der Gewichtseinheit beträgt $\pm$ 10°.

Unter Voraussetzung des hier abgeleiteten Radianten kam das Meteor aus 133·8° Azimut, also nahezu aus Nordwest, in einer 21° gegen den Horizont des Endpunktes geneigten Bahn.

Aufleuchten, Bahnlänge, Geschwindigkeit.

Wenn die in Schiltern (7) abgeschätzte Höhe von 45° für den Anfangspunkt der gesehenen Bahn annähernd richtig wäre, so würde dort das früheste Aufleuchten und die längste Bahn gesehen worden sein. Jenes würde sich dann 96 *km* über der Gegend von Stadlau östlich von Wien und die Bahnlänge zu 156 *km* ergeben, woraus man mit 3^s Dauer auf eine Geschwindigkeit von 52 *km* zu schließen hätte.

Da jedoch die scheinbaren Höhen fast immer überschätzt werden, so kann dieses Ergebnis kein großes Vertrauen beanspruchen. Jedenfalls sind alle darauf bezüglichen Messungen und Angaben aus Brünn weit sicherer, insbesondere auch, weil die Dauer später nach Sekundenschlägen geschätzt wurde.

In Brünn (11, *b*) wurde das Meteor zuerst von dem Herrn Strebinger 30° hoch gesehen. Dem entspricht eine Bahnlänge von 113 *km* und das Aufleuchten in 80 *km* Höhe über der Gegend in $\lambda = 34° 32{\cdot}5'$, $\varphi = 47° 57'$, etwa 2 *km* östlich von Neusiedl am See in Ungarn. Allein dieser Beobachter hat nicht die ganze vorhin bezeichnete Bahn bis zum Endpunkt gesehen, sondern, da ihm das Meteor schon bei 15° Höhe durch ein Dach verdeckt wurde, nur 69 *km*, zwischen dem Anfang und einer Höhe von 54·8 *km*. Die von ihm angegebene Dauer von $1^1/_4$ bis $1^1/_2{}^s$ würde demnach auf eine Geschwindigkeit von 50 *km* schließen lassen.

Die Beobachtung (11*a*) des Herrn Eßler gibt die Anfangshöhe nur zu 22° und die daraus abgeleitete Bahnlänge zu 79 *km*, zwischen 67 und 38 *km* Höhe, woraus also für 2ˢ Dauer eine Geschwindigkeit von 39·5 *km* folgen würde.

In der Beobachtung des Herrn Fleischer (11*c*) ist der Anfang nicht bezeichnet. Wird die Dauer von $1^3/_4{}^s$ auf das Mittel der Bahnlängen aus *a* und *b*, d. i. 96 *km*, bezogen, so ergibt sich hieraus 54·5 *km* Geschwindigkeit.

Die in Quellhütten (13) für den Anfang gemessene Höhe von 20° entspricht sehr nahe demselben Anfangspunkt (nämlich nur 4 *km* weiter gegen SE), wie ihn die Brünner Beobachtung des Herrn Strebinger ergibt, mit einer Bahnlänge von 109 *km*. Die dort angegebene Dauer von 4—5 ˢ ist jedoch ohne Zweifel erheblich überschätzt.

Hirschberg (16) ist so weit entfernt, daß der Einfluß der gewöhnlichen Unsicherheit das Resultat völlig entstellen kann, da ein Fehler von $\pm$ 4° in der Lage des Anfangspunktes die Bahnlänge schon um 40 *km* ändert. Für 8° Höhe würde man nur 66 *km* Bahnlänge erhalten, für 12° aber ungefähr ebenso viel als die aus Brünn *b* nachgewiesene. Aus diesen Angaben kann somit ein verläßlicher Wert für die Bahnlänge nicht mehr abgeleitet werden.

Den vorstehenden Erörterungen wird zu entnehmen sein, daß das Mittel aus den drei Brünner Schätzungen, welches rund 48 *km* beträgt, für die geozentrische Geschwindigkeit kaum zu hoch gegriffen sein dürfte.

In der vorhin abgeleiteten Bahn ist das Meteor über St. Johann, dann nahezu über Kóny an der Wien—Raaber Bahn, etwa 2 *km* nordöstlich an Tét und 24 *km* südlich von Raab, zum Endpunkt gezogen. Nach ganz unbestimmt lautenden Zeitungsmeldungen ist es in Raab auch beobachtet worden, doch gelang es mir nicht, nähere Nachrichten darüber zu erhalten.

Über die äußere Erscheinung des Meteors ist nichts Wesentliches zu bemerken. Es liegt hinsichtlich der scheinbaren Größe kein Vergleich (z. B. mit der Mondscheibe) vor, welcher eine zahlenmäßige Schätzung des scheinbaren Durchmessers gestatten würde, doch wurde es vielfach »größer« und lichtstärker als Venus bezeichnet. Von bedeutender, auffallender Erhellung der Umgebung ist kaum die Rede. Man muß jedoch berücksichtigen, daß alle Entfernungen sehr groß waren. Auch erwies sich das Mondlicht schon und die Dämmerung noch wirksam.

Kosmische Beziehungen.

Bezogen auf die Ekliptik hat der hier ermittelte Radiationspunkt die Koordinaten: $\lambda = 267{\cdot}6°$, $\beta = 69{\cdot}3°$. Die Sonnenlänge, zugleich auch die Länge des aufsteigenden Knotens, war $298{\cdot}7°$, daher die scheinbare Elongation vom Apex der Erdbewegung $79{\cdot}5°$ und die heliozentrische Geschwindigkeit $51{\cdot}8$ *km* oder $1{\cdot}73$ in der bekannten Einheit. Die Bahn war daher auch wieder eine Hyperbel.

Der Radiationspunkt dieses Meteors in $\alpha = 268{\cdot}8°$, $\delta = +45{\cdot}8°$ liegt sehr nahe dem Strahlungspunkt des bekannten Meteoritenfalles von Mócs, welcher sich am 3. Februar 1882 ereignete und für den ich den Radianten in $\alpha = 264°$, $\delta = +40°$ abgeleitet habe.[1]

Noch anschaulicher wird die Übereinstimmung, wenn man, wie ich sogleich zeigen werde, den Unterschied von 15 Tagen zwischen den beiden Epochen in Betracht zieht.

In der angeführten Abhandlung habe ich noch zwei andere Radianten mit jenem des Mócser Falles verglichen

[1] Diese Sitzungsberichte, XCIX. Bd., II. Abt., Februar 1884, p. 283.

und diese kämen hier auch wieder in Frage; doch wird eine ergänzende Bemerkung einzuschalten sein.

Für ein am 7. Februar 1863, $6^h\,30^m$, in Schottland beobachtetes Meteor konnte ich[1] aus den bekannt gewordenen, nicht sehr genauen Daten den Radianten in $\alpha = 261°$, $\delta = +\,38{\cdot}5°$ angeben. Seither brachte Denning's General-Katalog (p. 270) auch ein Resultat Prof. Herschel's, nach welchem die betreffenden Koordinaten $\alpha = 265°$, $\delta = +\,28°$ zu nehmen wären. Ich glaube den Umständen Rechnung zu tragen, wenn ich hier den Mittelwert $\alpha = 263°$, $\delta = +\,33{\cdot}3°$ beibehalte.

Um zunächst die Bahnen der drei Erscheinungen vom 19. Jänner, 3. und 7. Februar hinsichtlich ihres Eintritts in das Sonnensystem unabhängig von der Zufälligkeit der Begegnung mit der Erde in verschiedenen Knotenlängen zu vergleichen, habe ich die ihre heliozentrischen Bewegungsrichtungen in sehr großer Entfernung von der Sonne bestimmenden Koordinaten der kosmischen Ausgangspunkte berechnet.[2]

Um Mißverständnissen zu begegnen, möchte ich wiederholt betonen, daß darin die räumliche Bewegung des gesamten Sonnensystems nicht inbegriffen ist. Wollte man die räumlichen oder siderischen Bewegungselemente dieser Körper in einem weiteren Sinne angeben, so hätte man ihre heliozentrische Bewegung noch mit der Richtung und Größe der Sonnenbewegung in bekannter Weise zu verbinden. Darauf kommt es in diesen Betrachtungen jedoch nicht an.

Da die wirkliche Geschwindigkeit der Meteoriten vor dem Eintritte in die Atmosphäre durch Beobachtungen nicht sicher bestimmt werden kann, so habe ich die Berechnung der Ausgangspunkte für verschiedene Geschwindigkeitsannahmen vorgenommen, und zwar für $v = 2$, $2{\cdot}5$ und 3 (in der Entfernung 1

---

[1] Ebenda, p. 292.

[2] Siehe meine Abhandlung: »Theoretische Untersuchungen über die Verschiebung der Radiationspunkte aufgelöster Meteorströme«. Diese Sitzungsberichte, LXXXIII. Bd. II. Abt., Jänner 1881, p. 96.

von der Sonne), also für hyperbolische negative Halbachsen von der Größe $^1/_2$, $^4/_{17}$ und $^1/_7$.

Hier findet man das Ergebnis.

Koordinaten des kosmischen Ausgangspunktes in Länge (l) und Breite (b).

	für $v = 2{\cdot}0$		$v = 2{\cdot}5$		$v = 3{\cdot}0$	
Epoche des Falles:	l	b	l	b	l	b
19. Jänner 1905	318°6	+43°5	318°4	+55°1	315°0	+61°2
3. Februar 1882	320·1	47·1	313·8	58·6	312·8	63·6
7. Februar 1863	318·1	43·8	306·3	55·0	297·4	59·1

Mit der Geschwindigkeitshypothese $v = 2$ zeigen diese Koordinaten eine für solche Fälle weitgehende Übereinstimmung. Das Mittel wäre $l = 318{\cdot}9°$, $b = 44{\cdot}8°$ und die mittlere Abweichung vom Mittel $\pm 1°$ in l und $\pm 2°$ in b, so daß ich eine tatsächliche Zusammengehörigkeit mindestens für sehr wahrscheinlich erachte.

In der erwähnten Abhandlung habe ich mit dem Falle von Mócs auch noch den naheliegenden, von Denning für den 20. Februar 1877 als sehr sicher bezeichneten Sternschnuppen-Radianten in $\alpha = 263°$, $\delta = +36°$ verglichen.

Um zu zeigen, wie weit mit dem oben angegebenen Mittel für l und b und der Hypothese $v = 2$ die aus den Beobachtungen abgeleiteten Radianten für die betreffenden Epochen dargestellt werden, habe ich aus jener Annahme diese zurückgerechnet und die folgende Zusammenstellung gestattet eine rasche Vergleichung.

Radianten.

	Auf Grund des Ausgangspunktes berechnet:		Beobachtet:			
Epoche:	α	δ	α	δ	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
19. Jänner 1906	267·6	+46·5°	268·8	+45·8	—1·2°	+0·7
3. Februar 1882	264·9	37·9	264·0	40·0	+0·9	—2·1
7. Februar 1863	264·3	35·3	263·0	33·3	+1·3	+2·0
20. Februar 1877	262·0	29·1	263·0	36·0	—1·0	—6·9

Die Zugehörigkeit der letzten Erscheinung bleibt wegen der größeren Differenz in δ zweifelhaft. Es kann jedoch einerseits sowohl die Unsicherheit der Position dieses Radianten[1] als auch jene der ersten drei Punkte einige Grade betragen. Wenn z. B. hinsichtlich des Meteors vom 7. Februar statt des Mittels ein meiner Bestimmung näher liegender Wert gewählt wird, so würde, in Verbindung mit der ebenfalls mehr nördlicher liegenden Position des Mócser Falles, das Gesamtmittel für l, b nördlicher kommen und dann die Verbesserung an δ für den 20. Februar kleiner ausfallen.

In meinen Materialien befindet sich die Bahnbestimmung eines Meteors (von »Venusgröße«), das am 30. Juli 1879 in Dänemark beobachtet wurde. Den Radianten habe ich aus zwei nach Sternen angegebenen Bahnen in $\alpha = 330°$, $\delta = +22{\cdot}5°$ bezeichnet.[2]

Aus dem früher gefundenen kosmischen Ausgangspunkt erhält man mit $v = 2$ durch Rechnung für diese Epoche (Knotenlänge) den Radianten in $\alpha = 333{\cdot}5°$, $\delta = 23{\cdot}2°$, eine befriedigende Übereinstimmung bei sehr abweichender Sonnenlänge.

Wenn man, was ja nach vielen andern Erfahrungen annehmbar ist, einseitig ermittelte Sternschnuppenradianten allgemein als Ersatz für Nachweisungen von Feuerkugeln gelten lassen kann, bleibt dieses letztere Beispiel nicht vereinzelt, da sich auch noch in andern Teilen des Jahres einige ähnliche Übereinstimmungen finden lassen.

Um dies an einigen Fällen zu zeigen, habe ich für die Mitte der Monate März bis Dezember die Lage der scheinbaren

---

[1] Den Angaben in Denning's General-Katalog, p. 270, ist jetzt zu entnehmen, daß dieser Radiant nur aus fünf einseitig beobachteten Sternschnuppenbahnen bestimmt wurde, obwohl die Erscheinung im ursprünglichen Bericht (Rep., 1878) als »a rich morning shower« gekennzeichnet ist. Ich erkläre mir diesen anscheinenden Widerspruch damit, daß zahlreiche Bahnen des reichen Meteorschauers gegen den angegebenen Punkt nicht gut konvergierten. Es kann daher immerhin für möglich gelten, daß das Resultat mit Einbeziehung einer größeren Zahl von Bahnen etwas anders ausgefallen wäre.

[2] Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Vol. LVII, Nr. 3, p. 177.

Radianten aus dem Ausgangspunkt $l = 318{\cdot}9°$, $b = 44{\cdot}8°$ mit $v = 2$ berechnet und zum Vergleiche einige mir bekannt gewordenen, aus den Beobachtungen abgeleitete Werte beigesetzt:

Epoche:	Vom Ausgangspunkt abgeleitet: α	δ	Aus Beobachtungen abgeleitet:
März 15.	274·7°	+ 16·3°	März 31. bis April 12. 1872. $\alpha = 277°$, $\delta = 10°$, Den. G. K. 272.
April 15.....	289·6	10·5	April 17. 1898. $\alpha = 291°$, $\delta = +13°$, Den. p. 275, (Korresp. beob. Sternschnuppe). April 19. bis 23. $\alpha = 292°$, $\delta = 14°$, Den. ebenda. ? Mai 2. 1870. $\alpha = 298°$, $\delta = 5°$, Tupm.
Mai 15.....	304·5	10·2	Mai 15. $\alpha = 304$, $\delta = 7°$. Den. Report, 1877.
Juni 15.	317·8	13·6	Juni. $\alpha = 313°$, $\delta = 12°$. Schmidt.
Juli 15.....	330·0	19·2	Juli 19. $\alpha = 332°$, $\delta = 23°$, Schiap. Juli 28. $\alpha = 336°$, $\delta = 30°$, Schiap. Juli 1. bis August 15. $\alpha = 338°$, $\delta = 26°$, Greg. August 1. bis 15. $\alpha = 338°$, $\delta = 30°$, Schmidt.
August 15.....	339·0	28·3	August. $\alpha = 340°$, $\delta = 35°$, Greg und Herschel. August 22. $\alpha = 340°$, $\delta = 33°$, Tupm.

Epoche:	Vom Ausgangspunkt abgeleitet: α	δ	Aus Beobachtungen abgeleitet:
			? September 3. bis 8. 1885, $\alpha = 354°$, $\delta = 38°$, Den. p. 286.
September 15. . . .	344·8	39·0	September 3. bis 20. 1895, $\alpha = 347°$, $\delta = 43°$, Den. p. 285.
Oktober 15.	342·7	51·1	Oktober 15. bis November 6. $\alpha = 342°$ $\delta = 56°$, Greg. Oktober 15. bis 30. $\alpha = 334°$, $\delta = 54°$, Heis, A. N. 1642. Oktober 19. $\alpha = 350°$, $\delta = 50°$, Den. p. 286.
November 15. . . .	322·7	61·3	November 24. $\alpha = 330°$, $\delta = 63°$, Den., p. 286. November 28. $\alpha = 327°$, $\delta = 63°$, Den., ebenda.
Dezember 15.	289·1	59·8	Dezember 8. bis Jänner 25. (?) $\alpha = 296°$, $\delta = 53°$, Heis. ? Dezember 11. 1852, Feuerkugel. $\alpha = 277°$, $\delta = 54°$, Buszczynski nach dem Material von Heis. ? Dezember 12. 1872. Große deton. Feuerkugel in Kentucky U. S. $\alpha = 273°$, $\delta = +58°$; nur beiläufig nach Newton. (Report, 1874, p. 298.)

II. Meteor am 29. Juni 1906.

Beobachtungen.

Sachsen und Bayern.

1. Dresden (31° 24′; 51° 3′). Die nachstehende offenbar sehr genaue Beobachtung, welche die wichtigste Grundlage der Bahnbestimmung bildet, verdanke ich der Güte des Herrn Prof. Dr. Max Toepler in Dresden.

»Aufleuchten nicht beobachtet. Das Meteor bewegte sich langsam von Ost nach West. Helligkeit intermittierend, 4 bis 5 Maxima, manchmal fast verschwindend, Schweif kurz, höchstens $^1/_4°$. Die größte Helligkeit betrug mehr als das Doppelte von Mars. Farbe wechselnd, rot bis grün, überwiegend weißgrün. Erlöschen ohne besonders helles Aufleuchten, kein Zerplatzen, keine Schallwahrnehmung.

Da meine Wohnung freie Fernsicht gewährt, wird der Horizont von durchschnittlich etwa 1 *km* entfernten Gegenständen gebildet. Dies und die Lage der Bahn nahe am Horizont ermöglichte eine recht genaue Festlegung. Nach Orientierung an Objekten des Horizonts und Ausmessung auf dem Stadtplan ergab sich folgendes:

Der Ort, wo das Meteor zuerst bemerkt wurde, liegt etwa 6° 50′ westlich von Süd, der Ort des Erlöschens 17° 50′ ± 15′ westlich von Süd, 4° 40′ ± 10′ über dem Horizont.

Die scheinbare Bahnneigung gegen den Horizont war $\leqq 3°$, sicher nicht über 3°. Flugdauer $\geqq 2^s$; Zeit des Erlöschens $10^h\ 50^m\ 30^s \pm 15^s$.«

2. München (29° 15′; 48° 8′). Um $10^h\ 54^m$ ging ein kolossales Meteor über München nieder. Dasselbe, welches fast dem Umfange der Mondscheibe nahe kam, bewegte sich anscheinend vom Maximilianeum in großem Bogen nach der Klosterbrauerei zu. (Münchener Neueste Nachrichten.)

3. Auf dem Wege von Percha nach Starnberg (29° 2′; 48° 0′) erstrahlte plötzlich eine solche Helligkeit, daß man an den Reflex der Azetylenlampe eines Radfahrers dachte. Eine farbenschöne Leuchtkugel flog, einen langen Schweif nachziehend, von S nach N, wie eine in Gelb, Rot und Lila leuchtende

Rakete. Die Erscheinung teilte sich schließlich in zwei Hälften und verschwand. (Ebenda.)

4. Weilheim (28° 48′; 47° 48′). Um $10^h\ 45^m$ abends erschien plötzlich am wolkenlosen Himmel, etwa 45° vom Zenith in südöstlicher Richtung entfernt, eine gelbe, helleuchtende Kugel. Sie hatte die scheinbare Größe einer kleinen Melone und zog einen roten, fast in Karmin spielenden Schweif hinter sich her. Sie bewegte sich sehr langsam in fast nördlicher Richtung und verschwand, etwa 30° südöstlich des Polarsternes, meinen Blicken. Dauer 30ˢ. Der Beobachter hebt noch hervor, daß der Schweif, nicht »wie es bei Sternschnuppen der Fall ist«, am Himmel zurückblieb, sondern der Feuerkugel folgte. (Ebenda.)

5. Hausham bei Schliersee (29° 30′; 47° 46′). Die scheinbare Größe glich etwa der des Vollmondes und die Bewegung war eine sehr lebhafte. Dauer etwa 20ˢ. Das Licht war anfangs weiß, ging dann ins Blaßblaue und zuletzt ins Rote über. Auf halbem Wege schleuderte das Meteor, wie es schien, vier oder fünf größere Stücke von sich ab, die dann schnell unsichtbar wurden. Das Auffälligste war ein donnerähnliches Geräusch, das der Erscheinung nach etwa 4 bis 5 Minuten folgte. Es glich zwei rasch nacheinander abgefeuerten Kanonenschüssen, die man aus einer Entfernung von etwa 3 bis 4 *km* hört. (Ebenda.)

6. Reichenhall (30° 32·5′; 47° 43′). Die folgende, unter dem lebhaften Eindrucke der großartigen Erscheinung entstandene Schilderung fand ich einige Wochen nach dem Falltage in der Reichenhaller »Kurliste«:

»Am Tage Peter und Paul, $10^h\ 55^m$, befand ich mich auf der Straße nach Kaitl, ungefähr bei der Villa Waldeck. Als ich so dahin schlenderte, wurde die stockfinstere Umgebung urplötzlich taghell beleuchtet, und über dem Kirchberg erschien in verklärender Pracht ein helleuchtender Himmelskörper, welcher, einer Flammenkugel gleich, langsam am Horizont von Süd nach West zur Erde wanderte. Der Lichtkörper glich ganz und gar einer zur Erde niederfallenden Riesenrakete mit dem Unterschied, daß er einen wundervollen Funkenschweif, der in blaßrotem Licht erstrahlte, hinter sich herzog.

Als das Phänomen herüber gewandert war bis zur Projektion mit dem Sternbild des »Großen Bären« und somit fast einen Halbkreis beschrieben hatte, verschwand es keineswegs, sondern der Funkenschweif verschwand und der Komet zerteilte sich mit einem Male in zehn bis zwölf Lichtstrahlen, welche in allen wundervollen Farben des Spektrums leuchteten. Der Himmelskörper dürfte aus dem Sternbild des »Steinbockes« entstammt sein. Die Dauer war ungewöhnlich lang, 10 bis 15ˢ. Es war ein wahrhaft entzückender Anblick inmitten der Nachtstille, wie wir ihn wohl nie wieder schauen werden!«

Ich war später in der Lage, mich über die hier beschriebene Bahn am damaligen Standpunkte des Beobachters bei der Villa Waldeck zu orientieren. Letztere liegt nördlich, unmittelbar am Fuße des hier ziemlich steilen Abhanges. Durch Messung mit dem Gradbogen fand ich, daß das Meteor hier bereits eine Höhe von 35° erreicht haben mußte, wenn es gegen Süd hin sichtbar wurde. Die allgemein bekannten sieben Hauptsterne im »Großen Bären« standen zur Zeit zwischen 30° und 55° nördlich von West.

Oberösterreich und Salzburg.

7. Engelhartszell (31° 24′; 48° 30′). Richtung S—N, tiefblau, Dauer 5 bis 7ˢ. (Linzer Tagespost.)

8. Linz (31° 57′; 48° 18′). 11ʰ nachts bewegte sich ein wunderbares Meteor in der Richtung von S gegen NW. Es war anfänglich von intensiv bläulicher Färbung und löste sich schließlich in eine feurige Kugel auf. Die Erscheinung dauerte mehrere Sekunden. (Ebenda.)

8. Braunau am Inn (30° 42′; 48° 16′). Die Erscheinung wurde in der Richtung von Ranshofen gegen Ering zu beobachtet. Sie war kometenartig, leuchtete sehr schön, eine Feuerbahn zurücklassend und währte etwa 30ˢ. (Ebenda.) Ranshofen liegt südlich von Braunau, Ering in ENE. Die Angabe muß auf einem Irrtum beruhen.

9. Vöcklabruck (31° 19′; 48° 0′). Als ich von dem um 10ʰ 45ᵐ hier ankommenden Zuge gegen die Stadt zu über den Dörflberg ging, bemerkte ich ein prächtiges Meteor, welches

horizontal in der Richtung von SE gegen NW dahin flog. Es stellte eine feurig-weiße Kugel mit langem Schweif dar. Jene löste sich dann, einer Rakete gleich, in vier bis fünf kleinere Kugeln auf und erlosch. Dauer 10 bis 12^s. (Oberösterreichischer Gebirgsbote.)

10. Frankenmarkt (31° 5′; 47° 59′). Um 11^h 5^m (?) bemerkte man durch einige Sekunden ein prachtvolles Meteor. Es war eine hellgrün leuchtende Kugel, welche, wie es schien, Teile von rötlicher Färbung abstieß unter ruckweiser bogenförmiger Bewegung von SE gegen NW. Die Erscheinung war von überwältigender Schönheit. (Ebenda.)

11. Gmunden (31° 27′; 47° 55′). Das Meteor, welches als eine in grellweißem Licht erstrahlende Kugel erschien, fiel in der Richtung von SE—NW und zog einen breiten bläulichen und rötlichen Lichtstreifen in Form eines Kometenschweifes hinter sich. Dauer 3^s. (Salzkammergut-Zeitung.)

12. Salzburg (30° 53′; 47° 48′). Hier wurde das Meteor wenige Minuten vor 11^h aus S kommend sichtbar. Es nahm seinen Weg in weitem Bogen nach N und verschwand dort. (Linzer Tagespost.) Eine zweite Nachricht lautet: Um 10^h 50^m wurde hier ein selten schöner Meteorfall beobachtet. Das Meteor ging von Ost gegen West. Als es in der Mitte des Horizonts explodierte, streute es Strahlen und Sterne fächerförmig aus. Indem das Meteor seinen Weg fortsetzte, änderte es fortwährend die Farbe und erschien in rotem, grünem, blauem Licht. Dauer 3 bis 4^s. (Salzburger Zeitung.)

13. Radstadt (31° 8′; 47° 23′). Das große, kugelförmige, hell leuchtende Meteor teilte sich in drei Teile, ehe es verschwand. (Linzer Tagespost.)

Vorarlberg und Tirol.

14. Bregenz (27° 25′; 47° 30′). Ein Meteor von seltener Größe und Schönheit ist 10^h 50^m am »Pfänder« niedergegangen. Unter starkem Zischen und Prasseln fuhr eine kopfgroße Kugel von wunderbarer smaragdgrüner Farbe mit einem etwa meterlangen, funkensprühenden Schweife in der Richtung von SW gegen NE und fiel anscheinend in das Unterholz des Pfänder-

berges. Ein donnerartiger Knall und dann war von der Erscheinung nichts mehr zu sehen. (Österreichische Volks-Zeitung.) Das Azimut der Spitze des Pfänder (Triangulierungszeichen) vom Hauptplatze der Stadt beträgt nach dem Plane 260·8°. Der zugehörige Höhenwinkel ist ungefähr 15°.

15. Kufstein (29° 50′; 47° 35′), Kirchbichl (29° 45·5′; 47° 31′) und Wörgl (29° 44′; 47° 29′). Kurz vor 11^h entstand am Nachthimmel plötzlich eine auffallende Helligkeit. Diese war der Vorläufer einer nun erscheinenden, langsam von SE nach NW ziehenden, großen, helleuchtenden Feuerkugel mit Schweif. Plötzlich zersprang das Meteor und streute Teile raketenartig in der Richtung seiner bisherigen Flugbahn über den Himmel. Es war eine prachtvolle Naturerscheinung, wie man sie nur selten zu sehen bekommt. (Tiroler Grenzbote.)

16. Terfens (29° 19′; 47° 18′). Als wir um $10^h\ 40^m$ den Ort gegen Nord passierten, ging in östlicher Richtung eine große, glühende, flaschenförmige Masse nieder, welche das Terrain ungefähr 7^s lang taghell beleuchtete. (Innsbrucker Nachrichten.)

17. Innsbruck (29° 5′; 47° 16′). Nach $^3/_4 11^h$ wurde hier ein prächtiges Meteor beobachtet, das sich in der Richtung von SE—NW gegen die »Frauhitt« hin bewegte. (Bote für Tirol und Vorarlberg.) Die »Frauhitt« liegt in der Tat nordwestlich von Innsbruck. Das Meteor kann aber hier nicht bis auf die Westseite gekommen sein. Es ist also mit dieser Angabe wie gewöhnlich nur die Bewegungsrichtung durch ungefähre Bezeichnung der Knoten am Horizont gemeint.

18. Brennerbad (29° 10′; 46° 58′). Kurz vor 11^h beobachtete ich, durch eine plötzliche intensive Helle aufmerksam gemacht, ein von S nach N nach fallendes prächtiges Meteor, das mit einem langen Schweif wie eine mächtige Rakete aussah. Leider verschwand die Erscheinung allzuschnell hinter den hohen Bergen. (Innsbrucker Nachrichten.)

19. Innichen (29° 56′; 46° 44′). Um $10^h\ 48^m$ war hier eine merkwürdige Erscheinung am gestirnten Himmel zu beobachten. Über das ganze Tal wurde nämlich plötzlich von S nach N eine große, grell leuchtende Feuerkugel sichtbar, welche in vielen Tausenden von Strahlen ihr Licht hinabwarf und die

ganze Gegend auf einige Sekunden taghell beleuchtete. Im nächsten Moment zersprang die Kugel lautlos in viele Teile und einige Minuten später waren noch leuchtende Feuerkörper sichtbar, die sich, langsam verglühend, zur Erde gesenkt haben mochten. (Deutsches Volksblatt.)

Kärnten.

20. Klagenfurt (31° 58′; 46° 37′). Das Meteor kam um etwa 11^h aus der Umgebung des »Arcturus« und zog über das Sternbild der Jagdhunde zwischen dem »Großen Bären« und Kleinen Löwen auf die »Zwillinge« zu, ohne jedoch diese zu erreichen. Es hatte die 10- bis 20fache Intensität Jupiters und zeigte sich als kleine Scheibe, die einen glühenden Schweif nach sich zog. Zeitweise explosionsartige Erscheinungen riefen den Eindruck hervor, als ob eine starke Rakete vorüberziehe. Die Bahn war schwach gekrümmt und hatte einen schwachen Winkel gegen den Horizont, etwa 10°. Die Erscheinung verschwand ohne eine Schlußexplosion. (Neue Freie Presse.)

21. Gailitz (31° 21·5′; 46° 33′). Um 11^h nachts wurde hier in der Richtung S—N eine große Feuerkugel mit langem Schweif beobachtet, die intensives Licht ausstrahlte und etwa 2 Minuten (?) sichtbar blieb. (Neues Wiener Tagblatt.)

Niederösterreich.

22. Gerasdorf (33° 45′; 47° 47′). Herr Lehrer Leopold Großkopf in Saubersdorf berichtete den »Wiener-Neustädter Nachrichten« folgendes: Am Abend des 29. Juni bemerkte ich außerhalb Gerasdorf am Himmel ein prächtiges Meteor, welches anfangs halbe Vollmondsgröße hatte. Es bewegte sich vom »Schneeberg« bis ungefähr zur »Hohen Wand«, und zwar in südnördlicher Richtung. Das Meteor hatte einen glänzend weißen Kern, dem ein grünlicher Schweif folgte, bis sich das Ganze auflöste, indem es immer kleiner wurde. Dauer ungefähr 25^s. Das Azimut der Schneebergspitze aus Gerasdorf beträgt 85°. Die »Hohe Wand« ist bekanntlich sehr ausgedehnt. Für den Placklesberg am südlichen Ende wäre das Azimut noch 115°.

23. Lunz (32° 42′; 47° 52′). Um 11^h nachts war ein Meteor sichtbar, zuerst weiß, dann gelblich und rot, intensiv strahlend. Dauer etwa 10^s. Die Flugbahn war von SW nach NE gerichtet. (Fremdenblatt.)

24. Wien (34° 3′; 48° 12′). Etwa 5^m vor 11^h zeigte sich am westlichen Himmel ein prächtiges Meteor, das rot glühenden Leuchtkugeln glich, die in horizontaler Richtung einem Lichtkern entsprühten. Nach Ablauf weniger Sekunden erlosch die raketenähnliche Erscheinung. (Wiener Deutsches Tagblatt.)

25. Pöchlarn (32° 52′; 48° 13′). Um $10^h\ 55^m$ war am nächtlichen Himmel ein wundervolles Meteor zu sehen, welches, hellstrahlend, die Richtung von Süd nach Südost (?) nahm. Es dürfte volle 15^s zu sehen gewesen sein. (Neue Freie Presse.)

26. Krems (33° 16′; 48° 24·5′). Gegen 11^h wurde hier ein schönes Meteor gesehen. Es zeigte sich am westlichen Himmel und nahm im langsamen Fall als helleuchtende, große, grüne Kugel mit anhängender feurigen, kleineren die Richtung von S nach N. (Neue Freie Presse.)

27. Gmünd (32° 39′; 48° 46·5′). Nachts 11^h konnte man ein herrliches Naturschauspiel beobachten. Am südöstlichen Himmel fielen zuerst rasch nacheinander vier bis fünf Sternschnuppen. Hierauf erhellte sich der südöstliche Himmel und ein weiß leuchtender Körper flog in der Richtung SE—NW zuerst horizontal, dann gegen NW schief absteigend. Der leuchtende, weißglühende Körper erhielt auf halber Flugbahn einen feurigen, keilförmigen Schweif, der, immer länger werdend, zuerst weiß, dann orange, hierauf rot, dann dunkelrot erstrahlte, sich endlich vom Hauptkörper trennte und im NW (?) verschwand. Dauer 8 bis 10^s. (Österreichische Volks-Zeitung.)

Mähren und Böhmen.

28. Pohrlitz (34° 12·5′; 48° 59′). Von hier schrieb Herr Grundbesitzer Franz Brunda der »Österreichischen Volks-Zeitung«: Vor 11^h beobachtete ich westlich durch etwa 10^s ein Meteor von außerordentlicher Größe und Lichtstärke. Die Flugbahn war von SE nach NW gerichtet.

29. Schönbach (30° 4′; 50° 15′). Gegen 11^h wurde das Aufleuchten eines Meteors beobachtet, welches in der Richtung

von SE gegen NW zog. Das Leuchten dauerte ungefähr 9^s und war von solcher Intensität, daß man dachte, es werde eine elektrische Bogenlampe von wunderbarer grüner Färbung entzündet. (Ascher Zeitung.)

Für die Epoche des Falles habe ich im Mittel aus den bestimmteren Angaben genommen: 1905, Juni 29, $10^h 52^m$ mittlere Dresdener Zeit oder $9^h 57^m$ mittlere Greenwicher Zeit.

Geographische Lage und lineare Höhe des Endpunktes der Bahn durch die Atmosphäre.

Zur Bestimmung dieses Punktes liegen außer der Beobachtung des Herrn Prof. Dr. Toepler in Dresden nur spärliche Angaben vor. Die meiste Berücksichtigung scheint zunächst noch die Beschreibung der scheinbaren Bahn in Bezug auf die nächstgelegenen Sternbilder aus der Klagenfurter Mitteilung (20) zu verdienen, nur ist dort der Endpunkt nicht bezeichnet. Nimmt man jedoch für diese letztere Beobachtung einen Großkreis an, welcher ihr der Lage nach entspricht, so ist es nach bekannten Regeln leicht, in diesem denjenigen Punkt zu ermitteln, welcher der Beobachtung des Endpunktes in Dresden entspricht, woraus dann Lage und Höhe des letzteren sich ergibt.

Für die Klagenfurter scheinbare Bahn wurde, um der Beobachtung möglichst nahe zu kommen, der größte Kreis genommen, welcher α Bootis mit der Mitte zwischen α und β Geminorum verbindet, obwohl diese beiden Sterne, wie überhaupt der größere Teil der »Zwillinge«, zur Beobachtungszeit bereits unter dem Horizont waren. Es ist anzunehmen, daß der Beobachter die Richtung nach der ihm bekannten Lage der Konstellation geschätzt hat. Demnach wäre diese bestimmt durch I: $\alpha = 212{\cdot}9°$ $\delta = +19{\cdot}7°$, II: $\alpha = 113{\cdot}5°$ $\delta = +30{\cdot}2°$, worin II selbstverständlich nicht der Endpunkt ist.

Es stellt sich unter dieser Voraussetzung dann heraus, daß derjenige Punkt in dieser Bahn, welcher dem Dresdner Endpunkt entspricht, aus Klagenfurt in 128·5° Azimut und 14·5° Höhe zu nehmen wäre. Durch Verbindung beider Beobachtungen würde man weiters den End- oder Hemmungspunkt über der Gegend von Nußdorf, südlich von Rosenheim und Neu-Beuern in Bayern, unweit der Tiroler Grenze, erhalten.

Im Vergleiche mit den Meldungen aus den viel näher gelegenen Orten Reichenhall (6) und Weilheim (4), wie beiläufig sie auch lauten, erscheint dieser Punkt jedoch zu weit südlich, da er von Reichenhall fast genau westlich, statt nordwestlich, von Weilheim sogar noch südlich von Ost, statt nordöstlich liegt. Auch die Beobachtung aus Bregenz (14) sowie besonders jene aus Gerasdorf (22) sprechen für eine mehr nördliche Lage.

Ich habe daher nebst den früher angeführten Beobachtungen aus Dresden und Klagenfurt für den Endpunkt noch folgende, den dortigen Angaben entsprechende Azimute in Rechnung gezogen: Weilheim (4) $A = 230°$, Reichenhall (6) $A = 137·5°$ und Bregenz (14) $A = 260·8°$. Die Beobachtung aus Gerasdorf scheint viel mehr die Bewegungsrichtung anzudeuten als den Endpunkt, denn sie weist wohl allzuweit nördlich.

Bei der Verbindung dieser Angaben muß man den offenbar sehr genauen Bezeichnungen aus Dresden, gegenüber den übrigen nur beiläufigen, ein unverhältnismäßig größeres Gewicht beilegen, da dort die mittlere Unsicherheit des Azimuts von 17° 50′ mit $\pm 1/4°$ angesetzt erscheint, während diese hinsichtlich der andern Beobachtungsorte sicher nicht unter 5° zu nehmen ist. Also wäre das Gewicht der Dresdner Beobachtung 400mal so groß als für die übrigen zu nehmen. Man kann das praktisch als gleichbedeutend nehmen mit der Forderung, daß die in Dresden angegebene Richtung ohne Änderung, d. h. also, streng genommen, mit dem Gewicht ∞ beizubehalten wäre.

Aus der Zusammenfassung dieser Angaben erhielt ich dann den Hemmungspunkt über der Gegend von 29° 58·5′

östlicher Länge von Ferro und 48°5' nördl. Breite, 7 Kilometer Ostnordost von Wasserburg am Inn in Bayern.

Für die Bestimmung der linearen Höhe kann aus dem vorliegenden Beobachtungsmaterial nur der in Dresden angegebene Höhenwinkel von 4° 40′ maßgebend sein. Da die betreffende Entfernung 345 *km* beträgt, ergibt sich hieraus die lineare Höhe des Hemmungspunktes über der Erdoberfläche zu 37·4 *km*, ein dem durchschnittlichen Betrag für derartige (detonierende) Erscheinungen sehr nahe kommender Wert.

Die Verbesserungen der verwendeten Azimute betragen

	ΔA (berechnet—beobachtet)
für Dresden	0·0°
» Reichenhall	— 3·3
» Bregenz	+ 0·9
» Klagenfurt	+ 8·0
» Weilheim	+19·7

Der letzteren Angabe liegt nur eine beiläufige und noch dazu etwas unklare Schätzung zu Grunde.

Unter Voraussetzung, daß die Richtung aus Dresden als verbesserungsfrei beibehalten wird, sind die mittleren Fehler der vorhin angegebenen geographischen Koordinaten des Endpunktes in Länge $\pm$ 4·1′ oder 5·1 *km* und in Breite $\pm$ 8·6′ oder $\pm$ 16 *km*. Die mittlere Genauigkeit der Höhenbestimmung läßt sich aus dem Ergebnisse nicht beurteilen, da nur ein Resultat vorliegt.

Scheinbarer Radiationspunkt.

Auf Grund der in Dresden beobachteten scheinbaren Bahn in der Nähe des Horizonts, welche mit erfreulicher Genauigkeit festgelegt wurde, kann man mit einer geringeren Anzahl anderer Beobachtungen, welche gute Einschnitte liefern, das Auslangen finden. Bei der Dresdener Beobachtung ist die Bahnneigung abgeschätzt und das Azimut für den Punkt der ersten Wahrnehmung bezeichnet, woraus sich der Ort ergibt. Sonst lassen sich nur noch die in Reichenhall und Klagen-

furt angegebenen Bahnbogen verwerten, wobei als zweiter Punkt der berechnete scheinbare Ort des ausgemittelten Endpunktes gesetzt wurde. Man erhält auf diese Weise folgende drei scheinbare Bahnen:

	I		II	
	α	δ	α	δ
Dresden	251·8°	—33·6°	238·9°	—32·2°
Reichenhall....	260·5	— 6·8	163·4	+52·3
Klagenfurt....	212·9	+19·7	139·6	+37·6

Es liegt noch eine ziemlich große Anzahl roher Schätzungen der scheinbaren Bewegungsrichtung der Feuerkugel nach den sogenannten Weltgegenden vor. Diese geben, sofern sie zutreffend sind, den scheinbaren Bahnknoten am Horizont an, welcher selbstverständlich im allgemeinen je nach der Lage der Beobachtungsorte gegen die Bahn, verschieden sein wird. Wenn jedoch der Radiant im Horizont liegt, wird die Richtung für alle Beobachter dieselbe bleiben. In unserem Falle befand er sich nach der verläßlichen Beobachtung aus Dresden gewiß in geringer Höhe und daher wird, wenigstens für die Beobachtungsorte unweit der Horizontalprojektion der Bahn, annähernd dasselbe gelten.

Man kann die verschiedenen Angaben dann in einem Mittelwert zusammenfassen, besonders, wenn jene ungefähr gleichmäßig von beiden Seiten der Bahntrasse herstammen. Unter 18 geeigneten Schätzungen befinden sich hier 8, in welchen die Richtung aus Südost, und 10, in welchen sie aus Süd bezeichnet erscheint, woraus man im Mittel auf Südsüdost oder etwas genauer auf $A = 340°$ mit einer mittleren Unsicherheit von 5 bis 6° für den Knoten des Bahnvertikals schließen könnte.

Im Endpunkt gedacht, würde dieser Vertikal zur Fallzeit durch die Koordinaten:

$$\text{I: } \alpha = 279° \; \delta = -21°, \quad \text{II: } \alpha = 285° \quad \delta = -40°$$

bestimmt sein, welche ich den vorstehenden drei Bahnbogen mit dem Gewicht 1 beigesellt habe, während Reichenhall und

Klagenfurt je das Gewicht 4 erhielten und Dresden mit Gewicht 9 in Rechnung kam. Die letztere Beobachtung kann nämlich in Bezug auf die Bahnlage nicht als so gewichtig wie für den Endpunkt gelten, weil für die Bahnlage nur die abgeschätzte scheinbare Neigung in Verbindung mit dem Endpunkt und dem Azimut des ersten Punktes in Betracht kommen kann. Daß sie wesentlich genauer ist als die andern, liegt dagegen schon in der Natur der Sache.

Aus diesen vier Bahnbogen ergab sich für den scheinbaren Radianten:

$$\text{Rektaszension} \ldots\ldots \alpha = 283° \pm 2°$$
$$\text{Deklination} \ldots\ldots\ldots \delta = -30° \pm 0{\cdot}5°$$

Da nur vier Bahngleichungen zur Verwendung kommen konnten, ist den beigefügten mittleren Fehleren kein allzu großes Gewicht beizulegen; doch dürfte die Unsicherheit des Resultates schwerlich groß sein, da die Übereinstimmung der Beobachtungen eine recht günstige ist.

Die nötigen Verbesserungen am Punkt I sind nämlich durchwegs gering. Für Dresden wäre die berechnete Deklination $-33{\cdot}2°$ statt der angenommenen $-33{\cdot}6°$ ($\Delta\,\delta = +0{\cdot}4°$) zu setzen; in Reichenhall beträgt die berechnete Höhe in Süd $36{\cdot}8°$ statt $35°$ ($\Delta\,h = +1{\cdot}8°$); in Klagenfurt ging das Meteor $3{\cdot}9°$ südlich an Arcturus vorbei ($\Delta\,\delta = -3{\cdot}9°$) und das Azimut der Bahn ergibt die Rechnung zu $339{\cdot}1°$ statt $340°$ ($\Delta\,A = -0{\cdot}9°$).

Aus dem abgeleiteten Radianten ergibt sich für die Bahnlage gegen die Erde am Endpunkt und zur Fallzeit, nämlich $A = 339{\cdot}1°$ (wie schon oben bemerkt) und $h = 9{\cdot}0°$. Die Feuerkugel durchschnitt die Atmosphäre der Erde daher in einer sehr nahe aus SSE gerichteten Bahn, deren Neigung gegen den Horizont des Endpunktes nur $9°$ betrug.

Aufleuchten, Bahnlänge, Geschwindigkeit.

Auch im vorliegenden Falle wurde das Meteor wie gewöhnlich von den Beobachtern ungleichzeitig bemerkt und demnach ein kürzeres oder längeres Bahnstück wahrgenommen. In

keiner Beobachtung ist aber der gesehene Bahnbogen sowie auch die zugehörige Dauer so bestimmt bezeichnet als in jener des Herrn Prof. Dr. Toepler in Dresden.

Nach dieser Beobachtung wurde das Meteor zuerst bemerkt, als es sich 62·7 *km* über der Erdoberfläche in 30° 40·2′ östlicher Länge v. F. und 46° 50·2′ nördlicher Breite befand, d. i. über einem Punkte der Kärntner Zentralalpen (westlich der Kreuzeckgruppe), etwa 9 *km* nördlich von Oberdrauburg. Von hier verlief die Bahn etwas westlich an Stall im Mölltal und ebensoviel östlich an Döllach an der Möll vorbei und westlich von Zell am See, genau über das Hinterhorn der Loferer Steinberge, dann über Frauenwörth im Chiemsee zum Endpunkt.

Die Länge dieses in Dresden wahrgenommenen Bahnteiles beträgt 151 *km* mit einer Unsicherheit, welche kaum 10% dieser Größe übersteigen wird. Die zugehörige Dauer wurde von dem Herrn Prof. Dr. Toepler zu $\geqq 2^s$ geschätzt. Obwohl anzunehmen ist, daß diese Angabe einen 3^s übersteigenden Wert ausschließt, wünschte ich doch in Bezug auf diese sehr wichtige Beobachtung jeden Zweifel zu vermeiden und bat deshalb Herrn Prof. Toepler um eine nähere Interpretation hinsichtlich der oberen Grenze. Der Genannte war so freundlich, mir ohne Zögern die bestimmte Aufklärung zu geben, daß, insofern es sich um einen 2^s übersteigenden Wert handelt, dieser jedenfalls zwischen 2^s und 3^s, jedoch näher an 2^s zu nehmen wäre.

Dieser Feststellung dürfte durch die Annahme von $2{\cdot}4^s$ für die Dauer ungefähr entsprochen sein, woraus sich, in Verbindung mit der Länge von 151 *km* für die geozentrische Geschwindigkeit, der ansehnliche Betrag von 62·9 *km* ergibt.

Es liegt sonst nur noch eine Beobachtung vor, welche den Anfangspunkt wenigstens ungefähr, aber doch viel unbestimmter bezeichnet, nämlich jene aus Klagenfurt (20). Angenommen, daß dort das Meteor wirklich schon in der Nähe von Arcturus (und zwar nach der verbesserten Bahn, 3·9° südlicher) erblickt wurde, so befand es sich in diesem Moment noch 72·3 *km* über der Gegend von Chiusaforte

und 204 *km* vom Ende entfernt. Leider fehlt gerade in dieser Beobachtung die Dauerangabe.

Unter den sonst noch vorliegenden Nachrichten über die Dauer befindet sich keine, in welcher mit hinreichender Wahrscheinlichkeit auf die Länge des zugehörigen Bahnteiles geschlossen werden könnte. Auch sind darunter offenbar ganz ungewöhnlich starke Überschätzungen der Dauer vorgekommen; so z. B. in (21): 2^m (vielleicht ein Schreibfehler!), in (4): 30^s, (22): 25^s, (5): 20^s u. s. w.; doch kommen auch Schätzungen vor, welche mit jener aus Dresden nahe genug übereinstimmen, so aus (8) und (11): 3^s und aus (12): 3 bis 4^s. Diesen könnte noch beigezählt werden (19) »einige« und (24) »wenige« Sekunden.

So bedeutende Meteore werden häufig an einzelnen Orten schon wahrgenommen, wenn sie sich noch in viel größeren (170 bis 200 *km*) Höhen befinden. Würde dies hier auch hin und wieder der Fall gewesen sein, dann wäre freilich die gesehene Bahnlänge 5 bis 6 mal so groß zu nehmen als die in Dresden beobachtete und eine Dauerangabe von etwa 12^s nicht unbedingt als überschätzt zu nehmen. Allein hiefür fehlen im gegenwärtigen Falle irgendwelche plausible Anhaltspunkte. Es kann daher aus dem vorliegenden Material kein Zahlenwert für die Geschwindigkeit abgeleitet werden, welcher dem aus der Dresdener Beobachtung ermittelten auch nur entfernt an Sicherheit gleichzustellen wäre.

Gestalt und Größe der Feuerkugel, Farbe und Intensität des Lichtes, Teilung, Detonationen.

Hinsichtlich der Gestalt des Meteors lauten die Angaben nahezu übereinstimmend in dem Sinne, daß es als Kugel bezeichnet wird, welche einen Schweif nachzog. Letzterer wird (27) als keilförmig bezeichnet, andrerseits aber auch (11) der Form nach mit einem Kometenschweif verglichen. Auch wird die Gesamterscheinung als »flaschenförmige Masse« (16), dann wieder kometenartig (8) beschrieben. In der letzteren Beobachtung ist auch von einer »zurückbleibenden Spur« die

Rede, deren sonst nirgends Erwähnung geschieht, da überall hervorgehoben wird, daß der Schweif der Kugel folgte.

Die Größe der Feuerkugel (der leuchtenden Sphäre) läßt sich nach den Angaben aus München (2), wo sie als »kolossal», »fast« der Mondscheibe gleichkommend und aus Hausham (5) »scheinbar dem Monde gleich« bezeichnet wurde, annäherungsweise ermitteln. Werden die betreffenden Winkel (für (2) drei Viertel des scheinbaren Monddurchmessers genommen) auf die kürzesten Entfernungen bezogen, so liefert die erste Beobachtung 458 *m*, die zweite 603 *m* für den linearen Durchmesser der Lichtsphäre. Das Mittel wäre also 530 *m*, ein Wert, welcher das Meteor unter die größeren Erscheinungen dieser Art einreiht. Die Angabe aus Gerasdorf (22), aus welcher man auf einen Durchmesser von 1200 *m* schließen müßte, beruht offenbar auf starker Überschätzung.

Für die Länge des Schweifes liegt nur die eine brauchbare Schätzung aus Dresden vor. Jene schien dort, wegen des stumpfen Winkels der Fluglinie gegen die Sehlinie, bis auf etwa $^1/_4{}^\circ$ verkürzt, was einer wirklichen Länge von 3 bis 4 *km*, d. i. dem Sechs- bis Achtfachen des Kugeldurchmessers entspricht. Wenn in den Berichten (3), (9), (18) und (21) von einem »langen Schweif« die Rede ist, so ist damit wohl nichts Bestimmtes über die Länge gesagt; aber es mag sein, daß die rückwärtigen schwächer leuchtenden Partien in Dresden wegen der großen Entfernung und bei der Trübung in der Nähe des Horizontes nicht wahrgenommen werden konnten.

Bemerkenswert ist noch die Mitteilung aus Gmünd (27), daß sich der Schweif erst in der Mitte der Flugbahn gebildet hat und dann immer länger wurde.

Bezüglich der Lichtfarbe der Feuerkugel sind, außer glänzend weiß, die Nuancen von grün unter den Bezeichnungen vorherrschend. Seltener findet sich diesmal die bläuliche Farbe angegeben. Die Farben gelb und rot beziehen sich offenbar auf späte Stadien. Dafür spricht auch die Aufeinanderfolge beim angegebenen Farbenwechsel. »Anfangs weiß, dann blaßblau, zuletzt rot« (5) und »zuerst weiß, dann gelblich und rot« (23).

Der Schweif wird ausdrücklich als rot (rosa, karmin, feuerrot) und funkensprühend oder aus Funken gebildet bezeichnet.

Die Lichtstärke wird an zwei Orten, Reichenhall (6) und Innichen (19) durch die Bemerkung charakterisiert, daß die Umgebung »taghell« beleuchtet war. Die Entfernungen in gerader Luftlinie von den nächsten Punkten der Meteorbahn betragen für die beiden Beobachtungsorte 51 *km*, beziehungsweise 86 *km*. Letztere betrifft aber weit zurückliegende Partien der Bahn, an welchen die Feuerkugel vermutlich noch nicht sehr große Lichtstärke entfaltet hatte. Vom Hemmungspunkt derselben liegt Innichen jedoch 154 *km* entfernt. Nicht selten werden ähnliche Lichtwirkungen noch in solchen Entfernungen hervorgerufen.

In Schönbach (29), welches vom Endpunkt 245 *km* entfernt und weit nördlich der Bahn liegt, wurde die Lichtentfaltung noch mit der Wirkung elektrischer Bogenlampen verglichen. »Intensives Licht« melden (18) und (21). Klagenfurt (20) gibt dagegen nur vielfache Lichtstärke Jupiters an und in Dresden (1) wird das Meteor nur mehr als doppelte Marsgröße übersteigend, also etwa einer sehr hellen Sternschnuppe entsprechend, geschätzt.

Die Helligkeit und Größe wird übrigens in Dresden intermittierend mit 4 bis 5 Maxima beschrieben und in einer Skizze dargestellt. Ähnlich klingt die Bemerkung aus Klagenfurt (20), daß sich zeitweise explosionsartige Erscheinungen während des Laufes zeigten.

Der atmosphärische Widerstand verursacht eine raschere Erwärmung der Oberfläche und früheres Aufleuchten der kleineren Partikel, welche dann oft auch ganz aufgezehrt werden. Geschieht dies, ehe andere Teile des durch eben diesen Widerstand in die Länge gezogenen Schwarmes, Teile von höherer Größenordnung, zum hellen Erglühen gelangen, so kann eine vorübergehende Herabsetzung der gesamten Lichtstärke für einige Momente eintreten. Dieser Vorgang kann sich wiederholen, aber man darf dabei nicht etwa an wiederholte »Explosionen« desselben Körpers denken.

Daß es im vorliegenden Falle auch wieder, wie gewöhnlich, ein Schwarm von Körperchen, ein Meteoritenwölkchen war, welches durch seinen Eintritt in die Atmosphäre die Erscheinung der Feuerkugel hervorrief, bestätigen die

Beobachtungen über die Teilung und die Absonderung von Massen in der Bahn.

Nur quantitativ verschieden sind in dieser Hinsicht die Berichte (3), (5), (9) und (13), in welchen die schließliche Teilung in 2 bis 5 Stücke erwähnt wird. Wenn aus Hausham (5) mitgeteilt wird, daß dies auf halbem Weg geschah, so ist zu berücksichtigen, daß an diesem dem Hemmungspunkt nahen Beobachtungsort wohl nur der letzte Bahnteil aufgefaßt wurde.

In (6) heißt es, daß die Feuerkugel sich in »10 bis 12 Lichtstrahlen teilte«, in (12), daß, als sie »explodierte«, Strahlen und Sterne fächerförmig ausgestreut wurden. Genauer bezeichnet ist dies durch die Nachricht in (15), daß »die Teile in der Richtung der bisherigen Flugbahn« angeordnet wären. In (10) wird gemeldet, daß die Kugel Teile von sich abstieß. Die Nachricht aus Wien (24), daß (vermutlich gegen das Ende) »rotglühende Leuchtkugeln einem Lichtkerne entsprühten«, ist eine der wenigen aus so großer Entfernung, in welchen noch von solchen Einzelheiten die Rede ist.

Die Beobachtungen aus Gmünd (27), Pohrlitz (28) und Schönbach (29) enthalten keine Andeutungen über Teilung oder Explosion, obwohl die Beschreibung des Phänomens in der ersten Beobachtung sehr charakteristisch ist. Gerasdorf (22) berichtet, daß das Meteor sich auflöste, indem es immer kleiner wurde. Herr Prof. Dr. Toepler in Dresden (1) gibt in seiner genauen Schilderung an: »Erlöschen ohne besonders helles Aufleuchten, kein Zerplatzen« und auch im Bericht aus Klagenfurt (20) heißt es: »die Erscheinung verschwand ohne Schlußexplosion«.

So bedeutend sind die Abstufungen, welche durch die Entfernung, durch die Lage in der Nähe des Horizonts und andere Umstände in ein und derselben Erscheinung hervorgerufen werden können, daß man in minder sichergestellten Fällen leicht versucht wäre zu bezweifeln, ob sich die Beobachtungen auf dasselbe Objekt beziehen.

Nach dem Erlöschen der Feuerkugel wurden in Hausham (5) Detonationen vernommen, worüber vorne Näheres angeführt ist. Es liegt wenigstens kein Grund vor, am

Zusammenhang der dort erwähnten Schallwahrnehmungen mit der Erscheinung zu zweifeln. Allerdings ist das angegebene Intervall von 4 bis 5 Minuten zwischen Licht und Schall etwas zu groß. Für die Entfernung des Hemmungspunktes von rund 62 *km* konnte es etwas über drei Minuten betragen haben. Da aber der Beobachter die Dauer der Lichterscheinung mit 20^s ganz gewaltig überschätzt hat, mag Ähnliches in viel geringerem Maße auch bei diesem Intervall vorgekommen sein.

Allerdings lag der Hemmungspunkt von München (2) und Reichenhall (6) fast genau ebensoweit entfernt als von Hausham. Aus diesen beiden Orten wird jedoch über Schallwahrnehmungen nichts berichtet; allein in solchen Fällen sind bestimmte positive Angaben, welche nach den Nebenumständen den Charakter innerer Wahrscheinlichkeit besitzen, gewichtiger als Berichte, in welchen solche fehlen. Nach den Schilderungen aus Hausham waren übrigens diese Detonationen auch dort nicht sehr heftig zu vernehmen und sie konnten daher an andern Orten wohl unbemerkt geblieben oder wegen des langen Intervalls nicht auf die Meteorerscheinung bezogen worden sein.[1]

Kosmische Verhältnisse.

Die oben abgeleiteten Koordinaten des scheinbaren Radianten $\alpha = 283°$ $\delta = -30°$ werden zunächst unverändert beibehalten, weil bei der nachgewiesenen großen geozentrischen

---

[1] Ein recht lehrreiches Beispiel für die Anführung von Sinneswahrnehmungen, welche entweder gar nicht gemacht wurden oder doch außer Zusammenhang mit der Erscheinung standen, findet man aus Bregenz (14), von wo der Endpunkt nicht weniger als 196 *km* entfernt lag. Durch die Ähnlichkeit mit Feuerwerkskörpern getäuscht und offenbar ganz ohne Erfahrung über die stets sehr bedeutende Entfernung solcher Lichtquellen, dachte der Beobachter wahrscheinlich, daß es dabei ohne gleichzeitiges »Zischen und Prasseln« nicht abgehen könne, nahm vermutlich an, daß er dies überhört hatte und vervollständigte seine Beobachtung durch eine ihm notwendig scheinende Ergänzung, wobei dann auch noch der »donnerartige Knall«, unter welchem die Erscheinung verschwand, hinzukam. Die meisten solcher Berichte, denen jede tatsächliche Grundlage gänzlich fehlt, an welchen es aber dennoch in keinem größeren Material mangelt, dürften wahrscheinlich in ähnlicher Weise, ohne Absicht irrezuführen, entstehen.

Geschwindigkeit der Einfluß der Erdschwere (die sogenannte Zenitattraktion) weit innerhalb der Fehlergrenzen liegt. Auf die Ekliptik bezogen, erhält man die Länge $\lambda = 281 \cdot 3°$ und die Breite $\beta = -7 \cdot 1°$.

Die Sonnenlänge betrug zur Fallzeit $97 \cdot 4°$ und dies ist zugleich auch die Länge des aufsteigenden Knotens der Meteorbahn auf der Ekliptik. Daraus folgt ferner, daß die scheinbare Elongation des Radianten vom Apex der Erdbewegung 86° betrug.

Alles Weitere ist nun von der Annahme für die geozentrische Geschwindigkeit abhängig. Läßt man für diese den abgeleiteten Wert $62 \cdot 9$ *km* gelten, so erhält man hieraus leicht die heliozentrische Geschwindigkeit zu $67 \cdot 8$ *km* oder $2 \cdot 29$ in der bekannten Einheit. Die reelle Halbachse der betreffenden Hyperbel $a = -0 \cdot 39$, die Neigung der Bahn gegen die Ekliptik $i = 17 \cdot 4°$; rechtläufig.

Die übrigen Elemente sind hier ohne Belang. Wichtig zur Vergleichung mit andern Fällen ist dagegen die Bestimmung der Koordinaten desjenigen Punktes, welcher die Richtung bezeichnet, in der diese Meteoriten aus dem Weltraum in das Sonnensystem gelangt sind.

Unter Voraussetzung der früher abgeleiteten Geschwindigkeit würde man diesen kosmischen Ausgangspunkt, bezogen auf die Ekliptik, in $252 \cdot 8°$ Länge und $7 \cdot 4°$ südlicher Breite finden. Dieses Ergebnis wird stark durch die Annahme für die Geschwindigkeit beeinflußt. Obwohl die wirkliche Geschwindigkeit, mit Rücksicht auf die Verminderung in der Atmosphäre, eher größer als kleiner gegenüber der hier gefundenen anzunehmen ist, gebe ich die entsprechenden Koordinaten des Ausgangspunktes im nachstehenden auch für geringere Geschwindigkeiten, bis zur parabolischen herab:

Angenommene heliozentrische Geschwindigkeit v	Heliozentrische Koordinaten des kosmischen Ausgangspunktes	
	Länge	Breite
$\sqrt{2}$ (Parabel)	$194 \cdot 5°$	$-8 \cdot 0°$
$2 \cdot 0$	$246 \cdot 6$	$-7 \cdot 5$
$2 \cdot 5$	$255 \cdot 6$	$-7 \cdot 3$

Für noch größere Geschwindigkeiten werden die Änderungen immer geringer.

Für die Breiten von Mitteleuropa gehört das Auftreten eines so weit südlichen Radiationspunktes in $\alpha = 283\ \delta = -30°$ zu den Seltenheiten oder, genauer gesagt, dessen Nachweisung durch Beobachtungen gelingt nicht leicht wegen seines kleinen Tagbogens und, soweit Sternschuppen in Betracht kommen, auch wegen der geringen Erhebung über den Horizont.

Unter den von Schmidt [1] aus den Beobachtungen in Athen abgeleiteten Sternschnuppenradianten befinden sich zwei, welche mit dem unserer Feuerkugel zu vergleichen wären, nämlich:

	α	δ
Für Juli 20. — 31.....	283°	— 27°
» August 3. — 31.....	286°	— 26°

Die Wahrscheinlichkeit eines Zusammenhanges ist hier in der Tat nicht gering. Es könnte auffallen, daß, ungeachtet des Intervalls der Fallepochen von etwa zwei Monaten, die Koordinaten aller drei Punkte um kaum mehr voneinander abweichen, als die in der Natur der Sache liegende Unsicherheit ihrer Ermittlung voraussetzen läßt. Allein, dies ist völlig begründet und spricht eben für die Zusammengehörigkeit; denn bei der Beziehung zur Knotenlänge, welche hier besteht, ist in der Tat die tägliche Verschiebung des Radianten ganz besonders gering, wenn die heliozentrische Geschwindigkeit wesentlich über die parabolische hinausgeht, was wenigstens für das Meteor vom 29. Juni 1905 außer Zweifel gestellt ist.

Man kann z. B. ohne Schwierigkeiten [2] finden, daß für die Geschwindigkeit $v = 2 \cdot 5$, welche nur wenig größer ist als die oben nachgewiesene, die Veränderungen eines Radianten in dieser Lage von Ende Juni bis Ende Juli sowohl in Länge als in Breite nur wenig mehr als 1° und von Ende Juni bis Ende August nicht ganz 3° betragen. Diese wirklichen Veränderungen

---

[1] Siehe auch Denning, General-Katalog p. 274, Nr. 221, unter x Sagittarids.

[2] Siehe meine in der Fußnote der vorhergehenden Abhandlung p. 79, zitierten »Theoretischen Untersuchungen« etc.

sind also so klein, daß sie von den unvermeidlichen Fehlern tatsächlich verdeckt werden können.

Ob die Zusammengehörigkeit dieser Radianten, welche in drei sehr verschiedenen Epochen durch Beobachtungen nachgewiesen wurden, wahrscheinlich sei, auch wenn man die vorhin für die Feuerkugel vom 29. Juni 1906 abgeleitete große Geschwindigkeit nicht berücksichtigt, zeigt der Hauptsache nach schon nachstehendes vorläufiges Verfahren.

Für die früher angenommenen drei Geschwindigkeitshypothesen $v = \sqrt{2}$, $v = 2{\cdot}0$ und $v = 2{\cdot}5$ wurden Länge *(l)* und Breite *(b)* der kosmischen Ausgangspunkte auch hinsichtlich der beiden oben angeführten Schmidt'schen Radianten ganz so berechnet wie für unsere Feuerkugel. Man begegnet dabei freilich, wie fast in allen Fällen, wo man Sternschnuppenradianten aus den Verzeichnissen benützt, der Schwierigkeit, daß man hiezu die Sonnenlänge der wirklichen Fallepoche benötigt, während in jenen Katalogen fast immer eine längere Dauer des Radianten mit konstanten Koordinaten angeführt erscheint. Mangeln also andere Angaben, so muß man sich eben damit begnügen, die Sonnenlänge für das mittlere Datum dieses längeren Intervalls zu benützen. Dies wird um so mehr zulässig sein, je geringer die tägliche Verschiebung des Radianten ist. Ich habe daher für Juli 20. bis 31. die Sonnenlänge für Juli 25·5 und für August 3. bis 31. jene für August mit 17·0 angenommen.

Die nachstehende Übersicht der so berechneten ekliptischen Koordinaten des kosmischen Ausgangspunktes, in welche ich zur bequemeren Vergleichung auch die oben mitgeteilten Resultate für die Feuerkugel vom 29. Juni 1906 aufnommen habe, bedarf hienach wohl keiner weiteren Erklärung.

	$v = \sqrt{2}$		$v = 2{\cdot}0$		$v = 2{\cdot}5$	
Epoche:	*l*	*b*	*l*	*b*	*l*	*b*
Juni 29	194·5°	−8·0°	246·6	−7·5	255·6	−6·3°
Juli 25·5	178·0	−2·1	244·9	−2·7	255·2	−3.4
August 17·0 ..	178·8	−0·8	250·0	−2·1	260·4	−1·6
Mittel	183·8	−3·6	247·2	−4·1	257·1	−4·1

Um zu zeigen, in welcher Weise die beobachteten Radianten durch jede der drei Geschwindigkeiten auf einen gemeinsamen Ausgangspunkt zurückgeführt und wie genau demnach die Beobachtungen durch eine dieser Annahmen dargestellt werden können, genügt es zunächst, unter Annahme eines Mittelwertes für l und b mit jeder der drei Geschwindigkeitshypothesen und für die drei Epochen (Sonnenlängen) die Koordinaten (λ, β) der scheinbaren Radianten zu berechnen und mit den Beobachtungen zu vergleichen.

Die folgenden Zusammenstellungen werden dies ermöglichen.

I. Hypothese: $v = \sqrt{2}$.

Ausgangspunkt: $l = 183{\cdot}8°$, $b = -3{\cdot}6°$.

Scheinbare Radianten:

Epoche	Berechnet		Beobachtet		Ber. — Beob.	
	λ	β	λ	β	$\Delta\lambda$	$\Delta\beta$
Juni 29.....	274°9	— 3°8	281°3	—7°1	— 6°4	+3°3
Juli 25·5	285·9	— 6·6	281·6	—4·1	+ 4·3	—2·5
August 17·0 .	294·9	—13·1	284·4	—3·4	+10·1	—9·7

$$[(\Delta\lambda \,.\, \cos\beta)^2 + (\Delta\beta)^2] = 265{\cdot}19.$$

II. Hypothese: $v = 2{\cdot}0$.

Ausgangspunkt: $l = 247{\cdot}2°$ $b = -4°1$.

Scheinbarer Radiant:

Epoche	Berechnet		Beobachtet		Ber. — Beob.	
	λ	β	λ	β	$\Delta\lambda$	$\Delta\beta$
Juni 29.....	281°7	—4°1	281°3	—7°1	+0°3	+3°0
Juli 25·5	284·0	—4·7	281·6	—4·1	+2·4	—0·6
August 17·0 .	281·2	—7·2	284·4	—3·4	—3·2	—3·8

$$[(\Delta\lambda \,.\, \cos\beta)^2 + (\Delta\beta)^2] = 48{\cdot}50.$$

III. Hypothese: $v = 2{\cdot}5$.

Ausgangspunkt: $l = 257{\cdot}1°$ $b = -4°1$.

Scheinbarer Radiant:

Epoche	Berechnet		Beobachtet		Ber. — Beob.	
	λ	β	λ	β	Δλ	Δβ
Juni 29.....	282°4	—4°1	281°3	—7°1	+1°1	+3°0
Juli 25·5	283·6	-- 4·7	281·6	—1·1	+2·0	—2·7
August 17·0 .	281·2	—6·0	284·4	—3·4	—3·2	—2·8

$$[(\Delta\lambda \cos\beta)^2 + (\Delta\beta)^2] = 39{\cdot}41.$$

Wie man sofort erkennt, schließt sich aus diesem Gesichtspunkt die Rechnung unter Voraussetzung parabolischer Geschwindigkeit (Hypothese I) durchaus nicht den Beobachtungen an. Am besten werden diese durch die größte Geschwindigkeit dargestellt und die noch übrig bleibenden Verbesserungen übersteigen nirgends die für solche Radiationsbestimmungen annehmbare Unsicherheit.

Man könnte daher die Annahmen der dritten Hypothese als Näherungswerte für eine definitive Auflösung betrachten und schließlich die Verbesserungen Δl, Δb und Δv derart bestimmen, daß die Summe der mit ihren Gewichten multiplizierten Quadrate der Verbesserungen von $\Delta\lambda . \cos\beta$ und $\Delta\beta$ ein Minimum wird. Dieser etwas umständliche Weg ist jedoch bei der Unvollständigkeit des vorliegenden Materials zunächst noch nicht lohnend, da man durchaus keine Anhaltspunkte besitzt, die Gewichtsverhältnisse der Radiantenbestimmungen im Verzeichnisse von Schmidt abzuschätzen.

Aus den italienischen Sternschnuppenbeobachtungen vom Jahre 1872 hat Denning für die Epoche Mai 16. bis Juni 13. einen Radianten (jedoch nur aus fünf Bahnen) in $\alpha = 278°$ $\delta = -35°$ abgeleitet,[1] welcher auch nahe den Regionen liegt, von denen hier die Rede ist, ja, die Rektaszension fügt sich sogar ganz genau in das oben berechnete Radiantenschema ein; aber die südliche Deklination wäre erheblich zu groß, selbst

[1] General-Katalog, p. 272, Nr. 210 unter δ Sagittarids.

wenn man die geringe Anzahl der für die Ableitung benützten Sternschnuppenbahnen berücksichtigt.

Da in dieser Lage die südliche Deklination bei wachsender Rektaszension gegen Süden hin mit der Sonnenlänge zunehmen müßte, so würde ein zu diesem in einer nächstfolgenden Epoche, z. B. im Juli oder August, gehöriger Radiant noch weiter südlich liegen. In der Tat findet sich unter den wenigen bekannten Strahlungspunkten dieser Gegend ein solcher für »Juli« in $\alpha = 284°$ $\delta = -40°$ unter den von Heis aus den Beobachtungen von Neumeyer in Melbourn reduzierten Sternschnuppenradianten und dieser stimmt mit dem vorhin angeführten Denning'schen Radianten für die Hypothese $v = 2{\cdot}5$ in Bezug auf einen gemeinsamen Ausgangspunkt geradezu überraschend gut überein.

Die Koordinaten des erwähnten Radianten von Denning sind in Bezug auf die Ekliptik $\lambda = 276{\cdot}7°$ $\beta = -11{\cdot}7°$, jene des andern von Heis $\lambda = 281{\cdot}2°$ $\beta = -17{\cdot}2°$. Nimmt man für die Angabe Mai 26. bis Juni 13. die Sonnenlänge von Juni 4. für den zweiten Radianten, wie früher aber jene von Juli 25·5, weil bekanntlich die größere Zahl der Sternschnuppenbeobachtungen zumeist in die letzten Wochen des Monats Juli fällt, so findet man durch Rechnung, daß für die bezeichnete Geschwindigkeit die Verschiebung in Länge: $+ 4{\cdot}8°$ und jene in Breite: $- 5{\cdot}3°$ betragen müßte. Nach dieser Rechnung müßte daher der Denning'sche Radiant in der zweiten Hälfte Juli nach $\lambda = 281{\cdot}5°$ $\beta = -17{\cdot}0°$ gelangt sein, welche Koordinaten sich von denen des Heis'schen nur um $\Delta\lambda = +0{\cdot}3°$, $\Delta\beta = +0{\cdot}2°$ unterscheiden; in der Tat eine merkwürdige Übereinstimmung. Der beiden zugehörige Ausgangspunkt wäre dann in $254{\cdot}7°$ Länge und $14{\cdot}2°$ südlicher Breite zu nehmen.

Über das Uran *X* und die Absorption seiner α-Strahlung

von

Dr. **V. F. Hess.**

Aus dem II. physikalischen Institute der Universität in Wien.

(Mit 8 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung vom 10. Jänner 1907.)

I. Über Trennungen des Uraniums *X* von Uran.

Die vielen Unvollkommenheiten, welche den Methoden zur Trennung des Uran *X* vom Uran anhafteten, haben in letzter Zeit einige Forscher bewogen, neue Abscheidungsmethoden auszusinnen. Levin[1] hat in sehr eingehender Weise durch Ausprobieren aller möglichen Fällungsmethoden des Urans aus Uranlösungen dargelegt, daß in allen Fällen das Uran mit dem Uran *X* im radioaktiven Gleichgewichte ausfällt. Die Beobachtung Becquerel's,[2] daß Baryumsulfat aus einer Uranlösung das Uran *X* mitreißt, fand er bestätigt; er zeigte, daß Calciumsulfat dieselbe Eigenschaft hat. Diese Methoden liefern jedoch das Uran *X* vermengt mit einer übermäßigen Menge Baryumsulfat oder Calciumsulfat.

Levin gibt ferner zwei sehr geeignete Methoden an, nämlich Adsorption das Uran *X* in kochender Uranlösung durch Ruß oder Tierkohle. Diese Methoden haben den Vorteil, daß nach der Veraschung die Menge der aktiven Kohle, respektive des Rußes eine äußerst geringe ist, weshalb man leicht eine größere

---

[1] Levin, Phys. Zeit., *7*, Nr. 20 (15. Oktober 1906).

[2] Becquerel, C. R., *131*, 157 (1900).

Aktivität auf einen kleinen Flächenraum und in dünner Schicht, also unter für die Beobachtung günstigeren Verhältnissen verteilen kann.

Kurz vor Levin haben Moore und Schlundt[1] gefunden, daß das Uranium *X* in verschiedenen organischen Flüssigkeiten, nämlich Aceton, Methylacetat, Methyl-, Äthyl-, Amylalkohol und Äthylacetat fast unlöslich ist; wenn man also ein Uransalz in einer dieser Flüssigkeiten löst, so kann ein großer Teil des Uran *X* durch den Filter abgetrennt werden. Moore und Schlundt fanden, daß die Trennung desto besser war, je mehr unlöslicher Rückstand zurückblieb. Hinzugabe von trockenem Baryumsulfat oder noch besser feuchtem frischgefällten Ferrihydroxyd vervollständigte die Trennung.

Moore und Schlundt fanden ferner, daß Uranium *X* nicht, wie bisher angenommen, bloß β-Strahlen, sondern auch α-Strahlen aussendet, und zwar daß die Aktivität derselben etwa 50% der Gesamtstrahlung ausmachte.

Es schien nun wünschenswert, alle diese Resultate zu prüfen, respektive zu vervollständigen.

Zur Untersuchung der Aktivität der verschiedenen Präparate benützte ich ein Elektroskop von Günther und Tegetmeyer mit einem kleinen Tischchen als Zerstreuungskörper. Auf den Hals war eine geerdete Platte gesetzt, auf welche ein größerer Topf gestülpt war. Die Skala, mit Lupenablesung versehen, war sorgfältig geeicht worden. Beobachtet wurde bei der Entladung die Zeit, die beim Passieren eines oder mehrerer Teilstriche verstrich. Der Zerstreuungswert infolge der natürlichen Leitfähigkeit der Luft wurde stets genau in Rechnung gezogen. Er betrug bei der angewendeten Versuchsanordnung z. B. für Teilstrich 12 bis 11 etwa 60 Minuten. Die Kapazität des Systems betrug ungefähr 12 *cm*.

Die Trennungsmethoden von Moore und Schlundt.

Ich verfuhr genau nach den Angaben von Moore und Schlundt. Es wurden jedesmal zirka 5 *g* reines kristallisiertes

[1] Moore und Schlundt, Phil. Mag., Oktober 1906, p. 393.

Uraniumnitrat in je 60 cm^3 der oben (p. 110) angegebenen Flüssigkeiten gelöst. Letztere (von der Firma Merck in Darmstadt) waren als chemisch rein bezeichnet. Die Menge des unlöslichen Rückstandes war in allen von mir beobachteten Fällen eine äußerst geringe, jedenfalls bedeutend geringer, als Moore und Schlundt beobachteten. Keinesfalls hätte der Rückstand vom Filter entfernt werden können.

Wahrscheinlich waren die Reagenzien, welche Moore und Schlundt benützten, weniger rein, denn ich beobachtete, daß bei Anwendung weniger reiner Lösungsmittel der unlösliche Rückstand größer und gleichzeitig die Abtrennung des Uran X eine bessere war.

Wie man sieht, spielen auch bei den Trennungsmethoden von Moore und Schlundt Adsorptionserscheinungen durch Staubteilchen u. a. eine erhebliche Rolle.

Nach der Auflösung wurde der unlösliche Rückstand durch langsames Filtrieren mit dichtem Filter abgetrennt und drei- bis fünfmal sorgfältig mit dem reinen Lösungsmittel gewaschen, um auch die geringsten Spuren der vom Uran X befreiten Uranlösung vom Filter zu entfernen. Vom Filtrat (enthaltend das Uran mit einem geringen Bruchteile Uran X) wurden einige Tropfen auf einem flachen Schälchen verdampft und die α- und β-Aktivität der eingetrockneten Lösung gemessen. Der Filter mit dem darauf befindlichen Uranium X wurde im Trockenkasten getrocknet und dann die Aktivität geprüft.

Um vor allem die von Moore und Schlundt angegebenen Lösungsmittel: Aceton, Methyl-, Äthyl-, Amylalkohol, Methyl- und Äthylacetat in ihrer Brauchbarkeit abstufen zu können, wurden je 5 g Urannitrat in gleichen Mengen dieser Flüssigkeit gelöst und das ungelöste Uran X durch Filter einer und derselben Dichte abgetrennt.

Die erhaltenen Resultate sind in Tabelle 1 gegeben.

Tabelle 1.

Lösungsmittel	Prozentverhältnis der β-Aktivität zur Gesamtaktivität beim	
	Filtrat	Rückstande (Uran *X*)
Aceton	1·85	54·5
Äthylalkohol	10·2	60·8
Äthylacetat	3·2	54·8
Methylalkohol	4·8	46·9
Methylacetat	1·9	62·9
Amylalkohol	12·2	57

Man sieht aus der Tabelle sofort, daß das Uranium *X* in keiner der angegebenen Flüssigkeiten absolut unlöslich ist, da auch bei Verwendung der dichtesten Filter immerhin noch eine merkliche β-Strahlung beim Filtrat vorhanden war; ferner, wenn auch den mitgeteilten Zahlen nur eine sehr relative Gültigkeit zukommt, da ja nur der Versuch gemacht wurde, unter möglichst gleichen Bedingungen die Verwendbarkeit der Lösungsmittel zu vergleichen, so steht doch sicher fest, daß in Aceton und Methylacetat Uran *X* am wenigsten löslich ist, also durch diese beiden Flüssigkeiten die Trennung am besten erreicht wird.

Aus der zweiten Kolumne ist vor allem zu entnehmen, daß eine α-Strahlung beim Uranium *X* tatsächlich vorhanden ist (wie später im Abschnitt III gezeigt werden wird, klingt nämlich diese α-Aktivität genau nach der Periode des Uran *X* ab, ist somit nicht einer Verunreinigung des Uran *X* durch Uran zuzuschreiben). Ferner sieht man, wie schon Moore und Schlundt bemerken, daß der beobachtete Prozentgehalt an β-Strahlung Schwankungen aufweist, und zwar hängt er hauptsächlich von der Art ab, wie der Rückstand am Filter verteilt ist.

Nachdem so festgestellt war, daß Aceton und Methylacetat am besten verwendbar sind, untersuchte ich, ob durch Hinzu-

gabe von feuchtem frischgefällten Ferrihydroxyd wirklich eine vollständige Abtrennung des Uran *X* von der Uranlösung erreicht wird, wie Moore und Schlundt behaupten.

Es wurden also erstens Proben von Uraniumnitrat in Aceton, respektive in Äthylacetat (ich wollte auch einen Repräsentanten der schlechteren Lösungsmittel erproben) gelöst, dann frisches Ferrihydroxyd zugegeben und hierauf filtriert.

Außerdem wurde zweitens auch der getrennte Vorgang versucht, nämlich nach der Auflösung des Urannitrats zuerst der unlösliche Rückstand mit der Hauptmenge des Uraniums *X* abfiltriert, hierauf das noch nicht ganz vom Uran *X* freie Filtrat mit feuchtem Ferrihydroxyd versetzt, endlich von diesem abfiltriert, sorgfältig gewaschen und sodann die α- und β-Aktivitäten der beiden Uran *X*-Niederschläge sowie der beiden Filtrate bestimmt.

Tabelle 2 und 3 gibt die nach diesen Methoden erhaltenen Resultate.

Tabelle 2 (Methode 1).

(Frisches Ferrihydroxyd sofort nach Auflösung des Urannitrats zugesetzt.)

Lösungsmittel	Verhältnis der β-Strahlung zur Gesamtstrahlung in Prozenten	
	a) Filtrat	*b)* Niederschlag
Aceton	0·42	47·6
Äthylacetat	0·48	42·1

Tabelle 3 (Methode 2).

Lösungsmittel	Verhältnis der β-Strahlung zur Gesamtstrahlung in Prozenten			
	Filtrat 1	Filtrat 2	Niederschläge von Uran *X*	
			1 unlöslicher Rückstand	2 in Ferrihydroxyd
Aceton	1·85	0·53	54·3	45·9
Äthylacetat	3·2	0·61	46·5	52·13

Man ersieht: Hinzugabe von frischem Ferrihydroxyd macht die Trennung zu einer praktisch vollkommenen, denn die noch gefundene β-Aktivität von 0·4 bis 0·6% in den Filtraten war kaum mehr meßbar und kann darauf zurückgeführt werden, daß in der zwischen Fällung und Messung verflossenen Zeit (etwa 2 bis 4 Stunden) vom Uran im Filtrat schon wieder eine kleine Quantität Uran *X* erzeugt worden war.

Der schwankende Prozentgehalt an β-Strahlung beim Uran *X* ist auf die verschiedene Verteilung der Niederschläge auf den Filtern zurückzuführen.

Wie man sieht, sind beide Methoden ziemlich gleichwertig, d. h. es ist gleichgültig, ob man zuerst vom unlöslichen Rückstand abfiltriert und im Filtrat den Rest des Uran *X* mit Ferrihydroxyd fällt oder ob man sofort Ferrihydroxyd zugibt und das gesamte Uran *X* abfiltriert.

Für die Praxis ist vor allem zu beobachten, daß das Filtrieren möglichst sorgfältig mit dichten Filtern ausgeführt werde. Welches von den von Moore und Schlundt angegebenen Lösungsmitteln man für das Uransalz benützt, scheint bei Anwendung einer der beiden letzten Methoden ziemlich gleich zu sein. Denn das in der Lösung noch mehr oder minder vorhandene Uran *X* wird durch das Ferrihydroxyd stets vollständig gefällt.

Adsorptionsmethode (nach Levin).

Levin[1] zeigte, daß beim Kochen einer Uranlösung mit Ruß oder Tierkohle der größte Teil des vorhandenen Uran *X* vom Ruß, beziehungsweise der Tierkohle adsorbiert wird.

Ich fand dies vollkommen bestätigt. Doch wird die Uranlösung auch durch mehrmaliges Kochen mit Tierkohle keineswegs vollkommen vom Uran *X* befreit.

Denn nach Abfiltrieren der Tierkohle wies die Uranlösung immerhin noch eine meßbare β-Strahlung auf; die Adsorptions-

[1] L. c.

methoden mittels Ruß und Tierkohle sind daher nicht geeignet, eine Uranlösung vollständig vom Uran X zu befreien, wohl aber können sie zu einer einfachen Darstellung von Uran X-Präparaten verwendet werden.

Zu den Absorptions- und Abklingungsmessungen verwendete ich sowohl Uran X-Präparate, die nach der letzteren Methode hergestellt waren, als auch solche nach Moore und Schlundt.

II. Messung der Absorption der α-Strahlung des Uraniums X durch Aluminium.

Da meine Beobachtungen in Übereinstimmung mit denen von Moore und Schlundt das Vorhandensein einer α-Strahlung bei Uranium X festgestellt haben, war es eine wichtige Frage, ob diese α-Strahlung in ihrer Absorptionsfähigkeit von der des reinen, von Uran X freien Uraniums unterscheide, d. h. ob die vom Uranium X ausgesendeten α-Teilchen dieselbe Geschwindigkeit wie die des Uraniums besitzen.

Ich untersuchte daher die Absorption der Strahlung des Uraniums X durch dünne Aluminiumfolien. Zur Untersuchung

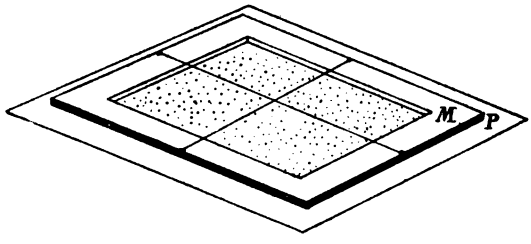


Fig. 1.

verwendete ich Uran X-Präparate, welche nach der Moore-Schlundt'schen Methode mit Ferrihydroxyd aus Acetonlösung gefällt waren, sowie solche, die nach Levin durch Adsorption mittels Tierkohle erhalten waren. Die feinpulverige Beschaffenheit des Ferrihydroxyds ermöglichte es, eine sehr dünne Schicht der Präparate herzustellen. Diese wurde auf eine Blechplatte P

verteilt. Um die zur Absorption verwendeten Aluminiumfolien stets in gleichem Abstande von der aktiven Schicht legen zu können, wurde auf die Blechplatte ein Messingrahmen M von $2^1/_2$ *mm* Höhe aufgesetzt, der kreuzweise mit je einem sehr. dünnen Metallfaden bespannt war, um ein Durchbiegen der aufgelegten Aluminiumblättchen und etwaige Störung in der Verteilung der aktiven Schicht zu vermeiden.

Die Aluminiumfolien waren von der Firma Falck in Wien und es betrug die Dicke bei der einen Sorte $0 \cdot 32 . 10^{-4}$ *cm*, bei der zweiten $2 \cdot 2 . 10^{-4}$ *cm*.

Die wirkliche Intensität der β-Strahlung bei der Schichtdicke 0 wurde auf graphischem Wege durch Extrapolation bestimmt. Dieses Verfahren bietet genügende Sicherheit, da die β-Strahlung des Uraniums X homogen, also der log J_β eine lineare Funktion der Schichtdicke ist.

Weil, wie sich herausstellte, die α-Strahlung des Uraniums X außerordentlich leicht absorbierbar ist, mußte beim Zeichnen der Kurven der Absorption darauf Rücksicht genommen werden, daß durch die 2 *mm* Luft zwischen Präparat und Aluminiumfolie bereits ein kleiner Betrag der Strahlung absorbiert war.

Benützt man die Relation Mc. Clung's und O. Hahn's, nach welcher für die Absorption $0 \cdot 16$ *cm* Luft äquivalent 10^{-4} Aluminium zu setzen ist, so folgt, daß für unseren Fall bei allen erhaltenen Kurvenpunkten die zugehörigen Schichtdicken Aluminium um etwa $1 \cdot 5 . 10^{-4}$ *cm* zu vermehren sind.

Daher wurde auch in Tabelle 4 entsprechend zu allen angewendeten Schichtdicken der Summand $1 \cdot 5 . 10^{-4}$ *cm* hinzugefügt.

In der Tabelle bedeutet J den Sättigungsstrom der Gesamstrahlung, J_α den der α-Strahlung gehörigen, $J_{\beta+\gamma}$ den der β- und γ-Strahlung gehörigen Teil des Sättigungsstromes.

Die beobachteten absoluten Werte der Stromstärke wurden der Übersichtlichkeit wegen stets auf $J = 100$ für die Schichtdicke 0 reduziert.

Die Kurven für den Zusammenhang der log J_α und log $J_{\beta+\gamma}$ mit der Schichtdicke sind in Fig. 2 gezeichnet.

Wie man sieht, ordnen sich die beobachteten Punkte unter Berücksichtigung der eben besprochenen geringen Absorption

durch die dünne Luftschicht zwischen Präparat und Aluminiumfolie leicht zu einer Kurve, welche die charakteristische Form aller log J_α-Kurven aufweist. Log J_α nähert sich etwa bei der Schichtdicke $6 \cdot 7 . 10^{-4}$ *cm* asymptotisch dem Werte $-\infty$, d. h. der Range oder die Extinktionsdicke der α-Strahlung

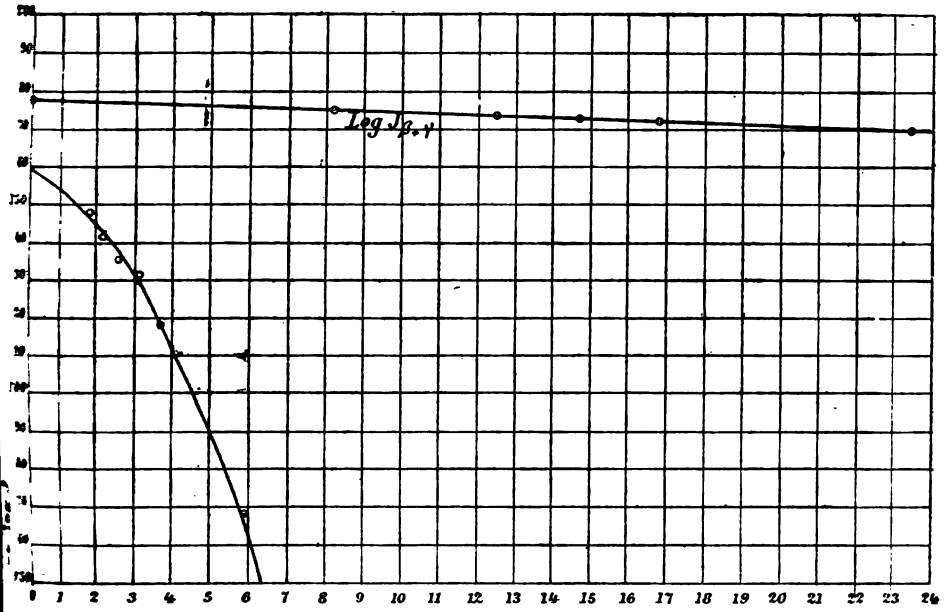


Fig. 2.

Absorption der Strahlung von UX durch Aluminium.

von UX ist etwa $6 \cdot 7 . 10^{-4}$ *cm* Aluminium, also bedeutend geringer als der Range der α-Strahlen des Uraniums selbst. Es ist also

die Extinktionsdicke σ für α-Strahlen von UX

in Aluminium ..... $\sigma = 6 \cdot 7 . 10^{-4}$ *cm*,

mithin (nach Mc. Clung und O. Hahn)

in Luft ..... $\sigma = 1 \cdot 07$ *cm*.

Die α-Strahlung von UX ist daher die weichste aller bisher bekannten α-Strahlungen.

Tabelle 4.

Absorption der Strahlung von Uranium *X* durch Aluminium.

Schichtdicke in $cm \cdot 10^{-4}$ Aluminium	Gesamtstrahlung J	α-Strahlung		β+γ-Strahlung		
		$\log J_\alpha$	J_α	$\log J_{\beta+\gamma}$	$J_{\beta+\gamma}$	
0	100·0	1·591	39·0	1·785	61·0	extrapoliert
1·82	90·75	1·479	30·15	1·782	60·6	
2·14	86·2	1·415	26·0	1·780	60·2	
2·46	83·7	1·373	23·6	1·779	60·1	
2·78	82·2	1·348	22·3	1·777	59·9	
3·10	80·1	1·3096	20·4	1·776	59·7	
3·70	74·9	1·190	15·5	1·774	59·4	
5·90	62·8	0·681	4·8	1·763	58·0	
8·10	56·9	—	—	1·755	56·9	
12·50	54·8	—	—	1·739	54·8	
14·70	53·5	—	—	1·728	53·5	
16·90	52·1	—	—	1·717	52·1	
23·50	49·2	—	—	1·692	49·2	

Recht anschaulich wurde mir diese leichte Absorbierbarkeit der α-Strahlung zum Bewußtsein gebracht während einer Beobachtungsreihe, die ich mit einem nach der Levin'schen Methode hergestellten U*X*-Präparate ausführte; zufälligerweise war die veraschte Tierkohle in etwas dickerer Schicht als gewöhnlich auf der Platte verteilt. Man erschließt leicht, daß infolge der Absorption in der aktiven Schicht selbst alle nicht von der Oberfläche selbst ausgehenden α-Teilchen bereits mit bedeutend geminderter Geschwindigkeit austreten, infolgedessen wird die Absorption anfangs eine abnorm rapide sein. Wirklich lagen, wie aus Tabelle 5 und Fig. 3 ersichtlich, die durch Absorption mit den dünnsten Folien erhaltenen drei ersten Punkte bedeutend unterhalb der richtigen Kurve. (Der Abstand der aktiven Schicht von den Folien war bei diesem Präparat etwa 1·5 *mm*, also ist zu den wirklichen Schichtdicken Aluminium $1 \cdot 10^{-4}$ *cm* addiert.)

Tabelle 5.

Schichtdicke Aluminium in $cm.10^{-4}$	J_α	$\log J_\alpha$
0	34·4	1·536
1·32	19·8	1·297
1·64	16·4	1·215
1·96	15·1	1·179
3·20	12·0	1·079
5·40	4·2	0·623
7·60	0	$-\infty$

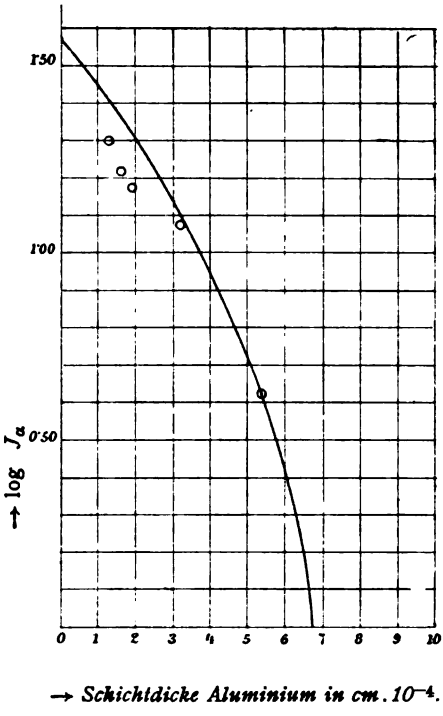


Fig. 3.

Die p. 117 ermittelten Extinktionsdicken der α-Strahlung von UX in Luft werden, wie aus Tabelle 5 ersichtlich, auch durch diese Beobachtungsreihe bestätigt.

Aus dem nach oben konvexen Verlauf der logarithmischen J_α-Kurve in Fig. 2 läßt sich sofort ersehen, daß der Mechanismus der Absorption der α-Strahlung von UX ein ganz analoger ist wie bei allen anderen α-Strahlungen: Abnahme der Penetrationskraft mit zunehmender absorbierender Schichtdicke.

Die Kurven der Absorptionskoeffizienten λ müssen also mit wachsender Schichtdicke x rapiden Anstieg zeigen und asymptotisch dem Werte $+\infty$ sich nähern. Dies ist auch wirklich beim UX der Fall, wie aus Tabelle 6 und Fig. 4 ersichtlich.

Da $J_\alpha = e^{-\lambda x}$, so folgt

$$\lambda = -\frac{1}{J_\alpha}\frac{dJ_\alpha}{dx} = -\frac{d}{dx}(\log \text{nat}\, J_\alpha).$$

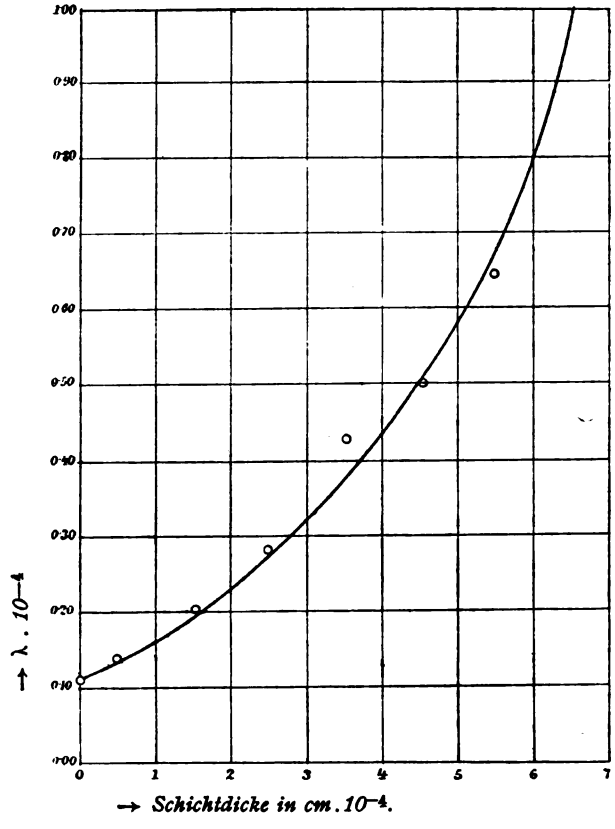


Fig. 4.

Abhängigkeit des Absorptionskoeffizienten λ von der Schichtdicke bei U X.

In Tabelle 6 sind die Werte $^{10}\log J_\alpha$ durch direkte Ablesung aus Fig. 2 von Punkt zu Punkt gewonnen und aus diesen $-\frac{d}{dx}(\log \text{nat}\, J_\alpha) = \lambda$ durch Umrechnung ermittelt.

Auch aus der λ-Kurve ersieht man, daß die Extinktionsdicke σ der α-Strahlen von U X in Aluminium keinesfalls größer

als 7.10^{-4} *cm* ist, was mit den Ergebnissen von p. 117 übereinstimmt.

Tabelle 6.

Darstellung von $\lambda.10^{-4}$ (1/*cm*).

Schichtdicke x in *cm*.10^{-4}	$\log_{10} J_\alpha$	$\log \text{nat } J_\alpha$	$\lambda.10^{-4}$
0	1·591	3·663	
			0·140
1	1·530	3·523	
			0·212
2	1·438	3·311	
			0·288
3	1·313	3·023	
			0·433
4	1·125	2·590	
			0·502
5	0·907	2·088	
			0·649
6	0·625	1·439	

Durch Extrapolation findet man für die Schichtdicke 0 aus der Kurve Fig. 4 den Wert

$$10^{-4}.\lambda_0 = 0{\cdot}110$$

also

$$\lambda_0 = 1100$$

für Absorption der α-Strahlen von UX durch Aluminium bei unendlich dünner Schicht.

III. Messung der Abklingung der Strahlung des Uraniums X.

Nachdem einmal das Vorhandensein einer α-Strahlung bei UX festgestellt und dieselbe durch die genaue Messung ihrer Absorbierbarkeit (Abschnitt II) näher charakterisiert war, mußte noch durch Messung der Abklingung festgestellt werden, ob die α-Strahlung des Uraniums X nach derselben Periode abnimmt wie die β-Strahlung, respektive ob die α-Strahlung nicht etwa von einem Zerfallsprodukt von anderer Lebensdauer als der des UX herrühre.

Es wurden mehrere, auf verschiedene Art gefällte Uranium *X*-Präparate durch Wochen in ihrer Abklingung untersucht.

Außer den gewöhnlichen Ablesungsfehlern kommt hiebei eine unangenehme, kaum ganz zu vermeidende Fehlerquelle in Betracht. Die in Pulverform in möglichst homogener dünner Schicht auf Metallschälchen verteilten Präparate dürfen auch nicht die geringste Erschütterung erleiden, da eine kleine Änderung der Verteilung sofort eine Änderung des der α-Strahlung zugehörigen Teiles des Sättigungstromes und daher auch eine Störung bei der Gesamtintensität bewirkt.

Das U*X*-Pulver auf einer klebenden Oberfläche zu fixieren, ging nicht an, weil alle Klebemittel hygroskopisch sind und dadurch eine neue Fehlerquelle involviert würde.

Daher zog ich es doch vor, die gewöhnliche Verteilung des U*X*-Pulvers zu belassen und durch peinlichste Achtsamkeit beim Auflegen und Abnehmen der Schälchen am Elektroskoptischchen nach Möglichkeit jede Störung zu verhüten.

Die β-Aktivität wurde bestimmt, indem auf das Schälchen mit dem Präparat fünf Aluminiumfolien von à $2 \cdot 2 . 10^{-4}$ *cm*, also zusammen $11 \cdot 0 . 10^{-4}$ *cm* Dicke gelegt und dann der Strom gemessen wurde. Die so direkt erhaltene β-Intensität ist zu klein, da durch Absorption in dem Aluminium und der zwischen Präparat und Folien gelegenen Luftschicht doch auch ein Teil der β-Aktivität verschluckt wird. Aus der β-Kurve in Tafel I ist zu entnehmen, daß die auf die eben beschriebene Art beobachtete β-Aktivität um etwa $15 \cdot 7\,\%$ zu erhöhen ist, um ihre wirkliche Anfangsintensität zu erhalten.

Es wurden daher alle beobachteten β-Intensitäten um diesen Betrag erhöht.

Die Resultate der Abklingungsmessungen sind in Tabelle 7 bis 10 und die zugehörigen logarithmischen Kurven in Fig. 5 bis 8 verzeichnet.

Die Intensität der α-Strahlung wurde durch Subtraktion

$$J_\alpha = J_{\alpha+\beta} - J_\beta$$

gewonnen. Die geringe Intensität der γ-Strahlung ist stets in J_β einbegriffen.

Die Halbierungskonstante HC bei den einzelnen Versuchsreihen wurde auf graphischem Wege durch Aufsuchung des Punktes [log $J_{(t=0)}$—log 2] ermittelt.

Die Stromstärken, deren Logarithmen in Tabelle 7 bis 10 angeben sind, sind in Volt/Minuten gemessen.

Versuchsresultate über die zeitliche Abklingung der Aktivität von Uran X.

Tabelle 7.

Präparat Nr. 1, gefällt durch Ferrihydroxyd aus einer Lösung von Urannitrat in Aceton.

Tage	log $J_{\alpha+\beta}$	log J_β	log J_α
0	2·194	1·916	1·868
1·80	2·166	1·884	1·844
4·95	2·126	1·827	1·823
6·80	2·102	1·807	1·793
12·80	2·043	1·770	1·711
14·80	2·009	1·737	1·677
18·90	1·933	1·682	1·575
23·80	1·861	1·603	1·514

Halbierungskonstante der Gesamtstrahlung $HC_{\alpha+\beta} = 21 \cdot 4$ Tage
» » β-Strahlung $HC_\beta = 22 \cdot 3$ »
» » α-Strahlung $HC_\alpha = 20 \cdot 5$ »

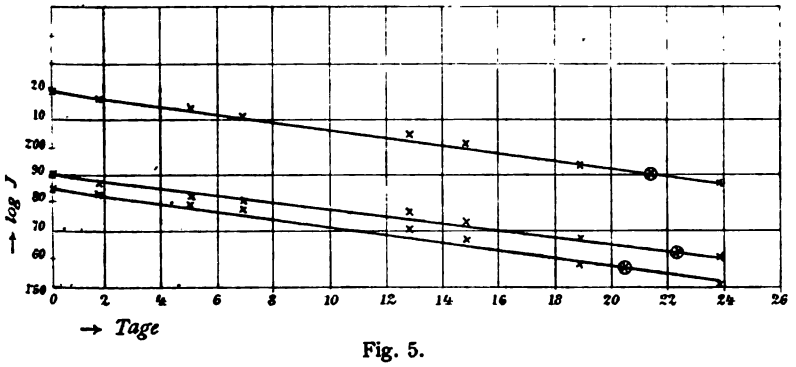


Fig. 5.

Tabelle 8.

Präparat Nr. 2, gefällt durch Ferrihydroxyd aus einer Lösung von Urannitrat in Aceton.

Tage	$\log J_{\alpha+\beta}$	$\log J_{\beta}$	$\log J_{\alpha}$
0	2·192	1·855	1·924
1·8	2·142	1·826	1·855
4·95	2·099	1·779	1·816
6·80	2·079	1·744	1·809
12·80	2·024	1·724	1·722
14·80	1·9895	1·690	1·687
19·00	1·919	1·635	1·600
24·80	1·847	1·525	1·566

$$HC_{\alpha+\beta} = 21{\cdot}6 \text{ Tage}$$
$$HC_{\beta} = 22{\cdot}2 \text{ »}$$
$$HC_{\alpha} = 20{\cdot}8 \text{ »}$$

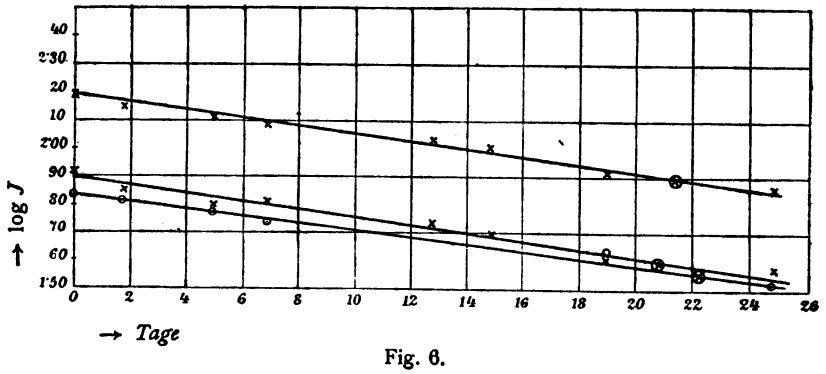


Fig. 6.

Tabelle 9.

Präparat Nr. 3, Uran X durch Tierkohle absorbiert.

Tage	$\log J_{\alpha+\beta}$	$\log J_{\beta}$	$\log J_{\alpha}$
0	1·986	1·799	1·5295
3·1	1·935	1·763	1·451
7·3	1·861	1·699	1·354
13·0	1·779	1·607	1·293
21·3	1·666	1·483	1·202

$$HC_{\alpha+\beta} = 20{\cdot}0 \text{ Tage}$$
$$HC_{\beta} = 20{\cdot}6 \text{ »}$$
$$HC_{\alpha} = 19{\cdot}7 \text{ »}$$

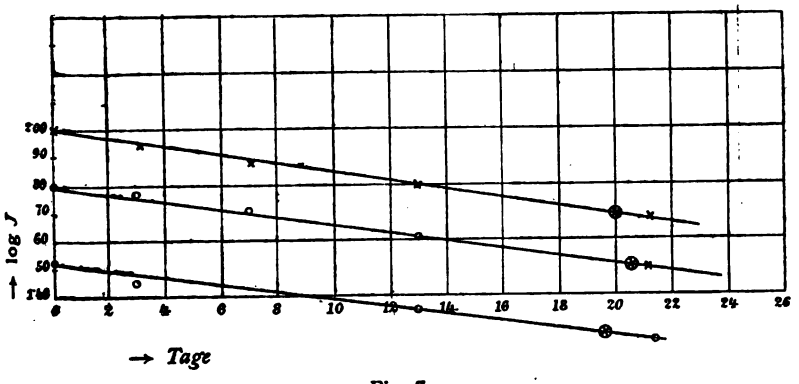


Fig. 7.

Tabelle 10.

Präparat Nr. 4, Uranium *X* aus Methylacetatlösung von Uran durch Ferrihydroxyd gefällt.

Tage	log $J_{\alpha+\beta}$	log J_{β}	log J_{α}
0	2·299	2·151	1·759
3·05	2·258	2·111	1·716
11·10	2·125	1·972	1·598
18·0	2·021	1·878	1·468

$HC_{\alpha+\beta} = 19{\cdot}8$ Tage
$HC_{\beta} = 19{\cdot}6$ »
$HC_{\alpha} = 20{\cdot}2$ »

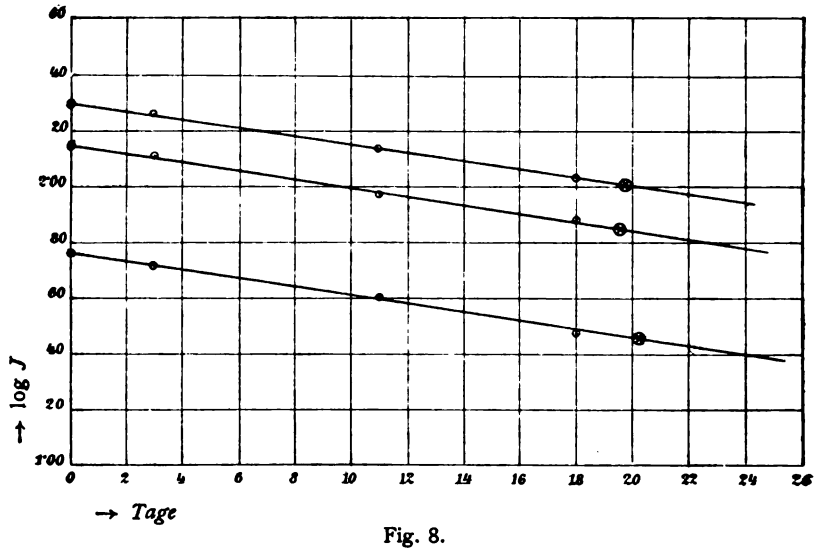


Fig. 8.

Vereinigt man so die erhaltenen Werte der *HC* zu einem Mittel, so ergibt sich:

	$HC_{\alpha+\beta}$	HC_{β}	HC_{α}
I	21·4	22·3	20·5
II	21·6	22·2	20·8
III	20·0	20·6	19·7
IV	19·8	19·6	20·2
Mittel	20·7	21·1	20·3

Der Unterschied in der Abklingung der α- und β-Aktivität liegt unterhalb der wahrscheinlichen Fehlergrenze. Wir resumieren also:

Die vom Uranium X ausgehende α-Strahlung klingt nach derselben Periode wie die β-Strahlung ab. Als Mittelwert der Halbierungskonstante ergab sich

$$HC = 20{\cdot}7 \text{ Tage.}$$

Der entsprechende Mittelwert von $\lambda = \frac{\log \text{nat } 2}{HC}$ ergibt sich zu

$$\lambda = 0{\cdot}0335\left(\frac{1}{\text{Tage}}\right) = 3{\cdot}87 \,.\, 10^{-7}\left(\frac{1}{\text{sec}}\right).$$

Zusammenfassung der wichtigsten Resultate.

I. Durch die Trennungsmethoden von Moore und Schlundt (Lösen des Uransalzes in Aceton, Methylacetat u. a. unter Beifügung von frischem Ferrihydroxyd) kann eine praktisch vollkommene Abtrennung des Uraniums X vom Uranium erreicht werden.

Ohne Beifügung von Ferrihydroxyd ist die Trennung bei keinem der Lösungsmittel eine vollständige.

Die Levin'schen Adsorptionsmethoden (Kochen einer Uranlösung mit Ruß oder Tierkohle) befreien die Uranlösung nicht vollständig von UX, können jedoch in einfacher Weise zur Herstellung von UX-Präparaten gebraucht werden.

II. Uranium X sendet nicht nur β- und γ-Strahlen, sondern auch α-Strahlen aus, die sich in ihrer Absorbierbarkeit von denen des reinen Uraniums unterscheiden.

Die α-Strahlung des Uraniums X ist die weichste aller bekannten α-Strahlungen.

Als Extinktionsdicke für die α-Strahlen von UX in Aluminium ergab sich nämlich

$$\sigma = 6 \cdot 7 . 10^{-4}\ cm.$$

Die Extinktion für UX erfolgt also bei beträchtlich geringerer Schichtdicke als für Uran selbst (für Uran ist $\sigma = 11 \cdot 10^{-4}\ cm$).

Der Absorptionskoeffizient für unendlich dünne Schichten ergab sich zu

$$\lambda_o = 1100 \left(\frac{1}{cm}\right).$$

III. Die α-Aktivität des UX klingt nach derselben Periode ab wie die $(\beta+\gamma)$-Aktivität. Als Halbierungskonstante ergab sich der Mittelwert

$$HC = 20 \cdot 7 \text{ Tage}$$

und die entsprechend radioaktive Konstante

$$\lambda = 3 \cdot 87 . 10^{-7} \left(\frac{1}{\text{sec}}\right).$$

Untersuchung der Kanalstrahlen von Sauerstoff

von

Dr. **Karl Siegl.**

Aus dem II. physikalischen Institut der Universität Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 28. Februar 1907.)

Zur Erzeugung der Kanalstrahlen in Sauerstoff dienten zunächst Röhren von der Form, wie sie Prof. Stark und der Verfasser bei der Untersuchung der Kanalstrahlen in Kalium- und Natriumdampf verwendet hatten.[1] Die Kathode bestand aus einem Aluminiumdeckel, welcher mit sehr vielen Löchern versehen war und den ganzen Querschnitt des 4 bis 5 *cm* weiten Geißlerrohres ausfüllte. Diese Röhrenform erwies sich aber als unpraktisch. Es treten nämlich an den Berührungsstellen der Elektrode mit der Glaswand bei etwas größerer Stromdichte sehr leicht kleine Lichtbogen auf, wenn sich an diesen Stellen Aluminiumoxyd gebildet hat. Diese Lichtbogen erhitzen das Glas derart, daß es den Strom zu leiten beginnt und von demselben zersetzt und durchbohrt wird. Paßt ferner die Elektrode nicht genau in die Röhre hinein, so zieht sich die negative Glimmschicht sehr leicht nach rückwärts durch den engen Zwischenraum zwischen Glaswand und Elektrode. An dieser Stelle besitzt dann die negative Glimmschicht eine sehr große Lichtintensität und hohe Temperatur. Die Folge ist wieder, daß die Glaswand von einem Lichtbogen durchbohrt und das Rohr dadurch unbrauchbar wird. Wegen dieser Übelstände halten solche Röhren einen stärkeren Strom höchstens 15 bis 20 Stunden

[1] J. Stark und K. Siegl, Die Kanalstrahlen in Kalium- und Natriumdampf, Ann. d. Phys., *21*, 457 bis 461 (1906).

aus. Von dieser Zeit geht aber die Hälfte für die Expositionszeit verloren, da das Rohr 8 bis 10 Stunden durch Erhitzung mittels kräftigen Stromes entgast und fortwährend mit Wasserstoff gespült werden muß. Es kam sehr häufig vor, daß die Röhre schon gleich nach der ersten Stunde der Expositionszeit aus den oben angeführten Gründen unbrauchbar wurde, wodurch die zeitraubende Reinigung und Entgasung des Rohres jedesmal umsonst vorgenommen war.

Probeweise wurde eine Röhre hergestellt, bei welcher die negative Elektrode durch einen mit Glas überzogenen Aluminiumstift in 1 bis 2 *cm* Abstand von der Glaswand freigehalten wurde. Dieses Rohr erwies sich jedoch als vollkommen unbrauchbar, weil die negative Glimmschicht sich sowohl vor wie hinter der Kathode symmetrisch ausbildete und dadurch das Entstehen der Kanalstrahlen gänzlich verhindert wurde. Die Röhren wurden deshalb schließlich ähnlich konstruiert, wie sie B. Straßer und M. Wien verwendeten.[1] Die Kathode besitzt wie bei der zuletzt erwähnten Röhre einen Abstand von 1 bis 2 *cm* von der Glaswand. Sie ist aber auf ein Glasrohr aufgesetzt, welches sich in seinem rückwärtigen Teile erweitert und dort mit der äußeren Röhrenwand verschmolzen ist. Der Raum hinter der Kathode kann also nicht über den äußeren Rand der Elektrode mit dem vorderen Raum kommunizieren, sondern bloß durch die Öffnung in der Mitte der Elektrode. Durch diese Anordnung kann sich auch die negative Glimmschicht nicht mehr nach rückwärts ziehen und die allenfalls noch auftretenden Lichtbogen sind ungefährlich, weil sie die äußere Glaswand nicht mehr erreichen können. Eine unangenehme Eigenschaft besitzen die Kanalstrahlen immer. Selbst wenn die Kathode vollkommen eben ist, konvergieren sie hinter derselben und erhitzen die Glaswand so stark, daß sie erweicht und von dem darauf lastenden äußeren Luftdrucke an dieser Stelle eingedrückt wird. Die Elektrode wurde deshalb konkav gemacht, so daß die Kanalstrahlen hinter derselben parallel fortgingen oder sogar divergierten. Die Erhitzung

[1] B. Straßer und M. Wien, Anwendung der Teleobjektivmethode auf den Dopplereffekt in Kanalstrahlen; phys. Zeitschr. *21*, 744 (1906).

der Glaswand ist dann, selbst wenn die Länge des Rohres hinter der Kathode bloß 4 bis 5 *cm* beträgt, so gering, daß auch bei starkem Strome noch kein Fall vorkam, in welchem die Glaswand geschmolzen wäre. Endlich zerstäuben die Kanalstrahlen die Elektroden und schwärzen dadurch die Glaswand. Die Schwärzung ist um so stärker, je mehr Kanalstrahlen aus der Kathode austreten können. Nun ist es aber für die Spektralaufnahmen gar nicht notwendig, daß ein sehr breites Kanalstrahlenbündel aus der Kathode austritt. Es wurde deshalb in die Elektrode bloß ein 1 *mm* breiter und 1 *cm* langer Spalt geschnitten. Das schmale Kanalstrahlenbündel schwärzte nun die Glaswand bedeutend weniger und hauptsächlich nur außerhalb jener Stelle, wo die Kanalstrahlen direkt auf das Glas auffielen. Dieses spaltförmige Bündel wurde mittels einer Linse auf den Spalt des Spektrographen projiziert. Röhren von der beschriebenen Form halten starken Strom über 100 Stunden aus.

Zur Aufnahme der Spektrogramme diente der Prismenspektrograph des Verfassers.[1] Aufnahmen mit einem Rowlandschen Konkavgitter von 15 Fuß Krümmungsradius und einer Gitterkonstante von 20000/Zoll waren sämtlich unbrauchbar. Bei der langen Expositionszeit von 20 bis 40 Stunden änderte sich nämlich durch Erschütterungen und Temperaturschwankungen die Stellung des Gitters so stark, daß die Spektrallinien verschwommen wurden. Doch mußte selbst bei den Aufnahmen mit rotempfindlichen Platten mittels des Prismenspektrographen die Expositionszeit bis 15 Stunden ausgedehnt werden. Kamen während dieser langen Zeit größere Temperaturschwankungen im Arbeitsraume vor, so änderte sich der Brechungsexponent der Thalliumflintprismen und damit die Dispersion des Spektrographen, wodurch die Spektrogramme verwaschen oder doppelt wurden. Deshalb verwendete der Verfasser außer den rotempfindlichen Perortoplatten Spezialrapidplatten von Schleußner und die hochempfindlichen Σ-Platten von Lumière. Bei diesen Aufnahmen mußte man freilich auf das Gebiet von 5206·4 bis H_3 verzichten, dafür konnte aber die Expositionszeit bedeutend herabgesetzt werden. Sie betrug in der Regel

[1] Deutsche Mech. Ztg. *21*, 201 (1906).

4 bis 5 Stunden. Man erhielt auf diese Weise vollkommen scharfe Spektrogramme. Entwickelt wurden dieselben mit Hydrochinon in zwei- bis dreifacher Verdünnung. Einige Platten wurden mit Sublimatlösung verstärkt.

Zum Evakuieren der Kanalstrahlenröhren diente eine Jaumann'sche Quecksilberpumpe, welche für diese Zwecke leider etwas langsam arbeitet.

Den elektrischen Strom lieferte in Ermanglung von Hochspannungsbatterien ein Induktorium von 40 *cm* Schlagweite, welches zuerst mit einem Quecksilberstrahlunterbrecher und einem Wehnelt-Unterbrecher betrieben, dann aber direkt mit Wechselstrom gespeist wurde, ferner ein Hochspannungstransformator mit einer Maximalspannung von 10000 Volt. Das Arbeiten mit direktem Wechselstrom hat das Angenehme, daß man von den Unregelmäßigkeiten, die bei langer Tätigkeit des Unterbrechers stets auftreten, vollständig befreit ist. Freilich gehen die Entladungen nach beiden Seiten durch die Röhre, von welchen die Hälfte nutzlos verloren geht, nur überflüssigerweise die Röhre erhitzt und die Glaswände mit Zerstäubungsprodukten der Elektroden schwärzt. Um diesen nutzlosen Teil des Stromes möglichst unschädlich zu machen, wurde als Anode ein Aluminiumstift gewählt. Da derselbe einen viel kleineren Querschnitt als die Kathode besitzt, wirkt er als elektrisches Ventil und die Entladungen gehen hauptsächlich nur in jenem Sinne durch die Röhre, für welchen der Stift Anode ist. Um denselben vor übermäßiger Erhitzung durch die konvergierenden Kathodenstrahlen der Konkavkathode zu schützen, wurde das Rohr so lang gewählt, daß die Kathodenstrahlen sich schon in der Mitte des Rohres durchkreuzten, was bei einem Elektrodenabstand von zirka 25 *cm* der Fall war. Die Spannung des Wechselstroms wurde mit einem Braun'schen Elektrometer und einer parallel geschalteten Funkenstrecke gemessen. Sie betrug gewöhnlich 4000 bis 7000 Volt, in einigen Fällen auch 12000 bis 15000 Volt. Die Stromstärke wurde schätzungsweise durch ein Weston-Milliampèremeter ermittelt und betrug durchschnittlich 10 bis 20 Milliampère.

Der zur Untersuchung dienende Sauerstoff wurde einem Gasometer von 20 *l* Inhalt entnommen, welcher aus einer käuflichen Sauerstoffbombe gefüllt worden war. Dieser Sauerstoff enthielt noch ein wenig Stickstoff.

Die Beobachtungen ergaben folgende Resultate: Die Kanalstrahlen von Sauerstoff kommen zur merklichen Emission bei einer Minimalspannung von 2000 bis 3000 Volt und sind weiß. Bei einer Länge des Dunkelraumes von 4 bis 5 *cm* und einer Spannung von 5000 Volt verzeichnete der Spektrograph den größten Teil der Funkenlinien von 5555·2 bis 4153·6. Das Spektrum ist sehr lichtschwach. Mit wachsendem Dunkelraume und steigender Spannung nimmt die Gesamtintensität ab, jedoch treten die Tripletserienlinien im Vergleiche zu den übrigen Linien etwas stärker hervor. Die Zerstäubung der Elektroden nimmt zu, wobei der Sauerstoff sehr rasch absorbiert wird, so daß bei den Aufnahmen alle 2 bis 3 Minuten etwas Sauerstoff eingelassen werden mußte. Sonst kam in dem Spektrum immer mehr der Wasserstoff zur Geltung, was stets mit einem kleinen, geradsichtigen Spektroskope kontrolliert wurde. Die Kanalstrahlen erhielten in diesem Falle eine rötliche Färbung. Nach einiger Zeit gaben merkwürdigerweise die Elektroden eine große Menge von absorbierten Gasen frei, wodurch das Vakuum schlecht wurde und im Spektrum besonders die Quecksilberlinien intensiv hervortraten. In einem solchen Falle wurde der Spalt des Spektrographen verdeckt und das Rohr unter Stromdurchgang so lange ausgepumpt, bis die Glaswände zu fluoreszieren begannen. Dann wurde frischer Sauerstoff eingelassen, bis die alte Länge des Dunkelraumes wieder hergestellt war, und jetzt die Exposition fortgesetzt. Da die Quecksilberpumpe, wie erwähnt, langsam arbeitet und das Vakuum des Rohres sich immer in einem labilen Zustande befindet, so wurde aus diesen Gründen das Arbeiten ein sehr mühsames, und die Expositionen dauerten infolge der wiederholt notwendigen Unterbrechungen sehr lange. Die Serienlinien des Wasserstoffes sowie die intensiven Quecksilber- und Stickstofflinien erschienen stets auf den Platten, doch schadete dies weiter nichts, sie waren im Gegenteil als Vergleichslinien für die Ausmessung unter dem Komparator erwünscht. Als störend erwies sich

dagegen das Viellinienspektrum des Wasserstoffs, welches bei der geringen Lichtstärke des linienreichen Sauerstoffspektrums stark zur Geltung kam.

Ein Vergleich der Parallel- und Normalaufnahmen der Kanalstrahlen ergab, daß die von C. Runge und F. Paschen beobachteten Serienlinien,[1] welche von 5555·2 bis 4368·5 auf den Spektrogrammen identifiziert werden konnten, den Dopplereffekt zeigen, wenn ihre Intensität genügend groß ist. Der Spektrograph des Verfassers ist in dem Spektralgebiete um H_3 am lichtstärksten, während er gegen Violett hin schon merklich absorbiert. An den in diesem Gebiete liegenden Sauerstofftriplets konnte der Dopplereffekt konstatiert werden. So an den Linien 4773·9, 4773·1, 4772·7 und 4673·9, 4672·9 und 4590·1, 4589·2 und 4523·7, 4523·0. Bei diesen Triplets war die erste gegen Rot liegende Linie scharf. Die nach Violett folgenden flossen ineinander und waren gegen Violett verwaschen, indem sich die verwaschenen Streifen des Dopplereffektes der einzelnen Linien übereinander lagerten. Wegen der geringen Lichtstärke des Dopplereffektes und wegen der großen Zahl der eng aneinander stehenden Linien erwies es sich als unmöglich, die Größe des Effektes genau zahlenmäßig zu bestimmen. Durch Vergleich mit dem Dopplereffekt von H_β und H_γ erkennt man, daß der Effekt bei der ersten Tripletserie des Sauerstoffes mindestens dreimal kleiner ist als beim Wasserstoff und da er der Wurzel aus dem Atomgewichte umgekehrt proportional ist, so dürften die Träger der ersten Tripletserie des Sauerstoffes dieselbe Wertigkeit besitzen wie die Träger der Nebenserie des Wasserstoffes. Ob der Effekt bei den Linien der zweiten Tripletserie größer ist als bei den Linien der ersten, konnte nicht ermittelt werden, da die Intensität des Dopplereffektes bei der zweiten Tripletserie geringer ist als bei der ersten.

[1] C. Runge und F. Paschen, On the Series Spektra of Oxygen, Sulphur and Selenium, Astroph. J., *8*, 70 bis 101 (1898), und Ann. d. Phys., *61*, 641 bis 686 (1897).

Zur Theorie der Drehungen und Quaternionen

von

W. Fr. Meyer in Königsberg i. Pr.

(Vorgelegt in der Sitzung am 28. Februar 1907.)

Die schon vielfach behandelten Theorien der Drehungen des Raumes um einen festen Punkt einerseits, der Quaternionen andrerseits, nebst ihren Beziehungen zueinander haben in dem Werke von F. Klein und A. Sommerfeld »Über die Theorie des Kreisels«[2] eine wesentliche Förderung erfahren. Indessen führen die Verfasser gleich zu Beginn ihrer Entwicklungen imaginäre Elemente ein. So schön und durchsichtig sich die damit begründete Theorie der Drehungen und Quaternionen insbesondere vom Standpunkt der modernen Geometrie aus gestaltet, so dürfte es doch angemessen erscheinen, zu den Klein-Sommerfeld'schen Ergebnissen auch auf einem direkten, elementaren und reellen Wege zu gelangen. Die Einführung des Imaginären erweist sich erst am Schlusse als notwendig, wenn man den Übergang von den Hamilton'schen Quaternionengrößen A, B, C, D zu den Klein'schen Parametern $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vollziehen will.

Die nachstehenden Entwicklungen, die sich in mancher Hinsicht als eine Umkehrung der von Klein-Sommerfeld eingeschlagenen charakterisieren lassen, gehen davon aus, daß die drei Diagonalkoeffizienten einer orthogonalen Substitution zunächst als Parameter gewählt werden; weiterhin behufs eindeutiger Gestaltung einer vieldeutigen Darstellung die Größen

[1] Eine ausführlichere Bearbeitung dieser Note wird in der Zeitschrift für Mathematik und Physik erscheinen.

[2] Leipzig; Heft 1, 1897; Heft 2, 1898; Heft 3, 1903. Für das Folgende kommen hauptsächlich die §§ 2, 3, 4, 5, 7 des ersten Heftes in Betracht.

A, B, C, D und endlich behufs formaler Vereinfachung weiterer Rechnungen die Größen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

§ 1. Bestimmung der Drehachse. Erste Einführung der Quaternionen.

Es sei durch

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha_1 X + \beta_1 Y + \gamma_1 Z \\ y &= \alpha_2 X + \beta_2 Y + \gamma_2 Z \\ z &= \alpha_3 X + \beta_3 Y + \gamma_3 Z \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

eine orthogonale Substitution S mit der Determinante $\Delta = +1$ gegeben. Es bestehen die bekannten Relationen:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2 = 1, \quad \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3 = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ &\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2 = 1, \quad \alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2 = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\alpha_1 = \beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2, \quad \alpha_2 = \beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3 \text{ etc.} \tag{3}$$

Diejenigen Raumpunkte (a, b, c), die, jeder für sich, beim Übergange (1) ungeändert bleiben, bestimmen sich durch die Bedingungen:

$$\left.\begin{aligned} a(\alpha_1-1)+b\beta_1 \quad\quad +c\gamma_1 \quad\quad &= 0 \\ a\alpha_2 \quad\quad +b(\beta_2-1)+c\gamma_2 \quad\quad &= 0 \\ a\alpha_3 \quad\quad +b\beta_3 \quad\quad +c(\gamma_3-1) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

In der Tat bestehen diese drei in den a, b, c linearen und homogenen Gleichungen zusammen, da die Determinante der Koeffizienten auf Grund von (3) verschwindet.

Der Ort der Punkte (a, b, c) ist daher eine durch den Anfangspunkt O laufende Gerade d. Diese Gerade d erweist sich geometrisch leicht als die »Drehachse« von S, d. h. jeder Raumpunkt $P(X, Y, Z)$ geht vermöge S (1) in einen solchen Punkt $p(x, y, z)$ über, daß die beiden von P und p auf d gefällten Lote gleich lang sind, denselben Fußpunkt auf d besitzen und der Winkel beider Lote stets ein und derselbe »Drehwinkel« ω ist.

Die den Größen a, b, c proportionalen Richtungkosinus der Drehachse d seien jetzt selbst mit a, b, c bezeichnet. Setzt man zur Abkürzung:

$$\alpha_1+\beta_2+\gamma_3 = \sigma, \quad \sigma-1 = \tau \tag{5}$$

und versteht unter r, s, t drei Proportionalitätsfaktoren, so liefert die Auflösung je zweier der Relationen (4):

$$\left.\begin{array}{lll} ra = 2\alpha_1-\tau, & rb = \alpha_2+\beta_1, & rc = \alpha_3+\gamma_1, \\ sa = \alpha_2+\beta_1, & sb = 2\beta_2-\tau, & sc = \beta_3+\gamma_2, \\ ta = \alpha_3+\gamma_1, & tb = \beta_3+\gamma_2, & tc = 2\gamma_3-\tau. \end{array}\right\} \tag{6}$$

Die Substitution S hängt nur von drei wesentlichen Parametern ab; als solche wählen wir die drei Diagonalkoeffizienten $\alpha_1, \beta_2, \gamma_3$ und drücken alle übrigen Größen durch sie aus. Man erhält zunächst für r, s, t, indem man die Gleichungen je einer Reihe in (6) quadriert und addiert, mit Hilfe von (2) und (3):

$$\begin{gathered} r^2 = (3-\sigma)(2\alpha_1-\tau), \quad s^2 = (3-\sigma)(2\beta_2-\tau), \\ t^2 = (3-\sigma)(2\gamma_3-\tau). \end{gathered} \tag{I}$$

Da $3-\sigma$ nicht negativ werden kann, folgen aus (I) die Determinationen:

$$\alpha_1 \geqq \beta_2+\gamma_3-1, \quad \beta_2 \geqq \alpha_1+\gamma_3-1, \quad \gamma_3 \geqq \alpha_1+\beta_2-1. \tag{7}$$

Die Einsetzung von (I) in (6) ergibt:

$$\left.\begin{array}{l} a\sqrt{3-\sigma} = \sqrt{2\alpha_1-\tau} \\ b\sqrt{3-\sigma} = \sqrt{2\beta_2-\tau} \\ c\sqrt{3-\sigma} = \sqrt{2\gamma_3-\tau}. \end{array}\right\} \tag{II}$$

Das Verschwinden von $3-\sigma$ oder auch das simultane Verschwinden von $2\alpha_1-\tau$, $2\beta_2-\tau$, $2\gamma_3-\tau$ entspricht dem Falle der identischen Substitution S; r, s, t sind dann Null und die Drehachse wird unbestimmt (mit dem Drehwinkel Null), wie es sein muß.

Hiebei darf das Vorzeichen von $\sqrt{3-\sigma}$ positiv gewählt werden; die Vorzeichen der drei anderen Radikale sind beliebig. Da aber ein gleichzeitiger Wechsel aller drei Vorzeichen die Drehachse als Ganzes ungeändert läßt, kann man sich auf vier

verschiedene Vorzeichenkombinationen beschränken; die vier zugehörigen Drehachsen hängen so zusammen, daß aus irgend einer von ihnen die drei anderen durch Spiegelung an den Koordinatenebenen hervorgehen.

Die Formeln (II) lauten genauer:

$$\left.\begin{aligned} a\sqrt{3-\sigma} &= \varepsilon_1\sqrt{2\alpha_1-\tau} \\ b\sqrt{3-\sigma} &= \varepsilon_2\sqrt{2\beta_2-\tau} \quad (\varepsilon_i = \pm 1,\ \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = +1) \\ c\sqrt{3-\sigma} &= \varepsilon_3\sqrt{2\gamma_3-\tau}, \end{aligned}\right\} \quad (II')$$

wo nunmehr alle Radikale positiv zu nehmen sind.

Um jetzt die $\alpha_2, \beta_1;\ \alpha_3, \gamma_1;\ \beta_3, \gamma_2$ durch $\alpha_1, \beta_2, \gamma_3$ auszudrücken, entnehme man aus (6) unter Benützung von (I), (II') die Summen $\alpha_2+\beta_1,\ \alpha_3+\gamma_1,\ \beta_3+\gamma_2$:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_2+\beta_1 &= \varepsilon_3\sqrt{2\alpha_1-\tau}\,.\,\sqrt{2\beta_2-\tau} \\ \alpha_3+\gamma_1 &= \varepsilon_2\sqrt{2\alpha_1-\tau}\,.\,\sqrt{2\gamma_3-\tau} \\ \beta_3+\gamma_2 &= \varepsilon_1\sqrt{2\beta_2-\tau}\,.\,\sqrt{2\gamma_3-\tau}. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Andrerseits liefert (3) die Produkte $\alpha_2\beta_1,\ \alpha_3\gamma_1,\ \beta_3\gamma_2$:

$$\alpha_2\beta_1 = \alpha_1\beta_2-\gamma_3,\ \alpha_3\gamma_1 = \alpha_1\gamma_3-\beta_2,\ \beta_3\gamma_2 = \beta_2\gamma_3-\alpha_1. \quad (9)$$

Aus (8) und (9) berechnen sich die $\alpha_2, \beta_1;\ \alpha_3, \gamma_1;\ \beta_3, \gamma_2$ wie folgt:

$$\left.\begin{aligned} \left\{\begin{matrix} 2\alpha_2 \\ 2\beta_1 \end{matrix}\right. &= \varepsilon_3\sqrt{2\alpha_1-\tau}\,.\,\sqrt{2\beta_2-\tau} \pm \sqrt{\sigma+1}\,.\,\sqrt{2\gamma_3-\tau} \\ \left\{\begin{matrix} 2\gamma_1 \\ 2\alpha_3 \end{matrix}\right. &= \varepsilon_2\sqrt{2\alpha_2-\tau}\,.\,\sqrt{2\gamma_3-\tau} \pm \sqrt{\sigma+1}\,.\,\sqrt{2\beta_2-\tau} \\ \left\{\begin{matrix} 2\beta_3 \\ 2\gamma_2 \end{matrix}\right. &= \varepsilon_1\sqrt{2\beta_2-\tau}\,.\,\sqrt{2\gamma_3-\tau} \pm \sqrt{\sigma+1}\,.\,\sqrt{2\alpha_1-\tau}. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Die Zuordnung der Vorzeichen in der Mitte rechts wird durch Betrachtung eines Spezialfalles, etwa $\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3 = 0$ entschieden.

Es zeigt sich, daß das obere Vorzeichen (+) gerade den $\alpha_2, \gamma_1, \beta_3$ entspricht, das untere Vorzeichen (—) den $\beta_1, \alpha_3, \gamma_2$.

Bedient man sich der Abkürzungen:

$$A=\frac{1}{2}\varepsilon_1\sqrt{2\alpha_1-\tau},\quad B=\frac{1}{2}\varepsilon_2\sqrt{2\beta_2-\tau},\quad C=\frac{1}{2}\varepsilon_3\sqrt{2\gamma_3-\tau},$$

$$D=\frac{1}{2}\eta\sqrt{\sigma+1}\quad(\varepsilon_i,\eta=\pm1,\ \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3=+1,\qquad\text{(III)}$$

so werden die acht verschiedenen Lösungssysteme (10) durch die Darstellung umfaßt:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_2&=2(AB+CD),\quad \beta_1=2(AB-CD)\\ \gamma_1&=2(AC+BD),\quad \alpha_3=2(AC-BD)\\ \beta_3&=2(BC+AD),\quad \gamma_2=2(BC-AD).\end{aligned}\right\}\qquad(11)$$

Zwischen den vier Größen A, B, C, D besteht die Identität:

$$A^2+B^2+C^2+D^2=1\qquad\text{(IV)}$$

und die Auflösung der Formeln (III) nach den $\alpha_1, \beta_2, \gamma_3$ liefert:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1&=2(A^2+D^2)-1=(A^2+D^2)-(B^2+C^2),\\ \beta_2&=2(B^2+D^2)-1=(B^2+D^2)-(A^2+C^2),\\ \gamma_3&=2(C^2+D^2)-1=(C^2+D^2)-(A^2+B^2).\end{aligned}\right\}\qquad(12)$$

Führt man jetzt die A, B, C, D statt der $\alpha_1, \beta_2, \gamma_3$ als Parameter einer Substitution S ein, so bietet sich der wesentliche Vorteil, daß, während einem beliebig gegebenen Wertsystem der $\alpha_1, \beta_2, \gamma_3$ noch acht durch (10) angegebene Substitutionen (1) entsprachen, nunmehr zu einem einschließlich der Vorzeichen[1] beliebig gegebenen Wertsystem der A, B, C, D nur eine einzige durch (11) und (12) angegebene Substitution gehört.

In diesen neuen Parametern A, B, C, D gewinnen, da

$$\frac{1}{2}\sqrt{3-\sigma}=\sqrt{1-D^2},\qquad(13)$$

die Relationen (II′) die einfachere Gestalt:

$$a\sqrt{1-D^2}=A,\quad b\sqrt{1-D^2}=B,\quad c\sqrt{1-D^2}=C,\quad\text{(II″)}$$

[1] Die Vorzeichenbeschränkung $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3=1$ in (II′) bedeutet jetzt, daß das Produkt ABC positiv zu nehmen ist. Sieht man von dieser Beschränkung ab, so wird der Drehachse zugleich ein bestimmter Sinn beigelegt und (10) repräsentiert dann 16 verschiedene Lösungssysteme.

wo $\sqrt{1-D^2}$ positiv zu nehmen ist. Es liegt nahe, einen Hilfswinkel v innerhalb der ersten zwei Quadranten eindeutig durch die Festsetzung zu bestimmen:

$$D = \cos v, \quad +\sqrt{1-D^2} = \sin v. \tag{14}$$

Es ist zu erwarten, daß dieser Winkel v in enger Beziehung zum Drehwinkel ω stehen wird; in der Tat wird sich in § 2 zeigen, daß v mit $\frac{\omega}{2}$ zusammenfällt.

Die in (III) eingeführten Größen A, B, C, D heißen die »Komponenten einer Einheitsquaternion«.

Kombiniert man mit F. Klein die orthogonale Substitution (1) mit einer Ähnlichkeitstransformation (Streckung), bei festgehaltenem O, vom Vergrößerungsverhältnis T^2:

$$X = T^2X_1, \quad Y = T^2Y_1, \quad Z = T^2Z_1, \tag{15}$$

so erweitert sich (1) zu einem Übergange vom System (x, y, z) zum System (X_1, Y_1, Z_1), wobei nur sämtliche neun Koeffizienten in (1) den Faktor T^2 angenommen haben.

Damit erhalten aber die Größen A, B, C, D den Faktor T, wo T noch positiv oder negativ gewählt werden kann, und gehen dadurch in vier allgemeinere Größen A_1, B_1, C_1, D_1 über:

$$A_1 = TA, \quad B_1 = TB, \quad C_1 = TC, \quad D_1 = TD, \tag{III$_1$}$$

zwischen denen die Identität besteht:

$$A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 + D_1^2 = T^2. \tag{IV$_1$}$$

Diese vier neuen Größen A_1, B_1, C_1, D_1, die man umgekehrt als vier unabhängige Variable ansehen kann, heißen die »Komponenten einer allgemeinen Quaternion« und T der Tensor der Quaternion.

§ 2. Bestimmung des Drehwinkels.

Gemäß (4) sind die Koeffizienten der a, b, c in irgend einer der drei Gleichungen (4) die Koordinaten (sei es im alten oder neuen System) eines Punktes, der in O auf der Drehachse d senkrecht errichteten Ebene. Wählt man etwa die erste

Gleichung (4) und faßt den zugehörigen Punkt P als einen Punkt (XYZ) auf, so ist:

$$X = \alpha_1 - 1, \quad Y = \beta_1, \quad Z = \gamma_1. \tag{16}$$

Der Radiusvektor R von P bestimmt sich wegen (2) durch:

$$R^2 = (\alpha_1 - 1)^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 2(1 - \alpha_1). \tag{17}$$

Vermöge (1) geht $P(XYZ)$ über in einen Punkt $p(xyz)$:

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha_1(\alpha_1 - 1) + \beta_1\beta_1 + \gamma_1\gamma_1 = 1 - \alpha_1 \\ y &= \alpha_2(\alpha_1 - 1) + \beta_2\beta_1 + \gamma_2\gamma_1 = -\alpha_2 \\ z &= \alpha_3(\alpha_1 - 1) + \beta_3\beta_1 + \gamma_3\gamma_1 = -\alpha_3. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Bezeichnet man mit r den Radiusvektor von p, wo die Länge von r gleich der von R ist, so ist der Winkel ω zwischen den Richtungen von R und r der gesuchte Drehwinkel und man hat:

$$R^2 \cos\omega = xX + yY + zZ \tag{19}$$

oder mit Einsetzung von (16), (18) und mit Benützung von (3):

$$\cos\omega = \frac{\sigma - 1}{2} = \frac{\tau}{2}.^1 \tag{V}$$

Hieraus folgt für den halben Drehwinkel:

$$2\cos\frac{\omega}{2} = \sqrt{\sigma + 1}, \quad 2\sin\frac{\omega}{2} = \sqrt{3 - \sigma}. \tag{V'}$$

Die Vergleichung mit (13), (14) lehrt, da auch $\frac{\omega}{2}$ den Spielraum von zwei Quadranten hat, daß der dort eingeführte Hilfswinkel v mit $\frac{\omega}{2}$ identisch ist und die Gleichungen (II″), (14) nehmen die durchsichtigere Gestalt an:

$$a\sin\frac{\omega}{2} = A, \quad b\sin\frac{\omega}{2} = B, \quad c\sin\frac{\omega}{2} = C, \quad \cos\frac{\omega}{2} = D. \tag{VI}$$

---

[1] Bedeutet $P'(X'Y'Z')$ den der zweiten Gleichung (4) entsprechenden Punkt mit der Koordinaten $\alpha_2, \beta_2 - 1, \gamma_2$ und operiert man mit einem beliebigen Punkte der Geraden PP' analog wie im Texte mit dem Punkte P, so ergibt sich die rechnerische Bestätigung, daß der Drehwinkel ω für alle Punkte des Raumes ein und derselbe ist.

Der Sinn des Drehwinkels ω wird in der üblichen Weise festgelegt.

§ 3. Zusammensetzung zweier orthogonalen Substitutionen und der zugehörigen Quaternionen.

Führt man zwei Substitutionen von der Natur (1) hintereinander aus, führt also erst ein System (xyz) mittels Koeffizienten $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots)$ über in ein System (XYZ), sodann das letztere mittels Koeffizienten $(\alpha_1', \beta_1', \gamma_1', \ldots)$ über in ein drittes System $(X'Y'Z')$, so vollzieht sich der direkte Übergang vom ersten System in das dritte durch eine Substitution (1) mit Koeffizienten $\alpha_1'', \beta_1'', \gamma_1'', \ldots$, wo ersichtlich:

$$\alpha_1'' = \alpha_1\alpha_1' + \beta_1\alpha_2' + \gamma_1\alpha_3'. \qquad (20)$$

. . . . . .

Um die entsprechende Zusammensetzung der resultierenden Quaternionenkomponenten A'', B'', C'', D'' aus den »zusammensetzenden« A, B, C, D; A', B', C', D' zu erhalten, bedarf man unter den Relationen (20) nur der für irgend ein Diagonalelement, also etwa der für α_1''.

Auf Grund von (III), (11), (12), (IV) geht die erste Relation (20) über in:

$$A''^2 + D''^2 = (A^2+D^2)(A'^2+D'^2) + (B^2+C^2)(B'^2+C'^2) + 2(AB-CD)(A'B'+C'D') + 2(AC+BD)(A'C'-B'D'). \qquad (21)$$

Bildet man rechts einmal das Aggregat der Quadrate $A^2D'^2$ u. s. f., sodann das der doppelten Produkte $2AD'.BC'$ u. s. f. und setzt zur Abkürzung:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{A}'' &= (AD'+DA') + (BC'-CB') \\ \mathrm{B}'' &= (BD'+DB') + (CA'-AC') \\ \Gamma'' &= (CD'+DC') + (AB'-BA') \\ \Delta'' &= DD' - (AA'+BB'+CC'), \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

so stellt sich die Formel (21) nebst den entsprechenden für $B''^2+D''^2$, $C''^2+D''^2$ folgendermaßen dar:

$$\left.\begin{aligned} A''^2+D''^2 &= \mathrm{A}''^2+\Delta''^2 \\ B''^2+D''^2 &= \mathrm{B}''^2+\Delta''^2 \\ C''^2+D''^2 &= \Gamma''^2+\Delta''^2, \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

oder auch, unter $\mathfrak{M}$ eine Unbekannte verstanden:

$$\left.\begin{aligned} A''^2 - \mathfrak{A}''^2 = \mathfrak{M}, \quad B''^2 - \mathfrak{B}''^2 = \mathfrak{M}, \quad C''^2 - \mathfrak{C}''^2 = \mathfrak{M}, \\ D''^2 - \mathfrak{D}''^2 = -\mathfrak{M}. \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Hieraus folgt durch Addition der drei ersten Gleichungen:

$$A''^2 + B''^2 + C''^2 = \mathfrak{A}''^2 + \mathfrak{B}''^2 + \mathfrak{C}''^2 + 3\mathfrak{M}; \quad (25)$$

andrerseits durch Addition aller vier Gleichungen (24) mit Rücksicht auf (IV):

$$1 = (\mathfrak{A}''^2 + \mathfrak{B}''^2 + \mathfrak{C}''^2 + \mathfrak{D}''^2) + 2\mathfrak{M}. \quad (26)$$

Aber man kann sich leicht überzeugen, daß:

$$1 = \mathfrak{A}''^2 + \mathfrak{B}''^2 + \mathfrak{C}''^2 + \mathfrak{D}''^2. \quad (27)$$

Denn führt man die rechte Seite von (27) auf Grund von (22) aus, so zerstören sich die doppelten Produkte, während das Aggregat der Quadrate das der Einheit gleiche Produkt $(A^2 + B^2 + C^2 + D^2)(A'^2 + B'^2 + C'^2 + D'^2)$ ergibt.

Die Vergleichung von (26) mit (27) lehrt, daß $\mathfrak{M} = 0$ ist, wodurch sich die Formeln (24) reduzieren auf:

$$A'' = \pm\mathfrak{A}, \quad B'' = \pm\mathfrak{B}'', \quad C'' = \pm\mathfrak{C}'', \quad D'' = \pm\mathfrak{D}, \quad (28)$$

womit zugleich gezeigt ist, daß:

$$A''^2 + B''^2 + C''^2 + D''^2 = \\ = (A^2 + B^2 + C^2 + D^2)(A'^2 + B'^2 + C'^2 + D'^2) = 1. \quad (29)$$

Um noch in (28) die Vorzeichen zu bestimmen, spezialisiere man die erste Substitution (A, B, C, D) zur Identität, so daß $\omega = 0$ wird, während a, b, c willkürlich bleiben. Dann verschwinden nach (VI) A, B, C, während D gleich 1 wird. Da aber jetzt die A'', B'', C'', D'', respektive mit den A', B', C', D' zusammenfallen, so erweisen sich im Hinblick auf (22) die positiven Vorzeichen auf den rechten Seiten von (28) als die richtigen. Demnach findet die Zusammensetzung (»Multiplikation«) zweier orthogonaler Substitutionen mit den Parametern A, B, C, D; A', B', C', D' ihren Ausdruck in den Formeln:

$$\left.\begin{aligned} A'' &= AD'+BC'-CB'+DA' \\ B'' &= -AC'+BD'+CA'+DB' \\ C'' &= AB'-BA'+CD'+DC' \\ D'' &= -AA'-BB'-CC'+DD'. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII)}$$

Diese Multiplikationsformeln bleiben ungeändert, wenn man die Komponenten A, B, C, D; A', B', C', D'; A'', B'', C'', D'' von Einheitsquaternionen ersetzt durch die entsprechenden A_1, B_1, C_1, D_1; A_1', B_1', C_1', D_1'; $A_1'', B_1'', C_1'', D_1''$ von allgemeinen Quaternionen mit den Tensoren T, T', T''; die letzteren befolgen offenbar das gewöhnliche Multiplikationsgesetz:

$$T'' = TT'. \qquad (30)$$

»Die Formeln (VII) stellen das Multiplikationstheorem der Quaternionen dar.«

Trotz ihrer Durchsichtigkeit sind diese Formeln noch vereinfachungsfähig. Dazu bieten sich in erster Linie zwei Wege dar, die durch die Namen W. R. Hamilton und F. Klein gekennzeichnet sind.

Hamilton hat das System der gewöhnlichen komplexen Größen von der Form $a+ib$ erweitert auf solche mit drei komplexen Einheiten i, j, f:

$$Q = \mathrm{i}A_1+\mathrm{j}B_1+\mathrm{f}C_1+D_1, \qquad \text{(VIII)}$$

wo A_1, B_1, C_1, D_1 die »Komponenten der Quaternion Q« heißen. Beim Addieren und Subtrahieren spielen diese neuen Einheiten die Rolle von nicht aufeinander zurückführbaren Faktoren; die Gleichheit zweier Quaternionen ist gleichbedeutend mit der Gleichheit ihrer entsprechenden Komponenten. Die Multiplikation $Q''=QQ'$ soll zwischen den Komponenten von Q, Q', Q'' gerade die Relationen (VII) ergeben. Zu dem Behuf hat man offenbar die Einheiten i, j, f den Multiplikationsregeln zu unterwerfen:

$$\left.\begin{aligned} 1.\mathrm{i} = \mathrm{i}.1,\ \ 1.\mathrm{j} = \mathrm{j}.1,\ \ 1.\mathrm{f} = \mathrm{f}.1; \\ \mathrm{ii} = \mathrm{jj} = \mathrm{ff} = -1; \\ \mathrm{ij} = -\mathrm{ji} = \mathrm{f},\ \ \mathrm{jf} = -\mathrm{fj} = \mathrm{i},\ \ \mathrm{fi} = -\mathrm{if} = \mathrm{j}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IX)}$$

Klein-Sommerfeld betonen, daß eine Quaternion die aus einer Drehung und einer Streckung zusammengesetzte Bewegung darstellt, und bezeichnen in diesem Sinne eine Quaternion als eine »Drehstreckung«.

Die gewöhnlichen Vektoren $iA_1+jB_1+kC_1$ ordnen sich als spezielle Quaternionen mit $D_1=0$ unter; da $D_1=0$ mit $\omega=\pi$ gleichbedeutend ist, d. h. mit einer »Wendung« (Umklappung) des Raumes um die Drehachse, so stellt ein Vektor nach Klein-Sommerfeld eine »Wendestreckung« dar.

Das Produkt zweier Vektoren als spezieller Quaternionen liefert gemäß (VII) eine Quaternion, deren vektorieller Teil $iA_1''+jB_1''+kC_1''$ das »äußere« Produkt der Vektoren ist, das freie Glied D'' dagegen, abgesehen vom Vorzeichen, dessen »inneres« Produkt.

Über die zweite Art, die Multiplikationsgleichungen (VII) auf einen einfacheren Algorithmus zu bringen, soll § 4 Aufschluß bringen.

§ 4. Die Klein'schen Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Klein-Sommerfeld führen das Rechnen mit den Hamilton'schen Quaternionen auf ein solches mit den gewöhnlichen komplexen Größen zurück. Es genügt die Betrachtung der Einheitsquaternionen.

Man trenne die vier Komponenten A, B, C, D in zwei Paare, etwa C und D, A und B, und bilde aus jedem Paare eine komplexe Größe nebst ihrer Konjugierten; Klein setzt:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= D+iC, \quad \beta = -B+iA \\ \delta &= D-iC, \quad \gamma = \quad B+iA \end{aligned}\right\}, \tag{X}$$

so daß α und δ, β und $-\gamma$ konjugiert werden.

Die Auflösung von (X) gibt:

$$\left.\begin{aligned} D &= \frac{\alpha+\delta}{2}, \quad A = \frac{\gamma+\beta}{2} \\ C &= \frac{\alpha-\delta}{2i}, \quad B = \frac{\gamma-\beta}{2i} \end{aligned}\right\}. \tag{X'}$$

Führt man diese neuen Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ an Stelle der A, B, C, D ein, so geht die Identität (IV) über in:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1, \tag{XI}$$

andrerseits das System der Multiplikationsformeln (VII) in:

$$\left.\begin{aligned} \alpha'' &= \alpha\alpha' + \beta\gamma', \quad \beta'' = \alpha\beta' + \beta\delta' \\ \gamma'' &= \gamma\alpha' + \delta\gamma', \quad \delta'' = \gamma\beta' + \delta\delta'. \end{aligned}\right\} \tag{XII}$$

Diese Formeln (XII) sind aber aus der Theorie der linearen Substitutionen zweier homogenen Variabeln wohl bekannt. Bedeuten (λ_1, λ_2), (λ_1', λ_2'), $(\lambda_1'', \lambda_2'')$ drei Paare homogener Variabeln, so setzen sich die beiden linearen Substitutionen S, S':

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha\lambda_1' + \beta\lambda_2', \quad \lambda_1' = \alpha'\lambda_1'' + \beta'\lambda_2'' \\ \lambda_2 &= \gamma\lambda_1' + \delta\lambda_2', \quad \lambda_2' = \gamma'\lambda_1'' + \delta'\lambda_2'' \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

zusammen zu dem »Produkte« $S'' = SS'$:

$$\lambda_1 = \alpha''\lambda_1'' + \beta''\lambda_2'', \quad \lambda_2 = \gamma''\lambda_1'' + \delta''\lambda_2'', \tag{32}$$

wo die $\alpha'', \beta'', \gamma'', \delta''$ aus den $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ eben nach der Vorschrift (XII) gebildet sind, und es gilt die Identität:

$$\alpha''\delta'' - \beta''\gamma'' \equiv (\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha'\delta' - \beta'\gamma'). \tag{33}$$

Sind also die Koeffizienten von S und S' der Relation (XI) unterworfen, so auch die Koeffizienten von S''; dies ist das Analogon zu (29).

Man wird daher erwarten, daß sich eine orthogonale Substitution (1) durch eine Substitution S von der Art (31) ersetzen läßt.

Zu dem Behuf führe man in den Formeln (11) und (12), mittels deren die neun Koeffizienten von (1) durch die A, B, C, D ausgedrückt wurden, statt der letzteren Größen die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ein.

Sodann wird man folgerichtig auch aus den Variabeln x, y, z; X, Y, Z geeignete komplexe Verbindungen herstellen, am einfachsten $x \pm iy$, $X \pm iY$. Man setze mit Klein:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x+iy, \quad \eta = -x+iy, \quad \zeta = -z, \\ \Xi &= X+iY, \quad \mathrm{H} = -X+iY, \quad \mathrm{Z} = -Z. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XIII)}$$

Daraus rechnen sich (11), (12) und damit (1) um in:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \alpha^2\Xi + \beta^2\mathrm{H} + 2\alpha\beta\mathrm{Z}, \\ \eta &= \gamma^2\Xi + \delta^2\mathrm{H} + 2\gamma\delta\mathrm{Z}, \\ \zeta^2 &= \alpha\gamma\Xi + \beta\delta\mathrm{H} + (\alpha\delta+\beta\gamma)\mathrm{Z}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XIV)}$$

Vergleicht man die rechte Seite der ersten dieser Relationen mit der elementaren Multiplikationsformel:

$$(\alpha\Lambda+\beta)(\alpha\Lambda'+\beta) = \alpha^2\Lambda\Lambda' + \beta^2 + 2\alpha\beta\frac{\Lambda+\Lambda'}{2},$$

so wird man veranlaßt, die Verhältnisse $\frac{\Xi}{\mathrm{H}}, \frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{H}}$ als Produkt und halbe Summe zweier neuen Variabeln Λ, Λ' aufzufassen und die entsprechende Beziehung zwischen $\frac{\xi}{\eta}, \frac{\zeta}{\eta}$ und λ, λ' festzusetzen:

$$\frac{\xi}{\eta} = \lambda\lambda', \quad \frac{\zeta}{\eta} = \frac{\lambda+\lambda'}{2}; \quad \frac{\Xi}{\mathrm{H}} = \Lambda\Lambda', \quad \frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{H}} = \frac{\Lambda+\Lambda'}{2}. \qquad \text{(XV)}$$

Dividiert man demgemäß die erste und dritte der Relationen (XIV) durch die zweite, so kommt:

$$\left.\begin{aligned} \lambda\lambda' &= \frac{\alpha\Lambda+\beta}{\gamma\Lambda+\delta} \cdot \frac{\alpha\Lambda'+\beta}{\gamma\Lambda'+\delta} \\ \lambda+\lambda' &= \frac{\alpha\Lambda+\beta}{\gamma\Lambda+\delta} + \frac{\alpha\Lambda'+\beta}{\gamma\Lambda'+\delta}. \end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

Aus (34) geht hervor (indem man eventuell in der Bezeichnung λ mit λ' vertauscht), daß:

$$\lambda = \frac{\alpha\Lambda+\beta}{\gamma\Lambda+\delta}, \quad \lambda' = \frac{\alpha\Lambda'+\beta'}{\gamma\Lambda'+\delta'}. \tag{XVI}$$

Verfolgt man den eingeschlagenen Weg rückwärts, so erkennt man zuvörderst, daß die linken Seiten von (XIV) und damit auch von (1) den entsprechenden rechten Seiten bis auf einen Proportionalitätsfaktor gleich werden; der letztere erhält aber mit Rücksicht auf $\Delta = 1$ den Wert der positiven Einheit.

Wie leicht ersichtlich, lassen sich die Substitutionen (XVI) auch in die homogene Form (31) setzen.

Es erübrigt noch die Frage, ob nicht von den beiden Darstellungen (XVI) eine überflüssig ist.

Gemäß (XV) erhält man für λ, λ' die Werte:

$$\begin{cases}\lambda \\ \lambda'\end{cases} = \frac{\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - \xi\eta}}{\eta}. \tag{35}$$

Für r als den Radiusvektor des Punktes (xyz) wird mit Rücksicht auf (XIII):

$$r^2 = x^2+y^2+z^2 = \zeta^2 - \xi\eta, \quad \xi\eta = (\zeta - r)(\zeta + r), \tag{36}$$

wodurch (35) übergeht in:

$$\lambda = \frac{\xi}{\zeta+r}, \quad \lambda' = \frac{\xi}{\zeta-r}, \tag{37}$$

während Λ, Λ' die analogen Werte annehmen:

$$\Lambda = \frac{\Xi}{Z+r}, \quad \Lambda' = \frac{\Xi}{Z-r}. \tag{37'}$$

Daß hier in der Tat die in (37), (37') angegebenen Werte von λ, Λ, respektive λ', Λ' in (XVI) einander zuzuordnen sind, lehrt wieder ein Spezialfall, z. B. der Fall der identischen Substitution ($\alpha = \delta = 1, \beta = \gamma = 0$).

Man suche endlich die zu λ konjugiert-komplexe Größe $\bar{\lambda}$. Auf Grund von (36) kommt sukzessive:

$$\bar{\lambda}=\frac{x-iy}{\zeta+r}=-\frac{\eta}{\zeta+r}=-\frac{\xi\eta}{\xi(\zeta+r)}=-\frac{(\zeta-r)(\zeta+r)}{\xi(\zeta+r)}$$

$$=-\frac{\zeta-r}{\xi}=-\frac{1}{\frac{\xi}{\zeta-r}}=-\frac{1}{\lambda} \qquad (38)$$

und entsprechend $\bar{\Lambda}=-\frac{1}{\Lambda'}$.

Ersetzt man demgemäß in der ersten Formel (XVI) links wie rechts jede der auftretenden Größen durch ihre Konjugierte, so wird man, da α und δ, β und $-\gamma$ je zueinander konjugiert sind, gerade zu der zweiten Formel (XVI) geführt. Das ist der Klein'sche Satz: »Die orthogonale Substitution (1) ist bereits durch irgend eine der beiden Substitutionen (XVI) eindeutig dargestellt«.

Zum Schlusse möge auch der Rückweg von einer der Formeln (XVI) zu (XIV) explicite durchlaufen werden. Bezeichnet man durchwegs die zu einer Größe Konjugierte durch einen darübergesetzten horizontalen Strich, so forme man mit Rücksicht auf (37), (37′) die Darstellung (XVI) um, wie folgt:

$$\lambda=\frac{\xi}{\zeta+r}=\frac{\alpha\Lambda+\beta}{\gamma\Lambda+\delta}=\frac{(\alpha\Lambda+\beta)(\bar{\gamma}\bar{\Lambda}+\bar{\delta})}{(\gamma\Lambda+\delta)(\bar{\gamma}\bar{\Lambda}+\bar{\delta})}$$

$$=\frac{\alpha\Xi+\beta(Z+r)}{\gamma\Xi+\delta(Z+r)}\cdot\frac{\beta H+\alpha(Z+r)}{\beta H+\alpha(Z+r)},$$

$$\lambda=\frac{\xi}{\zeta+r}=\frac{\alpha\beta\Xi H+\alpha^2\Xi(Z+r)+\beta^2 H(Z+r)+\alpha\beta(Z+r)^2}{\beta\gamma\Xi H+\alpha\gamma\Xi(Z+r)+\beta\delta H(Z+r)+\alpha\delta(Z+r)^2}. \qquad (39)$$

Da aber $\Xi H=(Z+r)(Z-r)$, hebt sich rechts in (39) der Faktor $Z+r$ heraus und man hat wegen $\alpha\delta-\beta\gamma=1$:

$$\frac{\xi}{\zeta+r}=\frac{\alpha^2\Xi+\beta^2 H+2\alpha\beta Z}{\alpha\gamma\Xi+\beta\delta H+(\alpha\delta+\beta\gamma)Z+r}. \qquad (40)$$

Versteht man unter $\varkappa$ einen Proportionalitätsfaktor, so zerlegt sich (40) in die beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \varkappa\{\alpha^2\Xi+\beta^2 H+2\alpha\beta Z\}, \\ \zeta &= \varkappa\{\alpha\gamma\Xi+\beta\delta H+(\alpha\delta+\beta\gamma)Z\}+r(\varkappa-1). \end{aligned}\right\} \qquad (41)$$

Da indessen ζ in Ξ, H, Z homogen sein muß, muß das Glied $r(\varkappa-1)$ in Wegfall kommen, d. h. $\varkappa=1$ sein.

Damit gehen (41) über in die erste und dritte der Gleichungen (XIV), und ersetzt man in der ersten Gleichung (41), mit $\varkappa=1$, jede daselbst auftretende Größe durch ihre Konjugierte, so entsteht auch die zweite Gleichung (XIV).

Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Klasse erscheinen vom Jahre 1888 (Band XCVII) an in folgenden vier gesonderten **Abteilungen**, welche auch einzeln bezogen werden können:

Abteilung I. Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Kristallographie, Botanik, Physiologie der Pflanzen, Zoologie, Paläontologie, Geologie, Physischen Geographie und Reisen.

Abteilung II a. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und Mechanik.

Abteilung II b. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Chemie.

Abteilung III. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Anatomie und Physiologie des Menschen und der Tiere sowie aus jenem der theoretischen Medizin.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichnisse ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung Alfred Hölder, k. u. k. Hof- und Universitätsbuchhändler (Wien, I., Rothenthurmstraße 13), zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Teile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden auch in besonderen Heften unter dem Titel: »Monatshefte für Chemie und verwandte Teile anderer Wissenschaften« herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 14 K — 14 M.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Originalauszüge oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird wie bisher acht Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 5 K — 5 M.

132

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE.

CXVI. BAND. II. HEFT.

JAHRGANG 1907. — FEBRUAR.

ABTEILUNG II a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

(MIT 9 TEXTFIGUREN.)

WIEN, 1907.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN KOMMISSION BEI ALFRED HÖLDER.

K. U. K. HOF- UND UNIVERSITÄTSBUCHHÄNDLER.

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

A

INHALT

des 2. Heftes, Februar 1907, des CXVI. Bandes, Abteilung IIa, der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Klasse.

Seite

Hočevar F., Über die Bestimmung der quadratischen Teiler algebraischer Formen. [Preis: 50 h — 50 pf] 153

Hopfner F., Untersuchung über die Bestrahlung der Erde durch die Sonne mit Berücksichtigung der Absorption der Wärmestrahlen durch die atmosphärische Luft nach dem Lambert'schen Gesetze. I. Mitteilung: Analytische Behandlung des Problems. (Mit 1 Textfigur.) [Preis: 1 K 80 h — 1 M 80 pf] 167

Scheimpflug Th., Die Herstellung von Karten und Plänen auf photographischem Wege. (Mit 6 Textfiguren.) [Preis: 1 K 20 h — 1 M 20 pf] 235

Hofbauer G., Über das Vorkommen der seltenen Erden auf der Sonne. [Preis: 1 K 30 h — 1 M 30 pf] 267

Meyer St. und **Schweidler E., v.**, Untersuchungen über radioaktive Substanzen. (VIII. Mitteilung.) Über ein radioaktives Produkt aus dem Aktinium. (Mit 2 Textfiguren.) [Preis: 40 h — 40 pf] 315

Exner Fr. und **Haschek Ed.**, Über die Verschiebung der Spektrallinien. [Preis: 60 h — 60 pf] 323

Preis des ganzen Heftes: 4 K 15 h — 4 M 15 pf.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE.

CXVI. BAND. II. HEFT.

ABTEILUNG II a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

Über die Bestimmung der quadratischen Teiler algebraischer Formen

von

F. Hočevar in Graz.

(Vorgelegt in der Sitzung am 28. Februar 1907.)

Die linearen Teiler algebraischer Formen lassen sich, wie ich nachgewiesen habe,[1] stets durch Ausdrücke darstellen, welche nach der Nomenklatur der Formentheorie als Polaren erster Ordnung der Form zu bezeichnen sind. Zu jeder dieser Polaren gehört eine Nullstelle des entsprechenden linearen Teilers als Pol. Dieses Resultat veranlaßte mich zur Untersuchung, ob auch zwischen den Teilern höheren Grades und den Polaren höherer Ordnung ein Zusammenhang besteht und ob sich dieser zur Berechnung der Teiler verwenden läßt. Die Ergebnisse dieser Untersuchung, soweit sie quadratische Teiler betrifft, bilden den Gegenstand der vorliegenden Arbeit.

Es zeigte sich, daß man jeden quadratischen Teiler einer Form durch Polaren erster und zweiter Ordnung der Form in Bezug auf zwei gewissen Bedingungen entsprechende Nullstellen des Teilers darstellen kann. Mit Hilfe dieses Satzes und des eingangs erwähnten über lineare Teiler kann man die linearen und die quadratischen Teiler jeder beliebigen Form durch verhältnismäßig einfache Rechnung bestimmen und daher auch jede Form von niedrigerem als dem sechsten Grade in ihre im komplexen Zahlengebiet irreduktiblen Faktoren zerlegen. Vergleicht man den damit verbundenen Rechnungsaufwand mit jenem, welchen die

[1] Über die Zerlegbarkeit algebraischer Formen in lineare Faktoren, diese Sitzungsberichte, 1904, p. 409 bis 428; Über die Bestimmung der linearen Teiler einer algebraischen Form, Verhandlungen des dritten intern. Math.-Kongr. in Heidelberg, 1904, p. 151 bis 156.

bekannten Methoden[1] zur Zerlegung der Formen in irreduktible Faktoren erfordern, so überzeugt man sich leicht, daß das hier mitgeteilte Verfahren innerhalb der angegebenen Grenzen in jenen Fällen, in denen es sich um die wirkliche Durchführung der Rechnung handelt, weitaus den Vorzug verdient.

§ 1. Hilfssatz aus der Polarentheorie.

Wir gehen von der Gleichung

$$f = uv \tag{1}$$

aus, in welcher $f \equiv f(x)$, $u \equiv u(x)$ und $v \equiv v(x)$ Formen der Variablen $x_1, x_2, \ldots x_n$ bedeuten sollen, und finden

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = u\frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i}v,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = u\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_k} + \frac{\partial u}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}v$$

und allgemein

$$\frac{\partial^r f}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l \ldots} = \sum_{q=0}^{r}\left\{\sum_{\alpha,\beta\ldots}\left(\frac{\partial^q u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \ldots}\cdot\frac{\partial^{r-q} v}{\partial x_\lambda \partial x_\mu \ldots}\right)\right\}. \tag{2}$$

In dieser Gleichung ist die innere Summe in folgender Weise zu berechnen: Sind $i, k, l, \ldots$ verschiedene Zahlen der Reihe $1, 2, \ldots n$, so setze man für $\alpha, \beta, \ldots$ alle Kombinationen q^{ter} Klasse aus den Elementen $i, k, l, \ldots$ und für $\lambda, \mu, \ldots$ in jedem Falle die übrigbleibenden dieser Zahlen. Kommen hingegen unter den Zahlen $i, k, l, \ldots$ einander gleiche vor, so mache man sie zunächst, etwa durch Anhängen von Zeigern, voneinander verschieden, berechne dann die Summe wie im ersten Falle und beseitige schließlich durch Weglassen der Zeiger die vorübergehend angenommene Verschiedenheit. Somit ist in jedem dieser beiden Fälle die Anzahl der Summanden $= \binom{r}{q}$.

Ersetzt man nun in der Gleichung (2) die Variablen $x_1, x_2, \ldots x_n$ durch $y_1, y_2, \ldots y_n$, multipliziert beide Seiten der

[1] Siehe Enzyklopädie der math. Wiss., I. B 1 *b*, p. 259, oder Netto, Vorlesungen über Algebra, II, p. 14 und 17.

so transformierten Gleichung mit $x_i\, x_k\, x_l \ldots$, d. h. mit dem Produkt ebenderselben Variablen, nach denen bei der Ableitung der Gleichung (2) differenziiert wurde, und summiert für $i, k, l, \ldots = 1, 2, \ldots n$, so ergibt sich

$$\sum_{i,k,l,\ldots} x_i x_k x_l \ldots \frac{\partial^r f}{\partial y_i \partial y_k \partial y_l \ldots} =$$

$$\sum_{q=0}^{r} \left\{ \binom{r}{q} \sum_{i,k,\ldots} x_i x_k \ldots \frac{\partial^q u}{\partial y_i \partial y_k \ldots} \cdot \sum_{i,k,\ldots} x_i x_k \ldots \frac{\partial^{r-q} v}{\partial y_i \partial y_k \ldots} \right\}$$

oder auch, wenn

$$\frac{1}{r!} \cdot \sum_{i,k,l,\ldots} x_i x_k x_l \ldots \frac{\partial^r \varphi}{\partial y_i \partial y_k \partial y_l \ldots} = \Delta_x^r \varphi(y)$$

gesetzt wird,

$$\Delta_x^r f(y) = \sum_{q=0}^{r} \{\Delta_x^q u(y) . \Delta_x^{r-q} v(y)\}. \tag{3}$$

Da man bekanntlich $\Delta_x^r \varphi(y)$ oder auch einen dieser Größe proportionalen Ausdruck als die Polare r^{ter} Ordnung der Form $\varphi(x)$ in Bezug auf den Pol $(y) \equiv (y_1, y_2, \ldots y_n)$ bezeichnet, so zeigt also die Gleichung (3), welche die Grundlage der nachfolgenden Entwicklungen bildet, wie die Polare irgend einer Ordnung des Produktes zweier Formen durch die Polaren der Faktoren dargestellt wird.

Es mögen hier noch jene Eigenschaften der Polaren hervorgehoben werden, welche in dieser Arbeit zur Anwendung gelangen:

Ist $\varphi(x)$ eine Form vom Grade p, so hat man

$$\begin{aligned} &\Delta_x^0 \varphi(y) = \varphi(y), \\ &\Delta_x^r \varphi(y) = \Delta_y^{p-r} \varphi(x), \text{ wenn } 0 < r < p, \\ &\Delta_x^p \varphi(y) = \varphi(x), \\ &\Delta_x^r \varphi(y) = 0, \text{ wenn } r > p. \end{aligned} \tag{4}$$

2. Anwendung auf lineare Teiler.

Man setze in der Gleichung (3)

$$y_i = a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

und wähle diese Konstanten so, daß die Bedingungen

$$u(a) = 0, \quad v(a) \neq 0 \tag{5}$$

erfüllt sind. Führt man noch zur Abkürzung die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\Delta_x^r f(a) = F_r, \quad \Delta_x^r u(a) = U_r, \quad \Delta_x^r v(a) = V_r,$$

so geht die Gleichung (3) in die folgende über:

$$F_r = U_1 V_{r-1} + U_2 V_{r-2} + \ldots + U_r V_0. \tag{6}$$

Nun sei der Teiler u der Form f linear, also mit Rücksicht auf die Relationen (4)

$$U_1 = u, \; U_2 = U_3 = \ldots = 0.$$

Dann erhält man aus der Gleichung (6)

$$F_r = u V_{r-1}$$

und speziell für $r = 1$

$$F_1 = u V_0.$$

Da V_0 konstant ist, so führen diese beiden Gleichungen zu folgenden Sätzen:

Jeder lineare Teiler einer Form ist zugleich ein Teiler sämtlicher Polaren der Form in Bezug auf irgend eine Nullstelle (a) des linearen Teilers als Pol. Unter diesen Polaren ist jene der ersten Ordnung ein Teiler der gegebenen Form, vorausgesetzt, daß kein anderer Teiler dieser Form an der Stelle (a) verschwindet.

Der letzte Satz läßt sich, wie ich in der zweiten der eingangs zitierten Arbeiten nachgewiesen habe und wie auch aus dem § 5 der vorliegenden Arbeit hervorgeht, zur Bestimmung aller linearen Teiler irgend einer Form verwenden.

§ 3. Anwendung auf quadratische Teiler.

Nun sei der Teiler u der Form f vom zweiten und letztere vom m^{ten} Grade. Man hat dann mit Rücksicht auf die Relationen (4)

$$U_2 = u, \quad U_3 = U_4 = \ldots = 0,$$

$$V_{m-2} = v = \frac{f}{u}, \quad V_{m-1} = V_m = 0.$$

Aus der Gleichung (6) folgt daher, wenn man der Reihe nach $r = 1, 2, 3, \ldots m-2, m-1$ setzt,

$$\begin{aligned} F_1 &= U_1 V_0, \\ F_2 &= U_1 V_1 + u V_0, \\ F_3 &= U_1 V_2 + u V_1, \\ &\vdots \\ F_{m-2} &= U_1 V_{m-3} + u V_{m-4}, \\ F_{m-1} &= \frac{U_1 f}{u} + u V_{m-3}. \end{aligned}$$

Durch Elimination von U_1 ergibt sich daraus:

$$\begin{aligned} F_2 &= \frac{F_1 V_1}{V_0} + u V_0, \\ F_3 &= \frac{F_1 V_2}{V_0} + u V_1, \\ &\vdots \\ F_{m-2} &= \frac{F_1 V_{m-3}}{V_0} + u V_{m-4}, \\ F_{m-1} &= \frac{F_1 f}{u V_0} + u V_{m-3}. \end{aligned} \tag{7}$$

Nun kann man noch die Größen $V_1, V_2, \ldots V_{m-3}$ eliminieren, indem man die Gleichungen (7) der Reihe nach mit

$$1, \quad -\frac{F_1}{u V_0}, \quad \left(-\frac{F_1}{u V_0}\right)^2, \ldots \left(-\frac{F_1}{u V_0}\right)^{m-3}$$

multipliziert und hierauf addiert. Es zeigt sich, daß im Resultat u und V_0 nur in der Verbindung $u V_0$ vorkommen,

was für den Erfolg dieser Untersuchung von entscheidender Bedeutung ist. Setzt man also

$$uV_0 = z,$$

so gelangt man auf dem angegebenen Wege zur Gleichung

$$z^{m-1} - F_2 z^{m-2} + F_1 F_3 z^{m-3} - F_1^2 F_4 z^{m-4} + \ldots + (-1)^{m-2} F_1^{m-3} F_{m-1} z + (-1)^{m-1} F_1^{m-2} f = 0, \quad (8)$$

in welcher nun z als ein an der Stelle (a) verschwindender quadratischer Teiler der Form angesehen werden kann, da ja V_0 konstant und nach der Voraussetzung nicht gleich Null ist.

Hat also eine Form f des m^{ten} Grades einen quadratischen Teiler z, welcher an der Stelle (a) verschwindet, während alle anderen Teiler der Form an dieser Stelle von der Null verschieden sind, so ist z eine Wurzel der Gleichung (8).

Alle übrigen Wurzeln dieser Gleichung sind jedoch nicht Teiler der Form f, da sie an der Stelle (a) verschwinden. Denn an dieser Stelle sind, wie man sich leicht überzeugt, sämtliche in der Gleichung (8) vorkommende Polaren gleich Null.

§ 4. Explizite Darstellung des quadratischen Teilers durch Polaren.

Es handelt sich nun darum, den durch die Nullstelle (a) bestimmten quadratischen Teiler z der Form f aus der Gleichung (8) zu berechnen. Offenbar ist dies auf algebraischem Wege im allgemeinen nicht möglich und es bleibt daher nur der funktionentheoretische Weg übrig, das ist die Entwicklung in Potenzreihen. Für diesen Zweck ist die Stelle

$$x_1 = a_1,\ x_2 = a_2, \ldots x_n = a_n,\ z = 0$$

unbrauchbar, denn für die angenommenen Werte der Variablen x verschwinden die Koeffizienten sämtlicher Glieder der Gleichung außer dem ersten. Wir führen daher ein zweites System von speziellen Werten ein:

$$x_1 = b_1,\ x_2 = b_2, \ldots x_n = b_n,$$

von dem wir voraussetzen, daß an der Stelle (b) der quadratische Teiler z verschwindet, hingegen der Koeffizient der ersten Potenz der Unbekannten in der Gleichung (8) von der Null verschieden ist. Letzteres findet dann und nur dann statt, wenn die Bedingungen

$$F_1(b) \neq 0, \quad F_{m-1}(b) \neq 0 \tag{9}$$

erfüllt sind.

Die weitere Rechnung läßt sich mit Hilfe der ersten Gleichung im System (7) erheblich abkürzen. Setzt man nämlich

$$\frac{V_1}{V_0} = -w$$

und beachtet, daß $uV_0 = z$ ist, so verwandelt sich jene Gleichung in die folgende

$$z = F_2 + F_1 w \tag{10}$$

und man erkennt, daß hiedurch die Berechnung des quadratischen Teilers z auf jene des linearen Ausdruckes w zurückgeführt ist. Nun hat man

$$w = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial w}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial w}{\partial b_i}, \tag{11}$$

ferner mit Rücksicht auf die Gleichung (10)

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \frac{\partial F_2}{\partial x_i} + F_1 \frac{\partial w}{\partial x_i} + w \frac{\partial F_1}{\partial x_i}$$

und daher

$$\frac{\partial z}{\partial b_i} = \frac{\partial F_2}{\partial b_i} + F_1(b) \cdot \frac{\partial w}{\partial b_i} + w(b) \cdot \frac{\partial F_1}{\partial b_i}. \tag{12}$$

Um hieraus $\frac{\partial w}{\partial b_i}$ bestimmen zu können, muß man zuvor $\frac{\partial z}{\partial b_i}$ mit Hilfe der Gleichung (8) berechnen. Diese läßt sich durch Auflösen nach der ersten Potenz der Unbekannten auf die Form

$$z = \frac{F_1}{F_{m-1}} \cdot f + \frac{P}{F_1^{m-3} F_{m-1}} \cdot z^2$$

bringen, wo P eine ganze Funktion der Variablen $x_1, x_2, \ldots x_n, z$ bedeutet. Es ist also

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \frac{F_1}{F_{m-1}} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} + f \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{F_1}{F_{m-1}}\right) + \frac{P}{F_1^{m-3} F_{m-1}} \cdot 2z \frac{\partial z}{\partial x_i} + z^2 \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{P}{F_1^{m-3} F_{m-1}}\right),$$

und daher

$$\frac{\partial z}{\partial b_i} = \frac{F_1(b)}{F_{m-1}(b)} \cdot \frac{\partial f}{\partial b_i}. \tag{13}$$

Aus der Gleichung (10) erhält man ferner durch die Substitution $x_i = b_i$ $(i = 1, 2, \ldots n)$

$$0 = F_2(b) + F_1(b) \cdot w(b),$$

somit

$$w(b) = -\frac{F_2(b)}{F_1(b)}. \tag{14}$$

Führt man die in (13) und (14) erhaltenen Werte in die Gleichung (12) ein und löst nach $\frac{\partial w}{\partial b_i}$ auf, so erhält man

$$\frac{\partial w}{\partial b_i} = \frac{1}{F_{m-1}(b)} \cdot \frac{\partial f}{\partial b_i} + \frac{F_2(b)}{[F_1(b)]^2} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial b_i} - \frac{1}{F_1(b)} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial b_i} \tag{15}$$

oder auch wegen

$$\frac{\partial F_1}{\partial b_i} = \frac{\partial F_1}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial a_i},$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial b_i} = \sum_{k=1}^{n} b_k \frac{\partial^2 f}{\partial a_i \partial a_k} = \Delta_b \frac{\partial f}{\partial a_i},$$

$$\frac{\partial w}{\partial b_i} = \frac{1}{F_{m-1}(b)} \cdot \frac{\partial f}{\partial b_i} + \frac{F_2(b)}{[F_1(b)]^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial a_i} - \frac{1}{F_1(b)} \cdot \Delta_b \frac{\partial f}{\partial a_i}.$$

Nun substituiere man diesen Wert in die Gleichung (11). Es ist dann

$$w = \frac{1}{F_{m-1}(b)} \cdot \Delta_x f(b) + \frac{F_2(b)}{[F_1(b)]^2} \cdot \Delta_x f(a) - \frac{1}{F_1(b)} \cdot \Delta_x \Delta_b f(a)$$

oder endlich wegen

$$F_1(b) = \Delta_b f(a),$$
$$F_2(b) = \Delta_b^2 f(a),$$
$$F_{m-1}(b) = \Delta_b^{m-1} f(a) = \Delta_a f(b)$$

$$w = \frac{\Delta_x f(b)}{\Delta_a f(b)} + \frac{\Delta_b^2 f(a) . \Delta_x f(a)}{[\Delta_b f(a)]^2} - \frac{\Delta_x \Delta_b f(a)}{\Delta_b f(a)} . \tag{16}$$

Wir sind somit zu folgendem Resultat gelangt:

Hat eine Form f einen quadratischen Teiler z, der an den Stellen (a) und (b) verschwindet, ist ferner

$$\Delta_a f(b) \neq 0 \text{ und } \Delta_b f(a) \neq 0 \tag{17}$$

[vergl. die Bedingungen (9)] und verschwindet an der Stelle (a) kein anderer Teiler der Form, so ist

$$z = \Delta_x^2 f(a) + \\ + \Delta_x f(a) \cdot \left[\frac{\Delta_x f(b)}{\Delta_a f(b)} + \frac{\Delta_b^2 f(a) . \Delta_x f(a)}{[\Delta_b f(a)]^2} - \frac{\Delta_x \Delta_b f(a)}{\Delta_b f(a)}\right] . \tag{18}$$

Eine einfachere Form dieses Resultates ergibt sich aus der Bemerkung, daß man die rechte Seite der Gleichung (15) auch erhält, wenn man die gebrochene Funktion

$$\frac{f}{F_{m-1}} - \frac{F_2}{F_1}$$

nach x_i differentiiert und hierauf $x_i = b_i$ substituiert. Setzt man also

$$\frac{f(x)}{\Delta_x^{m-1} f(a)} - \frac{\Delta_x^2 f(a)}{\Delta_x f(a)} = \varphi(x),$$

so ist

$$z = \Delta_x^2 f(a) + \Delta_x f(a) . \Delta_x \varphi(b).$$

§ 5. Berechnung der quadratischen Teiler einer Form.

Es sei nun die Aufgabe gestellt, die quadratischen Teiler einer Form $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ des m^{ten} Grades zu bestimmen. Man kann annehmen, daß diese Form keine vielfachen Teiler besitzt

und das Glied mit x_1^m enthält, denn jeder andere Fall läßt sich auf einen solchen zurückführen, in welchem diese beiden Voraussetzungen erfüllt sind.[1] Nun setze man

$$x_2 = a_2,\ x_3 = a_3, \ldots x_n = a_n$$

und wähle die Zahlen a derart, daß alle m Wurzeln der Gleichung

$$f(x_1, a_2, a_3, \ldots a_n) = 0 \qquad (19)$$

voneinander verschieden sind. Dies kann auf unendlich viele Arten geschehen und es ist in der Regel auch möglich, die Gleichung (19) durch entsprechende Wahl der Zahlen a zu einer leicht auflösbaren zu machen. Bezeichnet man die Wurzeln mit

$$a_1^{(1)}, a_1^{(2)}, \ldots a_1^{(m)},$$

so hat man auf diese Weise m Nullstellen der Form f, nämlich

$$x_1 = a_1^{(\lambda)},\ x_2 = a_2, \ldots x_n = a_n \qquad (20)$$
$$(\lambda = 1, 2, \ldots m)$$

gefunden, welche zur Berechnung der linearen und der quadratischen Teiler der Form f benützt werden können.

Um die linearen Teiler zu finden, berechne man die Polaren erster Ordnung der Form in Bezug auf die Nullstellen (20) als Pole. Nach § 2 ist jeder lineare Teiler mit einer dieser Polaren identisch.

Nun verwende man jede mögliche Ambe der übrigbleibenden Nullstellen, d. i. jener, denen kein linearer Teiler entspricht, zur Berechnung des Ausdruckes (18). Dann ist jeder quadratische Teiler der Form mit einem dieser Ausdrücke identisch. Um zu beweisen, daß in der Tat je zwei der Nullstellen (20), die wir der bequemeren Schreibweise wegen auch weiterhin mit $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ und $(b_1, b_2, \ldots b_n)$ bezeichnen wollen, den Bedingungen (17) genügen, und um gleichzeitig die Formel (18) zu vereinfachen, berücksichtigen wir, daß im vorliegenden Falle die Gleichungen

$$b_2 = a_2,\ b_3 = a_3, \ldots b_n = a_n$$

[1] Vergl. die erste der beiden oben zitierten Arbeiten, p. 408 bis 411.

erfüllt sind. Da nun

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial f}{\partial a_i} = \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial f}{\partial b_i} = 0$$

und

$$\sum_{i,k} a_i a_k \frac{\partial^2 f}{\partial a_i \partial a_k} = 0$$

$$(i, k = 1, 2, \ldots n)$$

ist, so hat man

$$\Delta_b f(a) = \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial f}{\partial a_i} - \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial f}{\partial a_i} = (b_1 - a_1) \frac{\partial f}{\partial a_1}, \quad (21)$$

$$\Delta_a f(b) = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial f}{\partial b_i} - \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial f}{\partial b_i} = (a_1 - b_1) \frac{\partial f}{\partial b_1}. \quad (22)$$

Nach der Voraussetzung sind nun a_1 und b_1 zwei verschiedene einfache Wurzeln der Gleichung (19), somit sind die Bedingungen (17) in der Tat erfüllt.

Man findet ferner

$$\Delta_b^2 f(a) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,k} b_i b_k \frac{\partial^2 f}{\partial a_i \partial a_k} - \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_i a_k \frac{\partial^2 f}{\partial a_i \partial a_k}$$

$$= \frac{1}{2} (b_1^2 - a_1^2) \frac{\partial^2 f}{\partial a_1^2} + (b_1 - a_1) \sum_{i=2}^{n} a_i \frac{\partial^2 f}{\partial a_1 \partial a_i}$$

und da

$$\sum_{i=2}^{n} a_i \frac{\partial^2 f}{\partial a_1 \partial a_i} = (m-1) \frac{\partial f}{\partial a_1} - a_1 \frac{\partial^2 f}{\partial a_1^2}$$

ist, so folgt

$$\Delta_b^2 f(a) = \frac{1}{2} (b_1 - a_1)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial a_1^2} + (m-1)(b_1 - a_1) \frac{\partial f}{\partial a_1}. \quad (23)$$

Endlich ist

$$\Delta_x \Delta_b f(a) = \sum_{i=1}^{n} \left\{ x_i \sum_{k=1}^{n} b_k \frac{\partial^2 f}{\partial a_i \partial a_k} \right\},$$

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \frac{\partial^2 f}{\partial a_i \partial a_k} = \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial^2 f}{\partial a_i \partial a_k} + (b_1 - a_1) \frac{\partial^2 f}{\partial a_1 \partial a_i}$$

$$= (m-1) \frac{\partial f}{\partial a_i} + (b_1 - a_1) \frac{\partial^2 f}{\partial a_1 \partial a_i},$$

somit

$$\Delta_x \Delta_b f(a) = (m-1) \Delta_x f(a) + (b_1 - a_1) \Delta_x \frac{\partial f(a)}{\partial a_1}. \quad (24)$$

Setzt man nun die in (21) bis (24) erhaltenen Ausdrücke in die Gleichung (18) ein, so findet man

$$z = \Delta_x^2 f(a) + \Delta_x f(a) \cdot \left\{ A \Delta_x f(a) + B \Delta_x f(b) + C \Delta_x \frac{\partial f(a)}{\partial a_1} \right\}, \quad (25)$$

wo

$$A = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial a_1^2}}{2\left(\frac{\partial f}{\partial a_1}\right)^2}, \quad B = \frac{1}{(a_1 - b_1)\frac{\partial f}{\partial a_1}}, \quad C = -\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial a_1}}.$$

Es ist nun klar, daß diese Formeln zur Bestimmung der quadratischen Teiler der Form f in der oben angegebenen Weise benützt werden können, denn jeder quadratische Teiler von f verschwindet für zwei der Wertsysteme (20), während dieselben zwei Wertsysteme keinen anderen Teiler der Form annullieren und außerdem die Bedingungen (17) erfüllen.

Zur Abkürzung der Rechnung hat man zu beachten, daß die Zahl b_1 in der Gleichung (25) nur in dem Gliede

$$B \Delta_x f(b)$$

vorkommt. Man hat somit nur dieses Glied zu ändern, wenn der den Nullstellen (a) und (b) entsprechende Ausdruck z kein Teiler der Form ist und daher die erstere Nullstelle mit einer anderen kombiniert wird. Geht man in dieser Weise vor, so hat man z. B. bei biquadratischen Formen im ungünstigsten Falle nur drei Kombinationen von Nullstellen zu benützen.

Schließlich sei noch bemerkt, daß die mit der Bestimmung der quadratischen Teiler verbundene Rechnungsarbeit hauptsächlich vom Grade der Form abhängt und nur unbedeutend mit der Anzahl der Variablen zunimmt.

Erstes Beispiel.

$$f \equiv x_1^4 + x_1^2 x_2^2 - 2x_1^2 x_3^2 - 4x_1^2 x_2 x_3 - 4x_2^3 x_3 + 8x_2 x_3^3.$$

Setzt man $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, so geht die Gleichung $f = 0$ in

$$x_1^4 - 5x_1^2 + 4 = 0$$

über und hat die Wurzeln 1, —1, 2, —2. Nun sei

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 1,$$
$$b_1 = -1, \quad b_2 = 1, \quad b_3 = 1.$$

Dann erhält man

$$\Delta_x f(a) = -6(x_1 + x_2 - 2x_3),$$
$$\Delta_x f(b) = \quad 6(x_1 - x_2 + 2x_3),$$
$$\Delta_x^2 f(a) = x_1^2 - 4x_1 x_2 - 16x_1 x_3 - 11x_2^2 + 8x_2 x_3 + 22x_3^2,$$
$$\Delta_x \frac{\partial f(a)}{\partial a_1} = 2(x_1 - 2x_2 - 8x_3),$$
$$A = \frac{1}{36}, \quad B = \frac{1}{12}, \quad C = \frac{1}{6},$$
$$z = -3(x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2).$$

Durch Division überzeugt man sich, daß $x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2$ in der Tat ein Teiler der Form f ist.

Zweites Beispiel.[1]

$$f \equiv x_1^3 x_2 + x_1^2(x_3^2 + x_2 x_3) + x_1(x_2^3 + x_2^2 x_3 + x_3^3) + x_2^2 x_3^2 + x_2 x_3^3.$$

Hier liegt der Fall vor, daß eine Form des vierten Grades keine Variable in der vierten Potenz enthält. Trotzdem kann das oben abgeleitete Verfahren direkt angewendet werden, weil f bezüglich x_1 vom dritten Grade ist. Wenn also f in quadratische Faktoren zerfällt, so muß der eine bezüglich x_1 vom zweiten Grade sein.

---

[1] Vergl. Netto, Algebra, II, p. 18.

Setzt man $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, so erhält man die Gleichung

$$x_1^3 - x_1 = 0$$

mit den Wurzeln 0, 1, —1. Aus den Annahmen

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = -1$$
$$b_1 = 1, \quad b_2 = 1, \quad b_3 = -1$$

ergibt sich, daß der Ausdruck

$$x_1^2 + x_1 x_3 + x_2^2 + x_2 x_3$$

ein Teiler der gegebenen Form ist.

Untersuchung über die Bestrahlung der Erde durch die Sonne mit Berücksichtigung der Absorption der Wärmestrahlen durch die atmosphärische Luft nach dem Lambert'schen Gesetze

von

Dr. Friedrich Hopfner.

I. Mitteilung: Analytische Behandlung des Problems.

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 7. Februar 1907.)

I. Literatur. — Strenge Fassung des gestellten Problems.

Die Oberfläche der Erde erhält von vier Wärmequellen, deren Intensität jedoch eine sehr verschiedene ist, unausgesetzt Wärme zugesendet. Gegenwärtig und vielleicht auch für alle Zeiten unmeßbar,[1] weil ganz minimal, sind die Wärmemengen, welche von den meisten Fixsternen und Planeten — von letzteren als reflektierte Sonnenwärme — der Erde zugestrahlt werden. Auch eine Berechnung dieser Wärmemengen ist nach Maurer[2] ganz aussichtslos. Ebensowenig kommt beim dermaligen Stande der Meteorologie der Einfluß der Mondstrahlung für eine Berechnung der dem Erdballe zugestrahlten Wärmemengen in Betracht; sendet uns doch nach

---

[1] Langley, Researches on solar heat, Washington, 1884, p. 122. Über die Wärmestrahlung von Arkturus, Vega, Jupiter, Saturn lese man Nichols, Astrophysical Journal, vol. XIII, 1901, p. 101 ff. Referat hierüber Met. Zeitschr., 1902, p. 216.

[2] Maurer, Zur Frage der Sternstrahlung. Met. Zeitschr., 1890, p. 18.

Langley[1] der Mond wenig mehr als den hunderttausendsten Teil der Sonnenwärme zu.

Von größerer Bedeutung bereits für die Erwärmung der Erdoberfläche ist der konstante Wärmestrom, welcher aus dem warmen Erdinnern von den tieferen Erdschichten gegen die Erdoberfläche hinfließt und damit dieser unausgesetzt Wärme zuführt. Bei einem wahrscheinlichen Temperaturgradienten von 2·8° pro 100 *m* Tiefe und einem mittleren Wärmeleitungskoeffizienten der oberen Erdschichten von 0·0006 (*cm*—sec.) berechnet sich die Wärmemenge, welche pro Quadratzentimeter und Sekunde der Erdoberfläche zugeführt wird, zu 0·0000017[2] kleinen Kalorien, daher in einem Jahre von 31557000 mittleren Sekunden zu beiläufig 54·2 Grammkalorien. Nach Trabert[3] erhöht sich hiedurch die Mitteltemperatur der Erde um 0·1 bis 0·2°, also nur um einen sehr geringen Betrag. Zu dem kommt, daß die gleichmäßige Zufuhr von Wärme in allen Zonen der Erde und zu allen Zeiten des Jahres hinsichtlich ihres Effektes sich bei jeder Untersuchung über die relative Verteilung der der Erdoberfläche zugesandten Wärmemengen von selbst eliminiert. Dieser Umstand im Verein mit der Geringfügigkeit der Wärmemengen aus dem Erdinnern ist die Ursache, daß man bisher auch diese Wärmequelle der Erdoberfläche vernachlässigt hat. Es bleibt daher als einzige und im Vergleiche zu den bisher aufgezählten als ganz unverhältnismäßig große Wärmequelle der Erde die Sonne allein übrig; mit der Berechnung der von ihr den einzelnen Breiten der Erde zugestrahlten Wärmemengen befassen sich allein alle Untersuchungen, welche ein Bild von der Verteilung der Wärmestrahlung auf der Erdoberfläche geben. Von diesen seien die Nachstehenden besonders angeführt:

---

[1] Langley, The temperature of the Moon. National Academy of sciences, 1887, vol. IV.

[2] Nach Hann, Lehrbuch der Meteorologie, Leipzig, 1901, p. 23.

[3] Trabert, Die Bedeutung der inneren Erdwärme für die Mitteltemperatur der Erdoberfläche, Met. Zeitschr., 1897, p. 151; in der Abhandlung wird der genaue Wert 0·16° gefunden.

Halley, A discourse concerning the proportional heat of the Sun in all latitudes... (Phil. Transactions for the year 1693, vol. XVII).

Lambert, Pyrometrie. Berlin, 1779.[1]

Poisson, Théorie mathématique de la chaleur. Paris, 1835.[2]

Brenner, Die astronomische Wärme- und Lichtverteilung auf der Erdoberfläche (Grunert's Archiv der Mathematik und Physik, 1851).

Meech, On the relative intensity of the heat and light of the Sun etc. (Smithsonian contributions to Knowledge, vol. IX, Washington, 1856).

Plana, Mémoire sur la loi de refroidissement des corps sphériques et sur l'expression de la chaleur solaire dans les latitudes circumpolaires de la Terre (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. LVIII, Paris, 1864).

G. Lambert, Loi de l'insolation (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. LXV, Paris, 1867).

Chr. Wiener, Über die Stärke der Bestrahlung der Erde durch die Sonne in den verschiedenen Breiten und Jahreszeiten (Schlömilch's Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1877, T. 22; siehe auch Zeitschrift der österr. Gesellschaft für Meteorologie, Bd. XIV, Wien, 1879).

Sam. Haughton, New Researches on Sun Heat and Terrestrial Radiation (Trans. Royal Irish Academy, vol. XXVIII, Dublin, 1881, Part I, II. Part III in Royal Irish Academy Cunningham Memoirs No. III, Dublin, 1886).

Angot, Recherches théoriques sur la distribution de la chaleur à la surface du globe (Annales du Bureau Central Mét. de France, Mémoires de 1883, Paris, 1885).

W. Zenker, Die Verteilung der Wärme auf der Erdoberfläche. Berlin, 1888.

R. Hargreaves, Distribution of Solar Radiation on the surface of the Earth and its Dependence on Astron. Elements (Cambridge, Phil. Trans., vol. XVI, Part I, Jan. 1896).

---

[1] p. 305 ff.

[2] p. 473 ff.

Ebenso hat der Verfasser in den folgenden drei Monographien die Bestrahlung der Erde durch die Sonne behandelt, aber ohne Berücksichtigung des modifizierenden Einflusses der Atmosphäre auf die Wärmestrahlen:

Die Verteilung der solaren Wärmestrahlung auf der Erde (diese Sitzungsberichte, Bd. CXIV, Abt. IIa, 1905).

Über die Größe der solaren Wärmemengen, welche in gegebenen Zeiten beliebigen Breiten der Erde zugestrahlt werden (Met. Zeitschr., 1906, p. 385 ff.).

Die tägliche solare Wärmestrahlung auf einer in beliebiger Breite fest gegebenen Flächeneinheit (Met. Zeitschr., 1906, p. 396 ff.).

Die oben angeführten chronologisch geordneten Monographien teilen sich in zwei Gruppen, je nachdem nämlich der Einfluß der die Erde umgebenden Atmosphäre auf die sie passierenden Wärmestrahlen von den Autoren berücksichtigt wurde oder nicht. Mit der Besprechung der Ergebnisse der beiden wichtigsten zur ersten Gruppe zählenden Abhandlungen wird sich ein späterer Abschnitt dieser Untersuchung eingehend befassen.

Viel wichtiger für die richtige Behandlung des ganzen Problems als diese Scheidung der Autoren in zwei Gruppen aber ist folgende:

Obwohl fast keiner der aufgezählten Verfasser ein Gewicht darauf legt, ja sogar nur wenige sich dessen überhaupt bewußt sind, erkennt man dennoch bei einem vergleichsweisen Studium obiger Monographien unschwer, daß in der Stellung und Behandlung des vorliegenden Problems zwei Auffassungen bestehen, die, wesentlich voneinander verschieden, zu Ergebnissen[1] führen, die nur richtig bleiben bei strenger Festhaltung jener Fassung des Problems, unter der sie ermittelt wurden. Der Vergleich der einzelnen Abhandlungen miteinander zeigt nämlich, daß die einen von den Autoren jene wirklichen

[1] Siehe hiezu die Ergebnisse des Vergleiches der Bestrahlung von Äquator und Pol in der von der Wiener Akademie veröffentlichten Abhandlung des Verfassers, p. 1344 ff.

Wärmemengen zu berechnen suchen, welche im Laufe eines Tages einer auf beliebiger Breite festgegebenen Flächeneinheit zugestrahlt werden, und von diesen wirklichen Wärmemengen, die sie für verschiedene Tage des Jahres berechnen, auf den jährlichen Gang der Wärmestrahlung auf der angenommenen Breite überhaupt schließen, die zweite Gruppe der Autoren aber von einer solchen festgegebenen Flächeneinheit ganz abstrahiert und jene durchschnittlichen Wärmemengen zu ermitteln trachtet, die pro Flächeneinheit einer beliebigen Breite in gewissen Zeitabschnitten zugestrahlt werden und auf Grund dieser Wärmemengen den jährlichen Verlauf der Wärmestrahlung auf der angenommenen Breite untersucht.

Diese Unterscheidung ist für die exakte Behandlung des vorliegenden Problems grundlegend; es wird daher zweckmäßig sein, sie mathematisch zu begründen und astronomisch zu veranschaulichen.

Zu diesem Zwecke wollen wir überlegen, von welchen Faktoren die Wärmemenge abhängt, die in jedem Zeitmoment auf eine Flächeneinheit an der Erdoberfläche auffällt. Nach dem allgemeinen, für jede Strahlung gültigen Gesetz ist die Wärmemenge einmal von der Entfernung der Sonne von der betrachteten Flächeneinheit und dann von dem Winkel abhängig, unter dem die Sonnenstrahlen auf sie auffallen. Da jedoch die Strahlen nicht direkt zu der Flächeneinheit gelangen, sondern vorher noch die die Erde umgebende atmosphärische Luft zu passieren haben, in der sie eine Schwächung ihrer Intensität erfahren, so wird die Menge der zugestrahlten Wärme auch abhängig sein von dem Einflusse der Luft auf die Wärmestrahlen. Es ist uns jedoch einstweilen gestattet, von diesem Einflusse der Atmosphäre auf die Wärmestrahlen ganz abzusehen, ohne daß hiedurch die Allgemeinheit unserer Betrachtung eine Einbuße erfährt. Dann ist also die der angenommenen Flächeneinheit in jedem Zeitmoment zugestrahlte Wärmemenge allein abhängig von der Entfernung der Erde von der Sonne und von dem Winkel, unter dem die Wärmestrahlen auf die Flächeneinheit auffallen. Es berechnet sich dann die unendlich kleine Wärmemenge dq, welche in der

unendlich kleinen (mittleren) Zeit dt der Flächeneinheit zugestrahlt wird, aus der Gleichung

$$dq = F(r, h)\, dt,$$

wenn r die Entfernung der Flächeneinheit vom Sonnenmittelpunkte, h die Erhebung der Sonne über deren Horizont darstellt.

Durch die Angabe der Entfernung r ist aber die gewählte Flächeneinheit nicht in eindeutiger Weise in ihrem Orte in der Erdbahn festgelegt, da ja demselben Radiusvektor r zwei Erdorte symmetrisch zur Apsidenlinie der Erdbahn entsprechen. Es wird sich daher für eine eindeutige Bestimmung empfehlen, ein anderes Element der jährlichen Bewegung der Erde in ihrer Bahn als unabhängig Veränderliche obiger Gleichung zu wählen. Als solche eignet sich die Länge $\odot$ der wahren Sonne am besten, da sie vom Frühlingspunkte von 0 angefangen die ganze Erdbahn im Sinne der Erdbewegung hindurch bis 360° gezählt wird, derart, daß einem bestimmten $\odot$ immer nur ein Erdort entspricht. Ebenso steht es mit dem Winkel h, da zweimal im Tage, am Vor- und Nachmittage, die Sonne dieselbe Höhe über dem Horizont erreicht. Praktischer ist es für eine eindeutige Bestimmung, den Stundenwinkel der wahren Sonne τ zu verwenden, den wir, dem allgemeinen Brauche folgend, am Vormittage negativ, am Nachmittage positiv zählen wollen.

Führen wir diese neuen eindeutigen Veränderlichen an Stelle der alten ein, so ist die Wärmemenge, welche im Laufe einer gewissen Zeit von t_0 bis t der betrachteten Flächeneinheit zugestrahlt wird, gegeben durch das nachstehende Integral

$$q = \int_{t_0}^{t} f(\odot, \tau)\, dt.$$

Hierin sind beide Veränderliche $\odot$ und τ mit der mittleren Zeit variabel. Trotz dieser Gemeinsamkeit besteht jedoch der große, astronomisch begründete Unterschied zwischen ihnen, daß die erstere Veränderliche ein Element der jährlichen Bewegung der Erde um die Sonne ist, also die Stellung der

Flächeneinheit auf der Erde in deren Bahn fixiert, während der Stundenwinkel als Element der scheinbaren täglichen Bewegung der Sonne um die Erde die Stellung ersterer während des Tages für jeden Zeitmoment dt gegenüber der angenommenen Flächeneinheit festlegt.

Soll nun die angezeigte Operation des Integrierens auf der rechten Seite obiger Gleichung tatsächlich durchgeführt werden, so ist erforderlich, daß nur eine unabhängige Veränderliche unter dem Integralzeichen auftrete. Und da ist es nun ohne weiteres klar, daß sich der Untersuchung zwei Möglichkeiten darbieten; entweder wählt man nämlich den wahren Stundenwinkel τ der Sonne als unabhängig Veränderliche oder die wahre Länge der Sonne $\odot$ als solche. Im ersteren Falle wird man die wahre Länge der Sonne $\odot$ als Funktion des wahren Stundenwinkels τ, im zweiten Falle aber umgekehrt den wahren Stundenwinkel τ als Funktion der wahren Sonnenlänge $\odot$ darzustellen haben. Auf diese Weise gelangt man aber zu zwei Integralen von nachstehender Form:

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} f_1(\tau)\, d\tau \quad \text{und} \quad \int_{\odot_1}^{\odot_2} f_2(\odot)\, d\odot,$$

deren verschiedene physikalische Bedeutung auf den ersten Blick schon daraus erhellt, daß die erstere von den beiden Wärmemengen nur abhängig ist von der scheinbaren täglichen Bewegung der Sonne um die Erde, während die zweite Wärmemenge — von dieser scheinbaren Bewegung ganz unabhängig — nur bestimmt ist durch die jährliche Stellung der Erde in ihrer Bahn innerhalb der Integrationsgrenzen.

Damit ist der mathematische Beweis erbracht, daß die Lösung des Problems auf zwei Wegen angestrebt werden kann; die besondere Fassung, die hiedurch in jedem Falle das Problem erfährt, und die physikalische Bedeutung der auf jedem der beiden Wege ermittelten Wärmemengen läßt uns aber die Astronomie erkennen.

Wir schicken voraus, daß gemäß der geometrischen Bedeutung eines jeden Integrals als Flächeninhalt einer Kurve die beiden Funktionen f_1 und f_2, die sogenannten Strahlungs-

funktionen, Gleichungen von Kurven sind, deren physikalische Bedeutung sich gemeinsam mit jener der beiden Integrale ergibt.

Behufs Erkenntnis dieser verschiedenen physikalischen Bedeutung der beiden durch obige Integrale bestimmten Wärmemengen denken wir uns einmal auf eine Flächeneinheit, welche in beliebiger Breite (ausgenommen die beiden Pole) fest angenommen ist, und dann in den Sonnenmittelpunkt versetzt.

Auf der in beliebiger Breite fest angenommenen Flächeneinheit ist die Größe der Wärmemenge, welche in jedem Zeitmoment dt zugestrahlt wird, abhängig von dem Stande der Sonne über dem Horizonte dieser Flächeneinheit. Diese Wärmemenge ist um so größer, je höher sich die Sonne über dem Horizonte befindet; sie wächst daher mit zunehmender Sonnenhöhe und wird kleiner mit abnehmender Sonnenhöhe. In jenen Breiten, auf welchen die Sonne untergeht, hört die Wärmestrahlung mit Anbruch der Nacht auf der Flächeneinheit ganz auf. Das sind, weil alltägliche Erscheinungen, bekannte Tatsachen. Sie lehren aber, daß die Wärmestrahlung auf einer solchen festen Flächeneinheit von beliebiger Breite abhängig ist von der scheinbaren täglichen Bewegung der Sonne. Es wird deshalb die Strahlungsfunktion, welche den Verlauf der Wärmestrahlung auf einer solchen Flächeneinheit angibt, ein Element der scheinbaren täglichen Bewegung als unabhängig Veränderliche enthalten müssen und damit die Wärmemenge, welche innerhalb einer gegebenen Zeit dieser Flächeneinheit zugestrahlt wird, durch ein Integral über eine so beschaffene Strahlungsfunktion gegeben sein.

Wenn wir uns also in dem Integrale, von dem wir ausgegangen sind, das Element der jährlichen Bewegung, nämlich die Länge der wahren Sonne, durch den Stundenwinkel der wahren Sonne ersetzt denken, so berechnen wir damit jene Wärmemenge, welche einer in beliebiger Breite festgegebenen Flächeneinheit zugestrahlt wird.

Im besonderen wird dies die im Laufe eines ganzen Tages zugestrahlte Wärmemenge sein, wenn in unserem allgemeinen

Integral τ_1 den Stundenwinkel des Sonnenaufganges, τ_2 den des -Unterganges vorstellt.

Will man daher jene Wärmemenge berechnen, welche dieser Flächeneinheit innerhalb einer längeren Zeit, welche die Dauer eines Bestrahlungstages überschreitet, zugesandt wird, so hat man diese in eine Summe von Strahlungstagen und Nächten zu zerlegen und für die Strahlungstage durch Integration auf die eben besprochene Weise die zugestrahlten Wärmemengen zu berechnen, die dann zu summieren sind.

Es ist somit für einen längeren Zeitabschnitt als den eines Tages die Berechnung der der fest angenommenen Flächeneinheit zugestrahlten Wärmemenge nicht durch eine bloße Integration ausführbar. Sie hat vielmehr allgemein in der Form

$$\sum_{1}^{r}{}_{p}\int_{\tau_{2p-1}}^{\tau_{2p}} f_1(\tau)\, d\tau$$

zu erfolgen, wenn $\tau_1, \tau_3, \tau_5, \ldots \tau_{2r-1}$ die Stundenwinkel der Sonnenaufgänge, $\tau_2, \tau_4, \tau_6, \ldots \tau_{2r}$ die der Sonnenuntergänge in r aufeinander folgenden Tagen vorstellen.

Obige Summenformel gewinnt an Klarheit durch eine geometrische Betrachtung, bei welcher wir uns auf den speziellen Fall des Äquators beschränken wollen. Es ist dann nicht schwer, für diesen den allgemeinen Charakter der Funktion $f_1(\tau)$ anzugeben. Denken wir uns nämlich die Sonne als Fixstern, für welchen dann sowohl Deklination als Radiusvektor konstant genommen werden muß, so ist einfach bis auf eine multiplikative Konstante $f_1(\tau) = \cos \tau$. Da nun die Eigenbewegung der Sonne, also ihre Deklinations- und Distanzänderung, im Laufe eines Tages relativ klein ist, so wird auch bei ihr genähert die obige Gleichung gelten.

Geometrisch betrachtet, heißt das aber nichts anderes, als daß der funktionale Verlauf der täglichen Wärmestrahlung auf einer am Äquator festgegebenen Flächeneinheit näherungsweise durch eine Sinuslinie gegeben ist; die Wärmemenge aber, welche im Laufe eines Tages ihr zugesandt wird, durch den Flächeninhalt, welcher von dieser Kurve und einer Achse des gewählten Koordinatensystems eingeschlossen wird.

Hiebei schneidet diese Kurve die Achse der Stundenwinkel in den Punkten τ_1 und τ_2, also den Stundenwinkeln des Sonnen-Auf- und -Unterganges. Denken wir uns nun diese Stundenwinkel auf dieser Stundenachse für eine ganze Reihe von Tagen aufgetragen und für die Strahlungstage unsere Kurve konstruiert, so wird die Gesamtwärme, welche in dieser Zeit der Flächeneinheit zugestrahlt wird, nicht durch eine einzige Integration bestimmbar sein, da sie geometrisch nicht durch eine einzige zusammenhängende Fläche, sondern durch eine Anzahl diskret liegender Flächen repräsentiert ist. Man wird daher den Inhalt einer jeden einzelnen dieser Flächen durch eine besondere Integration bestimmen und diese Inhalte dann summieren. Das besagt aber obige Summenformel.

Eine wesentlich andere Bedeutung kommt jener Wärmemenge zu, welche sich aus dem zweiten allgemeinen Integrale mit der Länge der wahren Sonne als unabhängig Veränderliche bestimmt. Diese wird erkannt, wenn wir unseren Standort im Sonnenmittelpunkte wählen.

Von diesem aus sehen wir die der Sonne zugekehrte Hälfte der Erde als leuchtende Scheibe, etwa so, wie wir bei Vollmond von der Erde aus den Mond sehen. Von sämtlichen Breitenkreisen der Erde, wenn wir vorläufig die in der Polarzone ausschließen, wird ein bestimmtes Stück auf der Licht-, ein anderes auf der Schattenseite liegen, nämlich auf dem von der Sonne abgekehrten Teile der Erde, der unbeleuchtet und von unserem Standort im Sonnenmittelpunkt aus unsichtbar ist. Doch wird nicht stets dasselbe Stück des Breitenkreises beleuchtet, beziehungsweise unbeleuchtet sein, sondern infolge der Rotation der Erde um die Achse treten immer andere Punkte des Parallelkreises vom Licht in den Schatten und umgekehrt.

Denken wir uns also, von der Sonne aus gesehen, die Erde ihre Bahn innerhalb der beiden Bahnpunkte A und B durchlaufen, so sind während dieser Zeit die betrachteten Breitenkreise ununterbrochen bestrahlt, zwar nicht ihrem ganzen Umfange nach, aber doch innerhalb der Lichtgrenze. Es wird ihnen daher auch ununterbrochen auf diesem Wege Wärme zugestrahlt. Denkt man sich diese einem Breiten-

kreise zugesandte Wärmemenge durch seinen Umfang dividiert, so erhält man damit die diesem Breitenkreis auf dem Wege von A nach B pro Flächeneinheit zugestrahlte mittlere durchschnittliche Wärmemenge.

Diese Definition beschränkt sich zunächst auf Breitenkreise innerhalb der Zone zwischen den beiden Polarkreisen. Doch ist es klar, daß sie auch für jeden Parallelkreis außerhalb dieser beiden Grenzen gelten muß, welcher auf dem Wege von A nach B zwar nicht seinem ganzen Umfange nach, aber doch zum Teile bestrahlt ist. Ja, noch weiter wird sie auch für alle Breitenkreise gelten müssen, welche auf dem Wege von A nach B ihrem ganzen Umfange nach bestrahlt worden sind. Es gilt daher obige Definition ganz allgemein für jede Breite der Erde, welche auf dem Wege von A nach B ihrem ganzen Umfange nach oder nur zum Teile bestrahlt worden ist.

Wie beschaffen wird nun die unabhängig Veränderliche der Strahlungsfunktion sein, welche den Verlauf dieser mittleren Wärmestrahlung auf einer beliebigen Breite angibt? Ein tägliches Element wird diese nicht sein können, da die mittlere Wärmemenge ganz unabhängig von einer scheinbaren täglichen Bewegung ist, was am besten einleuchtet, wenn man bedenkt, daß die oben für sie gegebene Definition auch dann gültig bleibt, wenn die Erde keine Rotation um ihre Achse ausführen würde. Eben daraus folgt aber weiter, daß diese Wärmemenge nur abhängig ist von dem von der Erde in der Ekliptik zurückgelegten Wege. Es muß daher die unabhängig Veränderliche ihrer Strahlungsfunktion ein Element der jährlichen Bewegung sein.

Wenn also in dem unserer Betrachtung zu Grunde liegenden Integrale der Stundenwinkel eliminiert und die Länge der wahren Sonne als alleinige unabhängige Variable eingeführt wird, so gibt das Integral jene mittlere durchschnittliche Wärmemenge, welche pro Flächeneinheit der betrachteten Breite zugestrahlt wird. Während bei der früheren Fassung des Problems die Strahlungsfunktion infolge ihrer Abhängigkeit von der scheinbaren täglichen Bewegung diskontinuierlich wurde,

wenn man über den Zeitraum eines Strahlungstages hinausging (denn sie blieb für ganze Stundenwinkelintervalle Null) und daher das Integral höchstens über diesen erstreckt werden durfte, kann bei der Strahlungsfunktion dieser mittleren Wärmestrahlung eine Diskontinuität aus diesem Grunde nicht eintreten und daher, ihre sonstige Stetigkeit vorausgesetzt, ihre Integration innerhalb beliebiger Grenzen vorgenommen werden. Es wird daher im Gegensatze zum früher besprochenen Falle die Berechnung jener Wärmemengen, welche in beliebigen Zeiträumen der betrachteten Breite pro Flächeneinheit zugestrahlt werden, stets durch eine bloße Integration möglich sein.

Eine besondere Stellung unter allen Breiten nimmt der Pol ein. Für ihn als Punkt fällt die mittlere Wärmemenge pro Flächeneinheit naturgemäß zusammen mit jener Wärmemenge, welche der auf ihm gegebenen Flächeneinheit wirklich zugestrahlt wird.

Es braucht wohl nicht besonders hervorgehoben zu werden, daß unter diesem Gesichtspunkte dem bestrahlten Pol und allen Breiten, ausschließlich natürlich der gänzlich unbestrahlten Parallelkreise in der Polarzone der augenblicklichen Winterhemisphäre, innerhalb der Bahnstrecke von A bis B die gleiche Strahlungszeit zukommt.

In der vorliegenden Abhandlung soll das Problem der Bestrahlung der Erde durch die Sonne nur in der letzteren Fassung, welche für die Meteorologie die ungleich wichtigere ist, behandelt werden, also stets nur von jenen mittleren, durchschnittlichen Wärmemengen die Rede sein, welche pro Flächeneinheit einer beliebigen Breite in gewissen Zeiten zugestrahlt werden.

Zum Schlusse seien noch zwei Autoren, die beide die Verteilung der solaren Wärmestrahlung auf der Erdoberfläche, also jener Wärmestrahlung, welche die Erdoberfläche bei Fehlen einer Atmosphäre treffen würde, behandeln, als typische Beispiele einander gegenübergestellt, daß sich das vorliegende Problem tatsächlich unter beiden Auffassungen behandeln läßt. Wir vergleichen die beiden eingangs zitierten Abhandlungen Meech's und Wiener's miteinander. Der erstere benützt die gebräuchliche, allerdings mathematisch nicht ganz strenge

Formel zur Berechnung der Wärmemenge, welche im Laufe eines Tages einer auf beliebiger Breite festgegebenen Flächeneinheit zugestrahlt wird, für seine Rechnungen[1] und bestimmt mit ihr die Wärmemengen, welche der angenommenen Flächeneinheit in einer Reihe von Tagen im Jahre zugestrahlt werden, und schließt aus deren Veränderlichkeit von Tag zu Tag auf den Verlauf der solaren Strahlung während des ganzen Jahres auf der betrachteten Breite überhaupt. Anders Wiener; auch er geht zwar von derselben Formel aus, die Meech seiner Untersuchung zu Grunde legt, jedoch drückt er die in ihr auftretende Variable der scheinbaren täglichen Bewegung, den Stundenwinkel, durch Veränderliche der jährlichen Bewegung aus, so daß dann in der Formel für die Wärmemenge eines Tages nur Elemente der jährlichen Bewegung als unabhängige Variable auftreten. Diese so umgewandelte Formel für die Berechnung der Wärmesumme eines Tages definiert nun Wiener — allerdings nicht in einwandfreier Weise[2] — als den Differentialquotienten der mittleren Wärmemenge nach der mittleren Zeit, welche pro Flächeneinheit der angenommenen Breite zugestrahlt wird. Trotz des fundamentalen Unterschiedes, welcher zwischen den von beiden Verfassern dem Problem gegebenen Fassungen besteht, sind beide Abhandlungen dennoch, sowohl was die analytische Behandlungsweise als auch die erhaltenen Resultate anbelangt, ohneweiters miteinander verglichen worden,[3] wie wenn beide Untersuchungen genau

---

[1] Nämlich die bekannte Formel

$$W = 2\frac{C}{c}(\cos\delta\cos\varphi\sin t_0 + t_0\sin\delta\sin\varphi),$$

in welcher t_0 der Stundenwinkel des Sonnen-Auf-, beziehungsweise -Unterganges ist. Es enthält somit die Formel ein Element der scheinbaren täglichen Bewegung als unabhängig Veränderliche; es können daher nach unseren vorigen Betrachtungen die mit ihrer Hilfe berechneten Wärmemengen nur solche sein, welche in der Breite φ einer festgegebenen Flächeneinheit, in deren Mittag die Sonne die Deklination δ erreicht, zugestrahlt werden.

[2] Bezüglich der sich an die Wiener'sche Definition knüpfenden Bedenken lese man die Einleitung der von der Wiener Akademie publizierten Abhandlung des Verfassers.

[3] Z. B. F. Roth, Die Sonnenstrahlung auf der nördlichen im Vergleiche mit derjenigen auf der südlichen Hemisphäre. Halle, 1885.

denselben Gegenstand betreffen würden, was der Klarheit auf diesem Gebiete der Meteorologie nicht eben förderlich war.

Auch der Verfasser hat das Problem der solaren Wärmestrahlung unter beiden Auffassungen behandelt, und zwar in der ersten Fassung in der letzten der angeführten Abhandlungen, wie übrigens schon deren Titel besagt, in der zweiten Fassung aber in ausführlicher Weise in den beiden ersteren Abhandlungen.

II. Einige Sätze über die Verteilung der solaren Wärmestrahlung auf der Erdoberfläche.

In den folgenden Abschnitten wird die Untersuchung über die Verteilung der Wärmestrahlung auf der Erdoberfläche und die Berechnung der Wärmemengen, welche nach Passieren der atmosphärischen Luft pro Flächeneinheit auf sie auffallen, auf Grund der Ergebnisse durchgeführt werden, zu denen der Verfasser bei Behandlung des Problems der solaren Wärmestrahlung gelangt ist. Diese Art der Untersuchung setzt nicht nur die Vertrautheit mit einigen Gleichungen, welche in der diesbezüglichen, von der Wiener Akademie veröffentlichten Abhandlung abgeleitet worden sind, voraus, sondern auch die genaue Kenntnis der Verteilung der solaren Wärmestrahlung auf der Erdoberfläche überhaupt. Es soll daher in diesem Abschnitte alles für die spätere Entwicklung Notwendige in Kürze zusammengestellt werden.

Das Gesetz der Verteilung der solaren Wärmestrahlung auf der Erdoberfläche spricht nachstehende Gleichung aus:[1]

$$\left(\frac{dW}{d\odot}\right)_\varphi = \left(\frac{dW}{d\odot}\right)_{\varphi=0} \cos\varphi + \left(\frac{dW}{d\odot}\right)_{\varphi=90} \sin\varphi. \qquad (1)$$

---

[1] Wir gebrauchen im nachstehenden folgende Bezeichnungsweise: W solare Wärmemenge; q Wärmemenge, welche nach erfolgter Absorption in der Atmosphäre auffällt; C Proportionalitätsfaktor; φ Polhöhe; h Höhe; τ Stundenwinkel der wahren Sonne; δ Sonnendeklination; $\odot$ Länge der wahren Sonne; L Länge der mittleren Sonne; c Flächenkonstante; m Masse der Erde; r Radiusvektor; a halbe große Achse; e Exzentrizität; π Periheldistanz der Erdbahn; ε Schiefe der Ekliptik.

Sie besagt, daß die unendlich kleine mittlere solare Wärmemenge, welche einer beliebigen Breite pro Flächeneinheit auf jeder unendlich kleinen Längendifferenz $d\odot$ zugestrahlt wird, bekannt ist, wenn die mittleren solaren Wärmemengen gegeben sind, die auf derselben unendlich kleinen Längenänderung dem Äquator und dem Pole zugestrahlt werden. Die Differentialquotienten dieser Wärmemengen nach der wahren Sonnenlänge lassen sich aus folgenden Gleichungen bestimmen, nämlich

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{dW}{d\odot}\right)_{\varphi=90} &= \pm\frac{1}{2}p\sin\odot, \quad p = 2\frac{C}{c}\sin\varepsilon \\ \left(\frac{dW}{d\odot}\right)_{\varphi=0} &= a_0 + \sum_1^\infty{}_\varkappa (a_\varkappa\cos\varkappa\odot \pm b_\varkappa\sin\varkappa\odot) \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

wobei sich die Konstanten dieser Fourier'schen Reihe bis auf kleine Glieder dritter Ordnung in der Exzentrizität der Erdbahn, wie folgt, aus deren Elementen zusammensetzen:

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{C\cos^2\frac{\varepsilon}{2}}{c}\left(1-e^2+\frac{1}{8}e^2\cos 2\pi\,\mathrm{tg}^2\frac{\varepsilon}{2}\cdots\right) \\ a_1 &= \frac{C\cos^2\frac{\varepsilon}{2}}{c}\left(e\cos\pi\,\mathrm{tg}^2\frac{\varepsilon}{2}+\frac{3}{4}e^3\cos\pi-\right. \\ &\qquad -\frac{1}{8}e^3\cos\pi\,\mathrm{tg}^2\frac{\varepsilon}{2}- \\ &\qquad\qquad \left.-\frac{1}{24}e^3\cos 3\pi\,\mathrm{tg}^2\frac{\varepsilon}{2}\cdots\right) \\ a_2 &= \frac{C\cos^2\frac{\varepsilon}{2}}{c}\left(\mathrm{tg}^2\frac{\varepsilon}{2}-e^2\,\mathrm{tg}^2\frac{\varepsilon}{2}+e^2\cos 2\pi\ldots\right) \\ a_3 &= \frac{C\cos^2\frac{\varepsilon}{2}}{c}\left(-e\cos\pi\,\mathrm{tg}^2\frac{\varepsilon}{2}+\frac{7}{8}e^3\cos\pi\,\mathrm{tg}^2\frac{\varepsilon}{2}-\right. \\ &\qquad\qquad \left.-\frac{3}{4}e^3\cos 3\pi\ldots\right) \end{aligned}\right|$$

$$
\left.
\begin{aligned}
a_4 &= \frac{C\cos^2\frac{\varepsilon}{2}}{c}\left(\frac{7}{8}e^2\cos 2\pi\,\mathrm{tg}^2\frac{\varepsilon}{2}\cdots\right)\\
a_5 &= \frac{C\cos^2\frac{\varepsilon}{2}}{c}\left(-\frac{17}{24}e^3\cos 3\pi\,\mathrm{tg}^2\frac{\varepsilon}{2}\cdots\right)\\
b_1 &= \frac{C\cos^2\frac{\varepsilon}{2}}{c}\left(-e\sin\pi\,\mathrm{tg}^2\frac{\varepsilon}{2}+\frac{3}{4}e^3\sin\pi+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{8}e^3\sin\pi\,\mathrm{tg}^2\frac{\varepsilon}{2}-\right.\\
&\qquad\left.-\frac{1}{24}e^3\sin 3\pi\,\mathrm{tg}^2\frac{1}{2}\cdots\right)\\
b_2 &= \frac{C\cos^2\frac{\varepsilon}{2}}{c}(e^2\sin 2\pi\ldots)\\
b_3 &= \frac{C\cos^2\frac{\varepsilon}{2}}{c}\left(-e\sin\pi\,\mathrm{tg}^2\frac{\varepsilon}{2}+\frac{7}{8}e^3\sin\pi\,\mathrm{tg}^2\frac{\varepsilon}{2}-\right.\\
&\qquad\left.-\frac{3}{4}e^3\sin 3\pi\ldots\right)\\
b_4 &= \frac{C\cos^2\frac{\varepsilon}{2}}{c}\left(\frac{7}{8}e^2\sin 2\pi\,\mathrm{tg}^2\frac{\varepsilon}{2}\cdots\right)\\
b_5 &= \frac{C\cos^2\frac{\varepsilon}{2}}{c}\left(-\frac{17}{24}e^3\sin 3\pi\,\mathrm{tg}^2\frac{\varepsilon}{2}\cdots\right)
\end{aligned}
\right\}\quad(3)
$$

Von dem Doppelzeichen in den beiden Gleichungen (2) ist das positive Zeichen zu wählen, wenn der Nordpol, das negative, wenn der Südpol bestrahlt ist; es ist also das obere Zeichen zu gebrauchen für Sonnenlängen im Intervalle von 0° bis 180°, das untere aber für Längen im Intervalle von 180° bis 360°.

Diesen Gleichungen (1) bis (3) sind nachstehende Sätze über die Größe der den einzelnen Breiten der Erde zugestrahlten Wärmemengen entnommen worden.

Der Nordpol der Erde erhält in I[1] ebensoviel Wärme zugestrahlt als in II; der Südpol in III ebensoviel wie in IV. Da die den Polen in I zugestrahlte Wärmemenge ebenso groß ist wie die in IV und die in II ebenso groß wie die in III, so folgt, daß jeder Pol in dem einen halben Jahre seiner Bestrahlung ebensoviel Wärme zugestrahlt erhält wie der andere Pol in dem anderen Halbjahre seiner Bestrahlung.

Der Äquator erhält in I ebensoviel Wärme zugestrahlt wie in IV, in II ebensoviel wie in III. Dagegen ist die in I zugestrahlte Wärmemenge größer als jene in II und die in IV größer als jene in III. Wohl aber erhält der Äquator in I+II ebensoviel Wärme zugesandt wie in III+IV. Es erhält daher der Äquator in dem einen Halbjahre von einem Äquinoktialpunkte bis zum anderen ebensoviel Wärme zugestrahlt wie im anderen Halbjahre. In den einzelnen Vierteljahren dieser Halbjahre ist jedoch die solare Strahlung nicht die gleiche.

Für die einzelnen Breiten der Erdoberfläche haben sich folgende Sätze ergeben.

Betrachten wir vorerst dieselben Breiten auf einer und derselben Halbkugel.

Die gleichen Breiten der nördlichen Halbkugel erhalten in I mehr Wärme zugestrahlt als in II, ebenso in IV mehr als in III.

Das Gleiche gilt von den Breiten der südlichen Hemisphäre in den verglichenen Quadranten.

Vergleichen wir weiter dieselben Breiten, aber auf verschiedenen Halbkugeln.

---

[1] Quadrant I.....Weg der Erde in ihrer Bahn von 0° Länge bis 90° Länge;

Quadrant II .....Weg der Erde in ihrer Bahn von 90° Länge bis 180° Länge;

Quadrant III.....Weg der Erde in ihrer Bahn von 180° Länge bis 270° Länge;

Quadrant IV.....Weg der Erde in ihrer Bahn von 270° Länge bis 360° Länge.

Die Breiten der nördlichen Hemisphäre erhalten in I ebensoviel Wärme wie die Breiten der südlichen in IV, ebenso die Breiten der nördlichen Hemisphäre in II gleichviel Wärme wie die der südlichen in III. Weiter erhalten die Breiten der südlichen Halbkugel in I gleichviel Wärme wie die der nördlichen in IV, ebenso die Breiten der südlichen Halbkugel in II ebensoviel wie die der nördlichen in III.

Dagegen hat sich ergeben: Die Breiten der nördlichen Hemisphäre erhalten in I mehr Wärme zugestrahlt als die Breiten der südlichen in III; dagegen die letzteren in IV mehr als die Breiten der nördlichen Hemisphäre in II. Ebenso erhalten die südlichen Breiten in I mehr als die nördlichen in III, dagegen diese in IV mehr als jene in II.

Diese Ungleichheiten in der solaren Strahlung auf den Breiten beider Hemisphären in den vier Quadranten der Erdbahn sind allein bedingt durch die Ungleichheiten der solaren Strahlung am Äquator in diesen. Da nun der Einfluß der äquatorialen Strahlung mit dem Kosinus der Polhöhe abnimmt, so ist es klar, daß die oben besprochenen Ungleichheiten im solaren Wärmegang einer Breite um so schwächer hervortreten, je näher sie an einem der Pole liegt, auf dem diese Ungleichheiten verschwinden.

Weiter ergab sich: Die Breiten der nördlichen Hemisphäre erhalten in I+II ebensoviel Wärme zugestrahlt wie die südlichen in III+IV, ebenso wie die der nördlichen Halbkugel in III+IV gleichviel Wärme erhalten wie die Breiten der südlichen Hemisphäre in I+II.

Es bekommt daher die eine Hemisphäre in dem einen Halbjahre, während sich die Erde von dem einen Äquinoktialpunkte bis zum anderen bewegt, ebensoviel Wärme zugestrahlt wie die andere in dem anderen Halbjahre. Daraus ergibt sich aber der wichtige, schon viel diskutierte Satz, daß im Laufe eines ganzen Jahres jede Halbkugel gleichviel Wärme zugestrahlt erhält.

Diese Sätze sind nur der Bequemlichkeit des sprachlichen Ausdruckes wegen für ganze Erdbahnquadranten, also ganze Vierteljahre ausgesprochen worden. Sie können ohne weiteres für beliebige Zeiten, d. i. für beliebige Bahnstrecken, in den

Ekliptikquadranten verallgemeinert werden, wenn nur die in den vier Quadranten einander entsprechenden Endpunkte dieser Bahnstrecken paarweise die gleiche Längendifferenz symmetrisch gegen die Knotenlinie der Erdbahn aufweisen.

Kehren wir zur Gleichung (1) zurück. Als allgemeines Gesetz der Verteilung der solaren Wärmestrahlung auf der Erdoberfläche beschreibt sie nicht nur den Verlauf der solaren Strahlung auf jeder beliebigen Breite während eines Jahres, sondern sie gibt auch die Verteilung der solaren Strahlung zu einem angenommenen Zeitpunkte, d. i. zu einer bestimmten Sonnenlänge, von Polhöhe zu Polhöhe an, also die Verteilung in meridionaler Richtung. Sie fixiert daher einmal für jede Breite den Eintritt der Jahreszeiten und deren Dauer, dann aber begrenzt sie auch die meteorologischen Zonen auf der Oberfläche der Erde.

Zur detaillierten Herleitung der einschlägigen Sätze ist hier nicht der Platz; in dieser Hinsicht sei auf die bereits wiederholt angeführte Abhandlung des Verfassers hingewiesen. Doch sollen wenigstens die aus Gleichung (1) abgeleiteten Bedingungsgleichungen angegeben werden, die den Ausgangspunkt für die Herleitung dieser Sätze über die Verteilung der solaren Wärmestrahlung auf der Erdoberfläche bildeten; und diese nur aus dem Grunde, weil ihre Kenntnis für eines der späteren Kapitel notwendig ist.

Im Interesse der einfacheren und übersichtlicheren Schreibweise wird es sich empfehlen, den Differentialquotienten $\left(\frac{dW}{d\odot}\right)_\varphi$ als Funktion der Polhöhe φ und der Länge $\odot$ der wahren Sonne mit einem bloßen Funktionszeichen, etwa mit $\phi(\varphi, \odot)$, oder noch kürzer mit dem Buchstaben ϕ zu bezeichnen.

Bei der Untersuchung über die Verteilung der solaren Strahlung in meridionaler Richtung ist ϕ als alleinige Funktion der Polhöhe φ zu betrachten. Als Bedingungen ergaben sich da für das Aufhören, dann für den Eintritt des Maximums der solaren Strahlung folgende Gleichungen:

$$\phi = 0, \qquad \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = 0, \qquad (\alpha)$$

welche, nach der Veränderlichen φ aufgelöst, jene Breiten zu berechnen erlauben, auf welchen bei gegebener Sonnenlänge die solare Strahlung Null wird, beziehungsweise ein Maximum erreicht.

Darnach ist die Verteilung der solaren Wärmestrahlung in meridionaler Richtung zu einem gegebenen Zeitpunkte geometrisch durch eine Kurve repräsentiert, welche in der Breite (Abszisse) $\varphi = \mp(90° - |\delta|)$ die Abszissenachse schneidet, bis zur Breite $\varphi = \pm\delta$ ansteigt, hier ihr Maximum erreicht, um dann kontinuierlich bis zu einem gewissen Werte in der Breite $\varphi = \pm 90°$ zu fallen. Letzterer, nichts anderes als der spezielle Wert unseres Differentialquotienten $\psi(\varphi, \odot)$ für den Pol, also $\varphi = \pm 90°$, ist stets kleiner als der spezielle Wert, den unsere Funktion ψ für den Äquator, also für $\varphi = 0$ annimmt; d. h. es ist die dem Äquator auf jeder unendlich kleinen Längenänderung $d\odot$ pro Flächeneinheit zugestrahlte mittlere solare Wärmemenge immer größer als jene, welche der Pol auf derselben Längenänderung zugesandt erhält. Das Verhältnis dieser beiden Wärmemengen zueinander macht die nachstehende Gleichung ersichtlich:

$$\frac{\psi_{\varphi=90°}}{\psi_{\varphi=0°}} = \operatorname{cotg}\delta, \tag{4}$$

wobei δ die augenblickliche Sonnendeklination ist. Da nun für die Sonne immer $\operatorname{cotg}\delta > 1$ ist, so folgt, daß auch immer die Ungleichung

$$\psi_{\varphi=0°} > \psi_{\varphi=90°}$$

bestehen muß. Da diese für jede Sonnendeklination gilt, so muß sie auch für jede Sonnenlänge gelten. Daraus folgt aber nach einem bekannten Satze über bestimmte Integrale, daß überhaupt immer $W_{\varphi=0} > W_{\varphi=90}$ sein muß. Es ist also die dem Äquator pro Flächeneinheit zugesandte Wärmemenge[1] stets größer als die dem Pole in der gleichen Zeit zugestrahlte.

Für die Diskussion des Verlaufes der solaren Strahlung auf einer gegebenen Breite während eines Jahres ist in der

[1] Siehe hiezu Anmerkung auf p. 170.

Funktion $\psi(\varphi, \odot)$ nun die Polhöhe φ als konstant, die Sonnenlänge $\odot$ aber als veränderlich zu betrachten. Die Bedingungsgleichungen für das gänzliche Aufhören der solaren Strahlung, beziehungsweise für den Eintritt eines Maximums, Minimums sind analoge wie vorhin, nämlich

$$\psi = 0, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial \odot} = 0, \tag{\beta}$$

nur mit dem Unterschiede, daß diese jetzt nach der Sonnenlänge und nicht nach der Polhöhe aufzulösen sind. Der Diskussion dieser Gleichungen ließen sich folgende Sätze entnehmen:

Für jede Hemisphäre existieren drei voneinander verschiedene Typen im solaren Wärmegang eines Jahres.

Der erste Typus, der äquatoriale, tritt auf bei allen Breiten zwischen dem Äquator und der Breite φ_0.[1] Er ist charakterisiert

---

[1] Der Verfasser hat in seiner von der Wiener Akademie veröffentlichten Abhandlung p. 1349 diese Breite nur für eine Kreisbahn berechnet. Für eine elliptische Erdbahn, wie sie den wirklichen Verhältnissen entspricht, läßt sich diese Berechnung, wie folgt, durchführen.

Die Breite φ_0 gehört bereits zu den Breiten der sogenannten gemäßigten Zone, auf denen der solare Wärmegang dadurch charakterisiert ist, daß auf der nördlichen Hemisphäre das Maximum der solaren Strahlung — auch unter Annahme einer elliptischen Bahn — für die Sonnenlänge 90°, das Minimum aber für die Länge 270° eintritt. Andrerseits aber läßt sich diese Breite als Grenze zwischen der äquatorialen und gemäßigten Zone auch dadurch kennzeichnen, daß auf ihr die beiden Maxima der äquatorialen Zone vor und nach dem Sommersolstitium der betreffenden Hemisphäre in ein Maximum zusammenfallen. Dieses vorausgeschickt, bilden wir den Differentialquotienten $\frac{\partial \psi}{\partial \odot} = \frac{d^2 W}{d \odot^2}$ für die nördliche Halbkugel ($0° < \odot < 180°$) und setzen ihn gleich Null; man erhält dann mit Rücksicht auf die Gleichungen (1) und (2):

$$\left[-2a_2 \sin 2\odot \cos\varphi + \frac{1}{2} p \cos\odot \sin\varphi\right]$$
$$+ [-a_1 \sin\odot \quad - 3a_3 \sin 3\odot - 4a_4 \sin 4\odot - \ldots$$
$$+ b_1 \cos\odot + 2b_2 \cos 2\odot + 3b_3 \cos 3\odot + 4b_4 \cos 4\odot + \ldots] \cos\varphi = 0,$$

wenn man gleichzeitig jene Glieder in der ersten Klammer zusammenfaßt, welche auch dann nicht Null werden, wenn man auf eine Kreisbahn übergeht,

durch zwei Maxima und zwei Minima im Laufe eines Jahres. Die Maxima treten im Sommer der betreffenden Hemisphäre

---

also die Erdbahnexzentrizität gleich Null setzt. Wir heben nun aus diesem Gliede $\cos \odot$ heraus und multiplizieren gleichzeitig den zweiten Klammerausdruck, den wir der Kürze halber mit $r(\odot)$ bezeichnen wollen, mit $\frac{\cos \odot}{\cos \odot}$, so daß sich ergibt:

$$\cos \odot \left[-4 a_2 \sin \odot \cos \varphi + \frac{1}{2} p \sin \varphi \right] + \cos \odot \frac{r(\odot)}{\cos \odot} \cos \varphi = 0.$$

Es zerfällt somit die Gleichung in zwei andere Gleichungen, nämlich

$$\cos \odot = 0 \qquad \text{I}$$

$$\left[4 a_2 \sin \odot - \frac{r(\odot)}{\cos \odot} \right] \cos \varphi - \frac{1}{2} p \sin \varphi = 0. \qquad \text{II}$$

Die erstere Gleichung gibt, wie sich bei der Untersuchung für eine Kreisbahn gezeigt hat, die Bedingung für den Eintritt der Maxima und Minima in der solaren Strahlung auf den Breiten der gemäßigten Zone, die zweite aber jene für die Breiten der äquatorialen Zone. Wir erhalten nun die gesuchte Breite φ_0, die Grenze zwischen der äquatorialen und der gemäßigten Zone, wenn wir beide Bedingungsgleichungen miteinander verbinden, so zwar, daß wir, wie sich aus dem eingangs dieser Fußnote Gesagten ergibt, jene Wurzel der Gleichung I, für welche sich auf den Breiten der gemäßigten Zone ein Maximum ergibt, also für die nördliche Halbkugel $\odot = 90°$, in die Bedingung II einsetzen, der sie genügen muß. Dadurch wird aber in dieser Gleichung $\sin \odot = 1$, während der Bruch $\frac{r(\odot)}{\cos \odot}$ für diese Wurzel in die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ übergehen muß, da sich jedenfalls $\varphi_0 \leqq \varepsilon$ ergeben muß. Man erhält somit für φ_0 die Bestimmungsgleichung

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{4 a_2 - \lim\limits_{\odot = 90°} \left[\frac{r(\odot)}{\cos \odot} \right]}{\frac{1}{2} p}$$

und da $\lim\limits_{\odot = 90°} \left[\frac{r(\odot)}{\cos \odot} \right] = [r'(\odot)]_{\odot = 90°}$

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{4 a_2 - [r'(\odot)]_{\odot = 90°}}{\frac{1}{2} p}.$$

Mit Benützung der vom Verfasser in der Met. Zeitschrift (1906, p. 385) veröffentlichten numerischen Werte der Konstanten der Fourier'schen Reihe berechnet sich φ_0 hieraus zu 21° 43′ 38″.

vor und nach der Sonnenwende auf, die Minima zur Zeit der Solstitien selbst. Dabei fällt das tiefere Minimum, das Hauptminimum, in das Wintersolstitium, das flachere in das Sommersolstitium der betreffenden Halbkugel.

Der zweite Typus (Typus der gemäßigten Zone) im solaren Wärmegange tritt auf zwischen den Breiten φ_0 (einschließlich) und der Breite $90° - \varepsilon$. Hier weist der solare Wärmegang ein Maximum und ein Minimum auf, ersteres zur Zeit des Sommersolstitiums, letzteres im Wintersolstitium der betreffenden Hemisphäre.

Der dritte Typus, der polare, zeigt sich in den Breiten von $90° - \varepsilon$ (einschließlich) bis zum Pole. Hier sind die Breiten eine gewisse Zeit im Jahre unbestrahlt; das Maximum der Strahlung fällt in das Sommersolstitium der betreffenden Hemisphäre.

Hiemit ist die Zusammenstellung der für die weitere Entwicklung notwendigen Sätze und Gleichungen beendet. Diese, der folgenden Untersuchung zu Grunde gelegt, ermöglichen eine ungemein einfache Lösung des Problems der Verteilung der solaren Wärmestrahlung auf der Erdoberfläche bei Existenz einer Wärmestrahlen absorbierenden Atmosphäre.

III. Das Lambert'sche Absorptionsgesetz. Besondere Formen desselben.

Ehe die Wärmestrahlen der Sonne an die Oberfläche der Erde gelangen, müssen sie die atmosphärische Luft passieren. In dieser erfährt ihre Energie eine Schwächung teils durch molekulare Absorption, teils durch innere Reflexion.

Letztere schalten wir aus unserer Betrachtung gänzlich aus. Zwar wird ja gerade durch sie die Atmosphäre selbst eine licht- und wärmespendende Hülle für die Oberfläche der Erde. Doch erstreckt sich die vorliegende Untersuchung nach dem Vorbilde Angot's nur auf die direkt von der Sonne der Erde zugestrahlten Wärmemengen, so daß alle sekundären Wärmequellen der Erdoberfläche keine Berücksichtigung erfahren mögen.

Mehr Aufmerksamkeit[1] müssen wir dafür der ersteren Ursache der Schwächung der Energie der Wärmestrahlen in der atmosphärischen Luft schenken. Durch die molekulare Absorption werden einerseits gewisse Strahlengattungen im Wärmespektrum der Sonne überhaupt nicht von der Luft durchgelassen, so daß an deren Stelle im Wärmespektrum Streifen und Bänder entstehen, die sogenannten »kalten Bänder«, andrerseits erfahren alle Strahlengattungen überhaupt eine Schwächung in ihrer Intensität. Die den Wärmestrahlen entzogene Energie verstärkt jene der Luftmoleküle, erhöht also ihre Temperatur, wodurch die Luft gegenüber der Erdoberfläche wieder zu einer sekundären Wärmequelle wird.

Gegenüber diesen Ergebnissen Langley's[2] gelangt F. Paschen[3] durch seine Untersuchungen zu dem übrigens wahrscheinlicheren Resultat, daß durch die Absorption der Atmosphäre nur in den »kalten Bändern« gewisse Strahlengattungen im Wärmespektrum der Sonne geschwächt und ganz ausgelöscht werden, dagegen alle übrigen Strahlengattungen durch sie überhaupt keine Schwächung in ihrer Intensität erfahren, sondern nur durch die diffuse Reflexion

---

[1] Gelegentlich der Behandlung einer anderen Frage unterzieht Nils Ekholm die Absorption der Wärmestrahlen durch die Atmosphäre einer eingehenden Besprechung. Man beachte seine Abhandlung in der Met. Zeitschrift, 1902, p. 1 ff.: »Über Emission und Absorption der Wärme und deren Bedeutung für die Temperatur« (mit mehreren Fortsetzungen), in welcher er »eine übersichtliche Darstellung der bis jetzt bestätigten Tatsachen und Schlußfolgerungen« auf Grund der bis dahin erschienenen Gesamtliteratur über diesen Gegenstand gibt. Im Obigen kann auf dieses viel umstrittene Problem der Meteorologie natürlich nur soweit eingegangen werden, als zur Beurteilung der Vereinfachungen, welche bei der Aufstellung des Lambert'schen Absorptionsgesetzes gemacht werden, und zur Beurteilung seiner Gültigkeit unbedingt notwendig ist. Weiter beachte man: Melander, Über die Absorption der Atmosphäre, Helsingfors, 1901; Angström, Öfversigt K. Vetensk. Akad. Förh., 1901, p. 371 ff. und p. 381 ff.; J. Koch, ibid., p. 475 ff.; Rubens und Ladenburg, Verhandlungen der deutschen Physikalischen Gesellschaft, VII, 1905, p. 171 ff.

[2] Researches on solar heat.

[3] F. Paschen, Über die Emission erhitzter Gase, Wiedemann's Annalen, Bd. 50, p. 409 ff.; Über die Emission der Gase, ibid., Bd. 51, p. 1, und Bd. 52, p. 209; Referat von Trabert, Met. Zeitschr., 1894, p. 236 ff.

in der Atmosphäre. Die Entscheidung dieser Frage ist für das vorliegende Problem insofern belanglos, als im folgenden nicht die Schwächung jeder einzelnen Strahlengattung von bestimmter Wellenlänge, sondern nur die Schwächung des Effektes des ganzen Wärmespektrums der Sonne durch die Absorption in Rechnung gezogen wird.

Bereits die grundlegenden Untersuchungen von Langley haben ergeben, daß die meisten dieser Absorptionsstreifen und Bänder im roten Ende und darüber hinaus in jenem Teile des Sonnenspektrums liegen, welches keine Lichtempfindung auf der Netzhaut des Auges hervorruft. Es ist also vorzugsweise die dunkle Strahlung der Sonne, welche durch die Luft eine Absorption erfährt, eine ungemein wichtige Tatsache, da damit auch die von der erkaltenden Erde gegen den Weltraum ausgesandten Wärmestrahlen (dunkle, langwellige Strahlen) von der Atmosphäre absorbiert werden, wodurch diese wie eine Decke die Erde vor rascher Auskühlung schützt.

Die atmosphärische Luft ist ein Gasgemisch, dessen hauptsächlichste Bestandteile die für die in der Atmosphäre auftretenden Druck- und Temperaturverhältnisse permanenten Gase Stickstoff, Sauerstoff und Kohlensäure sind; hiezu kommt noch als wichtiger Bestandteil der Wasserdampf, jedoch als nicht permanentes Gas. Es frägt sich nun, in welcher Weise sind die einzelnen Gase an der Absorption der Wärmestrahlen beteiligt; denn da wir über die vertikale Verteilung dieser Gase in der Atmosphäre unterrichtet sind, so ist mit der Beantwortung dieser Frage auch bereits Aufschluß gegeben, in welchen Höhenschichten sich vorzugsweise die Absorption der Wärmestrahlen abspielt.

Nach den gegenteiligen Resultaten mancher anderer haben die speziell zur Beantwortung dieser Frage angestellten Untersuchungen K. Angström's[1] und F. Paschen's zuerst unzweifelhaft ergeben, daß die Absorption von Wärmestrahlen durch Stickstoff, Sauerstoff und durch trockene, von Kohlensäure freie Luft kaum nachweisbar ist gegenüber ihrer Absorption in

---

[1] K. Angström, Beobachtungen über die Strahlung der Sonne. Wied. Annalen, Bd. 39 (1890).

Kohlensäure und (nicht kondensiertem) Wasserdampf. Es ist also das Absorptionsvermögen der Atmosphäre allein durch das Zusammenwirken dieser beiden letzteren Gase bedingt, welche trotz der geringen Mengen, in denen sie im Vergleich zu den anderen Gasen in der Atmosphäre auftreten, dennoch infolge ihres relativ großen Absorptionsvermögens gegen Wärmestrahlen im Wärmespektrum der Sonne sich bemerkbar machen.

Nach dem Dalton'schen Gasgesetze kann die Kohlensäure nur in den untersten Schichten der Atmosphäre, diese vollkommen ruhend gedacht, auftreten. Desgleichen erfolgt die Abnahme des Wasserdampfgehaltes [1] der Atmosphäre sehr rasch mit der Höhe. Es sind daher gerade die untersten Schichten der Atmosphäre, in welchen die stärkere Absorption der Wärmestrahlen erfolgt.

Lambert,[2] dem bei dem damaligen Stande der Physik in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts diese Tatsachen nicht bekannt waren, nahm bei der Aufstellung seines Absorptionsgesetzes die Luft als ein homogenes Mittel an, welches er sich in Schichten geteilt dachte, derart, daß der in jeder Schichte vom betrachteten Wärmestrahlen zurückgelegte Weg gleich lang ist. Unter dieser Voraussetzung muß dann in jeder Schichte dem Wärmestrahl die gleiche Menge an Energie durch Absorption entzogen werden. Wird demnach in der ersten dieser Schichten von der an der Grenze der Atmosphäre auffallenden solaren Wärmemenge W der $(1-p)^{te}$ Teil absorbiert, so tritt in die zweite Schichte nun die Wärmemenge $p.W$ ein, von welcher wieder der $(1-p)^{te}$ Teil absorbiert wird, so daß nun die Wärmemenge $p^2.W$ auftritt u. s. w. Es wird also nach Passieren der n^{ten} Schichte auf die Erdoberfläche nur die Wärmemenge $p^n.W$ auffallen. Wird nun der in einer Schichte durchlaufene Weg gleich 1 gesetzt, so ist n gleich dem ganzen Wege s des

---

[1] Hann, Lehrbuch der Meteorologie, Leipzig, 1901, p. 220 ff.

[2] Seine Photometria ist in Ostwald's Klassikerausgaben in deutscher Übersetzung als Nr. 31 und 32 neu erschienen; seine Ansichten über die Schwächung der Sonnenstrahlung durch die Atmosphäre findet man im 5. Teile (Nr. 32, p. 64 ff.) niedergelegt. Unabhängig von Lambert hat Bouguer in seinem Traité d'optique sur la gradation de la lumière, Paris, 1760, dasselbe Absorptionsgesetz aufgestellt.

Wärmestrahles in der Atmosphäre. Es ist daher nach Lambert die nach erfolgter Absorption in der Atmosphäre auf die Erdoberfläche auffallende Wärmemenge gegeben durch die Gleichung

$$q = p^s . W.$$

Hierin ist der Faktor p, der sogenannte Transmissionskoeffizient, der Natur der Sache nach stets ein positiver, echter Bruch. Wird er gleich 1 angenommen, so heißt das, die Atmosphäre absorbiert überhaupt keine Wärmestrahlen; q wird dann identisch mit W, der solaren Wärmemenge; für $p = 0$ wird die rechte Seite der Gleichung auch gleich Null; es läßt für diesen Wert des Transmissionskoeffizienten die Luft keine Wärmestrahlen hindurch.

Gemäß den vorausgeschickten physikalischen Betrachtungen ist es klar, daß dieses von Lambert aufgestellte Gesetz nur als eine, wenn auch, wie sich aus zahlreichen Beobachtungen[1] ergeben hat, große Annäherung an die wirklichen Verhältnisse bezeichnet werden darf. Vor allem ist die Atmosphäre kein so homogenes Medium, wie Lambert angenommen hat. Denn da, wie hervorgehoben, die Absorption der Wärmestrahlen hauptsächlich durch die in der Luft befindliche Kohlensäure und den Wasserdampf erfolgt, so sind die unteren Luftschichten der Atmosphäre an der Absorption ungleich stärker beteiligt als die an der Grenze der Atmosphäre befindlichen. Aber selbst wenn die Luft nicht als Gasgemisch verschieden absorbierender Gase, sondern als einfaches Gas betrachtet werden dürfte, so müßte dennoch, abgesehen von den Einflüssen der vertikalen Temperaturverteilung, in den unteren Luftschichten eine stärkere Absorption der Wärmestrahlen stattfinden als oben, da ihre Dichte von oben nach unten zunimmt und die Absorption der Gase gegen Wärmestrahlen, wenn auch langsam, mit dieser wächst.

Weiter nimmt Lambert keine Rücksicht darauf, daß die Atmosphäre, wie bereits erwähnt, die Wärmestrahlen von verschiedener Wellenlänge in den einzelnen Teilen des Wärme-

---

[1] Pouillet, Pogg. Annalen, *45*, 30.

spektrums verschieden absorbiert. Da infolge dieser Eigenschaft der Atmosphäre (»selektive« Absorption) jeder Strahlengattung von bestimmter Wellenlänge ein besonderer Absorptionskoeffizient zukommt, so gilt obige Formel, streng genommen, nur für eine bestimmte Wellenlänge. Will man aber dennoch diese Formel auf den Effekt des gesamten Wärmespektrums der Sonne anwenden, so wird man für p einen mittleren Wert aus allen im Spektrum vorkommenden Absorptionskoeffizienten wählen müssen, dessen Bestimmung jedoch über eine gewisse Grenze der Genauigkeit nicht hinauskommen wird.

Trotz dieser physikalischen Einwände hat sich das Lambert'sche Absorptionsgesetz als das einzige, allgemein praktisch verwendete Gesetz für die Absorption der Wärmestrahlen durch die Luft gut bewährt und allen Beobachtungen hinlänglich entsprochen. Die Ursache hiefür liegt darin, daß bei der geringen Absorption, welche die Wärmestrahlen gerade in den obersten Schichten der Atmosphäre erfahren, man einfach annehmen kann, in diesen finde überhaupt keine statt und sie beginne erst mit dem Moment, in welchem die Wärmestrahlen in die Kohlensäure-Atmosphäre der Erde und in die wasserdampfhaltigen Luftschichten eintreten. Deren vertikale Erhebung über dem Erdboden ist aber im Vergleich zu den Erddimensionen eine derart geringe, daß die Kohlensäure-Atmosphäre und die wasserdampfhaltige Luft als eine einzige durchaus homogene Schichte der gesamten Atmosphäre, welche als unterste unmittelbar am Erdboden aufliegt, betrachtet werden kann. Es ist dann s nur als der Weg anzusehen, welchen die Wärmestrahlen in dieser untersten Luftschichte zurücklegen.

Der Ermittlung dieser Weglänge legte Lambert die eben klargelegte Anschauung auch tatsächlich zu Grunde. Die Lösung dieser Aufgabe ist ein Problem der kosmischen Physik und nur mittelbar der Meteorologie, mit dem sich bei Beobachtung größerer oder geringerer Strenge von Laplace angefangen eine ganze Reihe von Forschern befaßt hat. Es ist klar, daß man bei der Bestimmung dieser Weglänge für die Zwecke des Lambert'schen Absorptionsgesetzes nicht die größte Strenge fordern wird, sondern sich mit einer Genauigkeit begnügen kann, welche den bei der Aufstellung dieses

Gesetzes gemachten Vereinfachungen in der Annahme der wirklichen Verhältnisse entspricht.

Zu diesem Zwecke zerlegen wir die Atmosphäre (die Erde hiebei als Kugel vorausgesetzt) in unendlich dünne, homogen gedachte, mit der Erde konzentrische Kugelschalen, so zwar, daß die Dichte von Schichte zu Schichte gegen die Erdoberfläche hin zunimmt. Dringt nun ein Wärmestrahl in eine so vorbereitete Atmosphäre ein, so wird er an der Grenzfläche je zweier solcher Schichten eine Brechung nach den Gesetzen der Optik erfahren und dies von Grenzfläche zu Grenzfläche, so daß der Weg des Wärmestrahles die Einhüllende aller jener unendlich kleinen Wege ist, die der Strahl in jeder der angenommenen Schichten geradlinig zurücklegt.

Diese geometrische Anschauung erlaubt eine einfache Gleichung aufzustellen. Betrachten wir den Strahl in einer beliebigen Schichte vor seiner Brechung beim Eintritt in die nächst dichtere Schichte. Dann ist sein Einfallswinkel i einfach der Winkel zwischen dem Wege des Strahles in der betrachteten Schichte und jener Geraden, welche den Erdmittelpunkt mit jenem Punkte an der Grenze beider Schichten verbindet, in welchem der Strahl von der einen in die andere Schichte übertritt. Die Entfernung dieses Punktes vom Erdmittelpunkte sei ρ. Es schließe nun weiter diese letztere Gerade mit einer beliebigen Achsenrichtung durch den Erdmittelpunkt den Winkel v ein. Dann besteht für unsere Einhüllende in Polarkoordinaten die bekannte Gleichung der Differentialgeometrie

$$\rho \frac{dv}{d\rho} = \operatorname{tg} i,$$

da der Einfallswinkel i nichts anderes ist als der Winkel, welchen die Tangente an die Einhüllende mit deren Radiusvektor ρ einschließt. Zur Bestimmung der Bogenlänge addieren wir die beiden aus obiger Beziehung sich unmittelbar ergebenden Gleichungen

$$(\rho dv)^2 = \operatorname{tg}^2 i (d\rho)^2$$
$$(d\rho)^2 = (d\rho)^2$$

und erhalten:

$$ds = \left|\sqrt{(\rho\, dv)^2 + (d\rho)^2}\right| = \sec i\, d\rho.$$

Es ist daher der Weg, den der Strahl in der Atmosphäre zurücklegt, gegeben durch das Integral

$$s = \int \sec i\, d\rho.$$

Hierin ist nun der Winkel i eine Funktion von der Größe ρ, da der Einfallswinkel als Funktion der Dichte abhängig ist von der Annahme der Höhe des betrachteten Punktes in der Atmosphäre. Hier ist nun eine Vereinfachung gestattet, welche im Einklange steht mit den vereinfachenden Annahmen bei Ableitung des Lambert'schen Absorptionsgesetzes.

Lambert setzte alle Schichten der Atmosphäre untereinander als homogen voraus. In solchen findet aber nach den Gesetzen der Optik an ihren Grenzflächen keine Brechung statt. Es bleibt daher der Einfallswinkel i von Schichte zu Schichte ungeändert, also unabhängig von der Größe ρ.

Bei dieser Annahme wird aber die obige Integration sehr einfach. Ebenso ergeben sich die Grenzen des Integrales von selbst. Untere Grenze ist jedenfalls der Erdradius a, obere Grenze die Summe aus ihm und der Höhe der absorbierenden Atmosphäre, also $a+d$. Es ergibt sich also mit hinlänglicher Genauigkeit die gesuchte Wegstrecke aus der bekannten Gleichung

$$s = d \sec i.$$

Hierin ist nun, wie bereits hervorgehoben, i der Winkel, welchen der einfallende Strahl mit jener Geraden einschließt, welche den Mittelpunkt der Erde mit jenem Punkte verbindet, in welchem der betrachtete Strahl von einer Luftschichte in die nächst dichtere eintritt. In unserem vereinfachten Falle kann daher der Winkel i gleich gesetzt werden jenem Werte, welchen i an der Grenze der Atmosphäre hat, wo der Strahl vom »leeren« Raum in die Erdatmosphäre eintritt, oder gleich jenem Werte, welchen i beim Auffallen des Strahles auf den festen Erdboden angenommen hat. Im ersteren Falle ist i

gleich der wahren Zenithdistanz der Sonne, im letzteren Falle aber gleich der scheinbaren Zenithdistanz der Sonne im Beobachtungsorte.

Da die durchzuführende Untersuchung im engen Anschluß an jene Gleichungen durchgeführt werden soll, welche der Verfasser bei Behandlung des Problems der solaren Wärmestrahlung abgeleitet hat, wollen wir konsequenterweise den Winkel i gleich der wahren, auch von der Parallaxe des Beobachtungsortes befreiten Zenithdistanz z der Sonne setzen, da in den für die solare Strahlung gültigen Gleichungen nur von der Refraktion und der Parallaxe befreite astronomische Elemente auftreten.

Jenes Plus an Wärmemenge, welches infolge der astronomischen Refraktion dem Beobachtungsorte mehr zugestrahlt wird, läßt sich nach dem Vorbilde Zenker's durch besondere Formeln in einfacher Weise bestimmen, doch gehen wir hier nicht weiter darauf ein.

Setzen wir weiter in obiger Gleichung noch d, welches physikalisch nichts anderes ist als die Länge des Weges des Strahles bei senkrechtem Eintritt in die Atmosphäre, gleich 1, so erhalten wir schließlich für das Lambert'sche Absorptionsgesetz die Gleichung

$$q = p^{\sec z} . W.$$

Darnach erhält man die Wärmemenge, welche nach Passieren der Erdatmosphäre auf die Erdoberfläche auffällt, wenn man die solare Wärmemenge, also jene, welche bei Fehlen einer Atmosphäre unter gleichen Strahlungsverhältnissen auf die Erde gelangen würde, mit dem Faktor $p^{\sec z}$ multipliziert. Da nun die unendlich kleine solare Wärmemenge dW, welche in der unendlich kleinen (mittleren) Zeit dt auf eine an der Erdoberfläche gegebene Flächeneinheit auffällt, durch die Gleichung

$$\frac{dW}{dt} = \frac{C}{r^2} \sin h$$

bestimmt ist, so berechnet sich die unendlich kleine Wärmemenge dq, welche nach Passieren der Atmosphäre auf die

gegebene Flächeneinheit in jeder unendlich kleinen Zeit dt auffällt, aus der Gleichung

$$\frac{dq}{dt} = C.p^{\frac{1}{\sin h}} \cdot \frac{\sin h}{r^2}, \tag{5}$$

wenn man berücksichtigt, daß $h = 90° - z$ ist.

Diese beiden Gleichungen bilden den Ausgangspunkt für die weitere Untersuchung. Wir eliminieren aus der letzteren mit Hilfe der ersteren Gleichung die Sonnenhöhe und erhalten

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dW}{dt} \cdot p^{\frac{C}{r^2} \cdot \frac{1}{\frac{dW}{dt}}}.$$

Beachtet man nun, daß

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dq}{d\odot} \frac{d\odot}{dt}$$

und ebenso

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dW}{d\odot} \frac{d\odot}{dt}$$

ist, ferner, daß das zweite Keppler'sche Gesetz, welches besagt, daß die von den Radienvektoren überstrichenen Flächen den Zeiten proportional sind, durch die Differentialgleichung

$$\frac{d\odot}{dt} = \frac{c}{r^2}$$

gegeben ist, so erkennt man leicht, daß obige Gleichung sich auch schreiben läßt:

$$\frac{dq}{d\odot} = \frac{dW}{d\odot} \cdot p^{\frac{C}{c} \cdot \frac{1}{\frac{dW}{d\odot}}}.$$

Drückt man hierin noch die Konstante p durch ihren natürlichen Logarithmus aus, so ergibt sich als schließliche Form des transformierten Lambert'schen Absorptionsgesetzes

$$\frac{dq}{d\odot} = \frac{dW}{d\odot} \cdot e^{-\frac{C}{c} \ln p \cdot \frac{1}{\frac{dW}{d\odot}}}. \tag{I}$$

In dieser Gleichung ist die Wärmemenge q als Funktion des Differentialquotienten $\frac{dW}{d\odot}$ und des Absorptionskoeffizienten p dargestellt. Dieser Differentialquotient ist gemäß den Gleichungen des Abschnittes II als alleinige Funktion der Länge $\odot$ der wahren Sonne zu betrachten, also als eine Funktion eines Elementes der jährlichen Bewegung der Erde um die Sonne. Es ist daher auch q durch obige Gleichung als eine Funktion eines Elementes der jährlichen Bewegung der Erde in ihrer Bahn dargestellt. Wir berechnen daher nach den Ausführungen des ersten Abschnittes, wenn wir diese Gleichung der weiteren Untersuchung zu Grunde legen, mittlere, durchschnittliche Wärmemengen, welche pro Flächeneinheit beliebigen Breiten zugestrahlt werden.

Es sollen noch einige besondere Formen, auf die sich obige Gleichung bringen läßt, mitgeteilt werden.

Beachtet man, daß

$$\frac{dq}{d\odot} = \frac{dq}{dW}\,\frac{dW}{d\odot}$$

ist und

$$\frac{1}{\frac{dW}{d\odot}} = \frac{d\odot}{dW}$$

gesetzt werden darf, wenn man q und $\odot$ sich als Funktionen von W denkt, so ergibt sich unmittelbar als Form (II) des Lambert'schen Absorptionsgesetzes

$$\frac{dq}{dW} = e^{-\frac{C}{c}\ln p \cdot \frac{d\odot}{dW}}, \qquad \text{(II)}$$

eine Gleichung, in welcher W als alleinige unabhängige Veränderliche auftritt.

Diese letzte Gleichung ist die Ausgangsgleichung für eine dritte Form des Lambert'schen Absorptionsgesetzes, welche eine schöne Analogie zu dem Gesetze der Verteilung der solaren Wärmestrahlung auf der Erdoberfläche (siehe Gleichung 1) ist.

Logarithmiert man nämlich Gleichung (II), so erhält man

$$\frac{dW}{d\odot} = -\frac{C}{c} \ln p \frac{1}{\ln \frac{dq}{dW}}.$$

Wir bilden diese Gleichung für nachstehende spezielle Fälle:

$$\left(\frac{dW}{d\odot}\right)_{\varphi=0} = -\frac{C}{c} \ln p \frac{1}{\left(\ln \frac{dq}{dW}\right)_{\varphi=0}};$$

$$\left(\frac{dW}{d\odot}\right)_{\varphi=90^\circ} = -\frac{C}{c} \ln p \frac{1}{\left(\ln \frac{dq}{dW}\right)_{\varphi=90^\circ}}.$$

Diese Gleichungen und die vorige in die linke Seite des solaren Strahlungsgesetzes eingesetzt, ergeben sofort die dritte Form des Lambert'schen Gesetzes, nämlich[1]

$$\frac{1}{\left(\ln \frac{dq}{dW}\right)_\varphi} = \frac{1}{\left(\ln \frac{dq}{dW}\right)_{\varphi=0}} \cos\varphi + \frac{1}{\left(\ln \frac{dq}{dW}\right)_{\varphi=90^\circ}} \sin\varphi, \qquad \text{(III)}$$

eine Differentialgleichung, welche, wie wir sehen werden, das Gesetz der Verteilung der durch Absorption in der Atmosphäre geschwächten Wärmestrahlung auf der Erdoberfläche zum Ausdrucke bringt.

In einem späteren Abschnitte wird das Lambert'sche Absorptionsgesetz noch in einer vierten Form dargestellt werden.

IV. Die Verteilung der durch Absorption in der Atmosphäre geschwächten Wärmestrahlung auf der Oberfläche der Erde.

Der Untersuchung über die Größe der Wärmemengen, welche nach Passieren der atmosphärischen Luft auf die

[1] $p \neq 1$.

Oberfläche der Erde auffallen, und ebenso der Diskussion über die Verteilung dieser Wärmemengen auf der Erde legen wir die Form (I) des Lambert'schen Absorptionsgesetzes zu Grunde. Für den Differentialquotienten $\left(\frac{dW}{d\odot}\right)_\varphi$ wollen wir wieder die früher vorgeschlagene Schreibweise gebrauchen; das Produkt $\frac{C}{c} \ln p$ bezeichnen wir kurzer Hand mit dem Buchstaben μ; dann haben wir uns mit der Gleichung

$$\frac{dq}{d\odot} = \psi e^{-\frac{\mu}{\psi}} \tag{6}$$

zu befassen.

Vor allem sieht man, da gemäß der physikalischen Ableitung dieser Gleichung immer $e^{-\frac{\mu}{\psi}} < 1$ sein muß, daß die Wärmemengen, welche nach Passieren der Atmosphäre auf die Erdoberfläche auffallen, kleiner sind als die unter gleichen Verhältnissen in der gleichen Zeit zugestrahlten solaren Wärmemengen; hiebei sind die ersteren Wärmemengen um so kleiner, je näher μ an $+\infty$ liegt, je stärker also der Absorptionskoeffizient p gegen die Null konvergiert. Es sind daher die nach Passieren der Luft auffallenden Wärmemengen um so kleiner, je stärker die Atmosphäre Wärmestrahlen absorbiert.

Weiter erkennt man, daß gemäß der besonderen Form der rechten Seite obiger Gleichung der Differentialquotient $\frac{dq}{d\odot}$ für einen bestimmten Wert der Sonnenlänge $\odot_1$ immer größer, gleich oder kleiner sein muß als für einen besonderen Wert der Sonnenlänge $\odot_2$, wenn der der ersteren Sonnenlänge entsprechende Wert von ψ größer, gleich oder kleiner ist als der der zweiten Sonnenlänge entsprechende Wert von ψ; d. h. wenn die Beziehung

$$\psi_{\odot = \odot_1} \gtreqless \psi_{\odot = \odot_2}$$

besteht, so gilt auch immer für dieselben Werte der Sonnenlänge die Beziehung

$$\left(\frac{dq}{d\odot}\right)_{\odot = \odot_1} \gtreqless \left(\frac{dq}{d\odot}\right)_{\odot = \odot_2}.$$

Wenn daher in der Untersuchung über die solare Strahlung der Nachweis erbracht wurde,[1] daß ϕ für alle Werte der Sonnenlänge in einem Erdbahnquadranten größer, gleich oder kleiner sei als für sämtliche in bestimmter Weise zugeordnete Werte der Sonnenlänge in einem anderen Erdbahnquadranten, so gilt dieser Nachweis auch für den Differentialquotienten $\frac{dq}{d\odot}$ für Sonnenlängen gleichen Intervalles. Es gelten somit alle bei der Untersuchung über die solare Strahlung hinsichtlich der Verschiedenheit der Stärke der Bestrahlung in den einzelnen Erdbahnquadranten ausgesprochenen Sätze unverändert auch für die durch Absorption geschwächte Strahlung. Es können daher die in Abschnitt II wiedergegebenen Sätze über die solare Strahlung ohneweiters auf die Größe der nach Passieren der Atmosphäre auffallenden Wärmemengen angewendet werden. Darnach erfahren also die von der Sonne der Erde in den einzelnen Zeiten zugestrahlten Wärmemengen durch die Absorption absolut zwar eine Verringerung, im relativen Verhältnis der Größe dieser Wärmemengen in den einzelnen Erdbahnquadranten ändert sich aber nichts.

Hiemit ist die Untersuchung über die Größe der bei Vorhandensein einer Atmosphäre auffallenden Wärmemengen erledigt. Gehen wir zum zweiten Teile unserer Aufgabe, zur Untersuchung über die Verteilung der Wärmestrahlung auf der Erdoberfläche über.

Die unabhängig Veränderlichen in unserer Ausgangsgleichung (6) sind die Länge der wahren Sonne und die Polhöhe. Betrachten wir analog wie im zweiten Abschnitte dieser Abhandlung einmal die Sonnenlänge als konstant und die Polhöhe als veränderlich, so gibt uns die Gleichung, wie bekannt, die Verteilung der Wärmestrahlung in meridionaler Richtung zu einem bestimmten Zeitpunkte; betrachten wir dann umgekehrt die Polhöhe als unveränderlich und die Sonnenhöhe als variabel, so ist die obige Beziehung die Gleichung des jährlichen Wärmeganges auf der angenommenen Breite. Kennt

[1] Hopfner, Die Verteilung der solaren Wärmestrahlung, p. 1339 und p. 1352.

man aber sowohl diesen als auch die Verteilung in meridionaler Richtung, so sind alle Fragen nach der Verteilung der Wärmestrahlung auf der Erdoberfläche beantwortet.

a) Verteilung der Wärmestrahlung in meridionaler Richtung.

Diese ist charakterisiert, wenn wir die Breiten kennen, in welchen die Wärmestrahlung Null wird und ihr Maximum erreicht. Man findet als Bedingung für das Nullwerden der Wärmestrahlung[1]

$$\phi = 0. \qquad (\alpha')$$

Um auch die Bedingungen für den Eintritt des Maximums der Wärmestrahlung zu erhalten, bilden wir den ersten Differentialquotienten unserer Funktion $\frac{dq}{d\odot}$ und setzen diesen gleich Null; es ergibt sich dann als zu erfüllende Bedingung:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \varphi} e^{-\frac{\mu}{\psi}} \left[1 + \frac{\mu}{\psi}\right] = 0.$$

Hierin kann nun offenbar der Klammerausdruck nicht gleich Null werden, da in ihm nur wesentlich positive Größen auftreten. Ebenso ist die Gleichung $\psi = 0$ nicht zulässig, da sie, wie wir eben gefunden haben, die Bedingungsgleichung für jene Breiten ist, für welche die Wärmestrahlung Null wird. Es ergibt sich daher als einzig mögliche Bedingung für den Eintritt eines Maximums in meridionaler Richtung die Gleichung

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = 0. \qquad (\alpha')$$

---

[1] Wenn wir die andere noch mögliche Bedingung, nämlich $\mu = +\infty$, hier, wie im später zu behandelnden Falle, gleich im vorhinein ausschließen, da für diesen Wert die Atmosphäre für keine Polhöhe und keine Sonnenlänge Wärmestrahlen durchläßt. Es werden ja sowohl bei der Untersuchung über die Verteilung der Wärmestrahlung in meridionaler Richtung als auch bei der Untersuchung über ihren Verlauf während eines Jahres Bedingungsgleichungen verlangt, die, wie schon im Abschnitt II hervorgehoben, eine Auflösung nach den Veränderlichen φ und $\odot$ zulassen; μ ist aber als Konstante von diesen ganz unabhängig.

Die weitere Diskussion dieser beiden Bedingungsgleichungen wird zweckmäßig erst vorgenommen, wenn die analoge Untersuchung auch für den folgenden Fall durchgeführt worden ist.

b) Verlauf der Wärmestrahlung auf einer beliebigen Breite während eines Jahres.

Auch hier ergibt sich als Bedingung für das Aufhören der Wärmestrahlung auf der angenommenen Breite, wie vorhin, die Gleichung

$$\psi = 0. \qquad (\beta')$$

Während aus der ersteren der Gleichungen (α') die Polhöhe zu bestimmen ist, für welche bei gegebener Sonnenlänge die Wärmestrahlung Null wird, ist aus dieser die Sonnenlänge zu berechnen, für welche auf der gegebenen Breite die Wärmestrahlung aufhört.[1]

Für den Eintritt der Extreme in der Wärmestrahlung ergibt sich hier die Bedingungsgleichung

$$\frac{\partial \psi}{\partial \odot} e^{-\frac{\mu}{\psi}} \left[1 + \frac{\mu}{\psi}\right] = 0,$$

die sich aus denselben Gründen wie im früher behandelten Fall auf die einfachere Gleichung

$$\frac{\partial \psi}{\partial \odot} = 0 \qquad (\beta')$$

reduziert.

In den Gleichungen (α') und (β') sind bereits alle Gesetze über die Verteilung der durch Absorption geschwächten Wärmestrahlung auf der Erdoberfläche enthalten. An ihnen fällt sofort auf, daß sie alle frei sind von der Größe μ, daher frei sind vom Absorptionskoeffizienten der Luft; das besagt aber, daß die Verteilung der Wärmestrahlung auf der Erdoberfläche dieselbe

---

[1] Reelle Werte werden sich für die Sonnenlänge aus dieser Gleichung natürlich nur für Polhöhen ergeben, die der Bedingung $\varphi \leqq 90 - \varepsilon$ genügen. Siehe hiezu Hopfner, diese Sitzungsberichte, Bd. CXIV, p. 1348.

bleiben muß, welche Werte der Absorptionskoeffizient der Luft auch immer annimmt in seinem Variabilitätsbereiche von 0 bis 1, die letztere Grenze mit eingeschlossen. Es ist daher die Verteilung der Wärmestrahlung ganz unabhängig davon, ob eine Wärmestrahlen absorbierende Atmosphäre existiert oder nicht. Tatsächlich sind auch die Bedingungsgleichungen (α') und (β') genau dieselben wie jene, welche wir bereits in Abschnitt II für die Verteilung der solaren Wärmestrahlung auf der Erdoberfläche angegeben haben.

Absolut genommen sind freilich, wie wir eingangs dieses Abschnittes gesehen haben, die nach Passieren der Atmosphäre auf den Erdboden gelangenden Wärmemengen abhängig von der Größe des Absorptionskoeffizienten; der Eintritt der Extreme jedoch in meridionaler Richtung und im Wärmegange einer Breite während eines Jahres, dann das gänzliche Aufhören der Strahlung bleiben ganz unbeeinflußt sowohl hinsichtlich des Zeitpunktes als auch hinsichtlich der Polhöhe ihres Eintrittes vom Vorhandensein einer Wärmestrahlen absorbierenden Atmosphäre. Wenn daher die Erdatmosphäre stärker oder schwächer die sie durchdringenden Wärmestrahlen absorbiert, so wird dadurch die Wärmestrahlung zwar insofern beeinflußt, daß im ersteren Falle weniger, im letzteren aber mehr Wärmemengen an die Erdoberfläche gelangen; dagegen wird die Verteilung und Ausdehnung der meteorologischen Zonen auf der Erdoberfläche, dann die Eintrittszeit der verschiedenen Jahreszeiten auf den einzelnen Breiten durch einen verschiedenen Absorptionskoeffizienten in keiner Weise berührt.

Diese Unabhängigkeit der Verteilung der Wärmestrahlung auf der Erdoberfläche vom Absorptionskoeffizienten der Luft ist unmittelbar ersichtlich aus der Form (III) des Lambertschen Strahlungsgesetzes, aus welcher der Absorptionskoeffizient, beziehungsweise sein Logarithmus ganz herausgefallen ist. Gerade dieser Umstand erlaubt noch folgende wichtige Schlüsse.

Wir haben den Absorptionskoeffizienten der Luft mit Lambert als Konstante betrachtet, trotzdem es außer aller Frage steht, daß er von der Polhöhe abhängig und eine

periodische Funktion der Sonnenlänge ist, da die Mengen der beiden am stärksten Wärmestrahlen absorbierenden Gase in der Erdatmosphäre, nämlich die Kohlensäure und der Wasserdampf, örtlich und zeitlich gesetzmäßigen Veränderungen unterworfen sind. Es gibt somit die Form (III) des Lambert-schen Absorptionsgesetzes nur genähert die Verteilung der Wärmestrahlung auf der Erdoberfläche an. Wäre jedoch der Absorptionskoeffizient nur eine Funktion der Sonnenlänge allein und nicht auch gleichzeitig der Polhöhe, so wäre die dritte Form des Lambert'schen Gesetzes dennoch die strenge Gleichung der Wärmeverteilung auf der Erdoberfläche, wie sich sofort aus der Ableitung dieser Form ergibt. Das beweist aber, daß die Wärmeverteilung unabhängig ist von den periodischen Änderungen des Wasserdampfgehaltes der Luft mit der Zeit während eines Jahres und nur abhängig ist von seiner Veränderlichkeit in meridionaler Richtung. Es ist daher das Gesetz von der Unabhängigkeit der Wärmeverteilung auf der Erdoberfläche vom Absorptionskoeffizienten der atmosphärischen Luft in etwas allgemeinerer Weise gültig, als die der voranstehenden Untersuchung zu Grunde gelegten Annahmen gestatten.

Von weiterem Interesse ist die Beantwortung der Frage, ob und in welcher Weise eine Beeinflussung der jährlichen Wärmeschwankung, d. i. der Differenz aus dem Maximum und Minimum der Wärmestrahlung einer Breite, stattfindet. Denn wie eben hervorgehoben, erfahren die Extremwerte der Wärmestrahlung einer Breite hinsichtlich des Zeitpunktes ihres Auftretens keine Verschiebung durch die Absorption der Atmosphäre, wohl aber hinsichtlich ihrer Intensität. Und da frägt es sich nun: Geschieht die Schwächung in der Intensität der Extreme derart, daß ihre Differenz auch unabhängig ist vom Absorptionskoeffizienten oder ist sie eine Funktion desselben? Behufs Beantwortung dieser Frage bilden wir für eine willkürliche Breite φ, auf der jedoch die Wärmestrahlung während des ganzen Jahres nicht Null[1] wird, die Gleichung der Jahresschwankung, nämlich

[1] Also $\varphi \leqq 90° - \varepsilon$.

$$\left(\frac{dq}{d\odot}\right)_{ma} - \left(\frac{dq}{d\odot}\right)_{mi} = \psi_a e^{-\frac{\mu}{\psi_a}} - \psi_i e^{-\frac{\mu}{\psi_i}},$$

und fragen: Für welchen Absorptionskoeffizienten wird diese ein Maximum? Als Bedingung für den Eintritt eines solchen ergibt sich

$$e^{-\frac{\mu}{\psi_i}} - e^{-\frac{\mu}{\psi_a}} = 0,$$

eine Gleichung, welche den Annahmen $\mu = 0$, $\mu = \infty$ gleichzeitig genügt. Die letztere Bedingung kommt wieder nicht in Betracht. Anders liegt es mit der ersten Bedingung, welcher der Wert $p = 1$ des Absorptionskoeffizienten entspricht. Diesen Wert nämlich in den zweiten Differentialquotienten der Jahresschwankung eingesetzt, nämlich in den Ausdruck

$$\frac{e^{-\frac{\mu}{\psi_a}}}{\psi_a} - \frac{e^{-\frac{\mu}{\psi_i}}}{\psi_i},$$

macht diesen negativ. Es existiert somit für $\mu = 0$ ein Maximum in der Jahresschwankung.

Übertragen wir dieses analytische Ergebnis ins Physikalische, so folgt, daß die Jahresschwankung am größten ist, wenn überhaupt keine Wärmestrahlen absorbierende Atmosphäre vorhanden ist, und weiter, daß die Jahresschwankung um so kleiner wird, je stärker die Luft Wärmestrahlen absorbiert. Es wirkt somit die Atmosphäre ausgleichend auf den jährlichen Gang der Wärmestrahlung in den einzelnen Breiten ein.[1]

Wichtig insbesondere für die folgende Besprechung der Untersuchungen Angot's ist der Vergleich der Intensität der Bestrahlung des Äquators und des Poles. Bereits bei der Untersuchung der solaren Wärmestrahlung auf Pol und Äquator sind wir zu dem Resultate gelangt, daß in gleichen Zeiten letzterem stets mehr Wärme pro Flächeneinheit zugestrahlt

[1] Zu demselben Resultate gelangt man nach einer analog durchzuführenden Untersuchung hinsichtlich der Differenz aus je zwei entsprechenden Werten des Differentialquotienten in verschiedenen Quadranten der Erdbahn. Siehe Anmerkung auf p. 202.

wird als ersterem. Wie zu erwarten, ergibt sich auch bei Vorhandensein einer absorbierenden Atmosphäre der gleiche Satz. Bildet man nämlich den Quotienten der beiden Gleichungen

$$\left(\frac{dq}{d\odot}\right)_{\varphi=0} = \psi_{\varphi=0} e^{-\frac{\mu}{\psi_{\varphi=0}}}, \qquad \left(\frac{dq}{d\odot}\right)_{\varphi=90} = \psi_{\varphi=90} e^{\frac{\mu}{\psi_{\varphi=90}}},$$

so ergibt sich mit Rücksicht auf Gleichung (4) der solaren Strahlung

$$\frac{\left(\frac{dq}{d\odot}\right)_{\varphi=0}}{\left(\frac{dq}{d\odot}\right)_{\varphi=90}} = \operatorname{cotg}\delta . e^{-\mu\left(\frac{1}{\psi_{\varphi=0}} - \frac{1}{\psi_{\varphi=90}}\right)},$$

eine Gleichung, deren rechte Seite für jede Deklination, daher auch für jede Sonnenlänge größer als 1 ist. Es ist daher stets

$$\left(\frac{dq}{d\odot}\right)_{\varphi=0} > \left(\frac{dq}{d\odot}\right)_{\varphi=90}$$

und somit für gleiche Längendifferenzen in der Erdbahn, d. h. für gleiche Zeiten immer

$$[q]_{\varphi=0} > [q]_{\varphi=90}.$$

Es wird daher auch bei Vorhandensein einer Wärmestrahlen absorbierenden Atmosphäre in gleichen Zeiten dem Pole nie mehr Wärme pro Flächeneinheit zugestrahlt als dem Äquator. Der Unterschied in der Bestrahlung wird um so größer, je stärker die Luft Wärmestrahlen absorbiert.

Fassen wir die Ergebnisse dieses Abschnittes zusammen.

Durch die Absorption der Erdatmosphäre werden die zugestrahlten Wärmemengen auf ihrem Wege durch diese geschwächt, so daß unter gleichen Verhältnissen der Erdoberfläche weniger Wärme zugestrahlt wird als dann, wenn keine Lufthülle vorhanden wäre. Die Eintrittszeiten der Extreme im Wärmegange einer beliebigen Breite, dann die Eintrittszeiten des gänzlichen Aufhörens der Wärmestrahlung auf gewissen Breiten erfahren durch die Absorption keine Verschiebung; ebenso sind die Breiten, für welche in meridionaler

Richtung die Wärmestrahlung ein Maximum erreicht oder Null wird, ganz unabhängig davon, ob eine Absorption stattfindet oder nicht, und im ersteren Falle ganz unabhängig davon, ob sie stärker oder schwächer ist. Es erfahren daher weder die drei meteorologischen Zonen auf jeder Hemisphäre noch die Jahreszeiten auf jeder Breite irgend eine Veränderung. Es ist somit die Verteilung der durch Absorption in der Atmosphäre geschwächten Wärmestrahlung auf der Erdoberfläche genau dieselbe wie jene der solaren Wärmestrahlung. In der Jahresschwankung wirkt die Atmosphäre ausgleichend ein, und zwar um so mehr, je größer ihr Absorptionsvermögen ist. Das Bild über die Verteilung der solaren Wärmestrahlung auf der Erdoberfläche zeigt demnach die denkbar extremsten klimatischen Verhältnisse.

Nach Ermittlung dieser allgemeinen Verhältnisse erübrigt noch die tatsächliche Berechnung der Wärmemengen, welche nach Passieren der Atmosphäre auf die einzelnen Breiten der Erde pro Flächeneinheit auffallen, eine Aufgabe, mit der sich einer der folgenden Abschnitte beschäftigt.

Zum Schlusse sei noch darauf aufmerksam gemacht, daß die diskutierten Gleichungen (α') und (β') von keinerlei Voraussetzung über den speziellen Charakter der Funktion ψ abhängig sind. Es sind daher auch die gewonnenen Resultate ganz unabhängig von dem besonderen Charakter des zu Grunde gelegten solaren Strahlungsgesetzes. Aus dieser Allgemeinheit der Untersuchung und der erhaltenen Resultate ergeben sich später noch wichtige Schlüsse.

V. Die Untersuchungen W. Zenker's und A. Angot's.

Vor Angabe des Weges, auf welchem die Berechnung der Wärmemengen möglich ist, welche nach Passieren der Erdatmosphäre auf die Erdoberfläche auffallen, wollen wir von den eingangs angeführten einschlägigen Untersuchungen jene beiden einer Besprechung unterziehen, deren Ergebnisse die Grundlage unserer heutigen Kenntnis über die Verteilung der Wärmestrahlung bei Vorhandensein einer Atmosphäre auf der Erde bilden. Es sind dies die Abhandlungen W. Zenker's

und A. Angot's. Bei dieser Besprechung wird zunächst darauf zu achten sein, inwieweit ein jeder der Forscher den Einfluß der Atmosphäre auf die Wärmestrahlen der Sonne berücksichtigt hat; weiter soll festgestellt werden, was für Wärmemengen jeder Autor berechnen wollte, nämlich was für eine physikalische Bedeutung gemäß den Auseinandersetzungen des ersten Abschnittes den von ihnen ermittelten Zahlenwerten zukommt.

Zenker's Abhandlung, eine Preisschrift der Pariser Akademie, behandelt das Problem in denkbar eingehendster und umfassendster Weise. Er berücksichtigt nicht nur die Absorption der Wärmestrahlen durch die Luft, sondern auch ihre diffuse Reflexion in dieser. Er zieht somit in den Kreis seiner Rechnungen auch die Wärmestrahlung der Atmosphäre selbst gegen die Erdoberfläche. Weiter untersucht er die Größe der Wärmemengen, welche infolge der astronomischen Dämmerung dem Erdboden zugestrahlt werden, auch wenn die Sonne sich bereits unter dem Horizonte der betrachteten Flächeneinheit befindet. Doch damit nicht genug; von den Wärmestrahlen, welche die primären und sekundären Wärmequellen zustrahlen, fällt ein Teil auf festen Erdboden, ein anderer Teil auf Wasserflächen und ein dritter Teil endlich auf Schneeflächen auf. Von diesen Bodenunterlagen werden die Wärmestrahlen in verschiedener Menge absorbiert und reflektiert. Zenker berechnet nun in seiner gründlichen Untersuchung jene Wärmemengen, welche von jeder dieser drei Bodenunterlagen absorbiert werden und ausschließlich zur Erwärmung der obersten Erdschichten Verwendung finden. Es berücksichtigt somit Zenker alle Einflüsse, denen die Wärmestrahlen in der atmosphärischen Luft und an der Erdoberfläche selbst unterworfen sind, ehe sie ihre Energie an diese abgeben. So umfassend ist das Problem weder vor ihm noch nach ihm behandelt worden; es wird daher diese Abhandlung, was die physikalische Seite des Problems anbelangt, für alle späteren Untersuchungen einerseits als Vorbild, andrerseits als Anknüpfungspunkt dienen. Anders ist es bedauerlicherweise mit der analytischen Seite des Problems bestellt. Zenker, der mittlere Wärmemengen berechnet, legt seiner Untersuchung die von Wiener abgeleiteten Zahlenwerte

und Gleichungen zu Grunde, bezüglich deren der Verfasser bereits gelegentlich der Behandlung des Problems der solaren Strahlung nachzuweisen in der Lage war, daß ihnen eine auf unrichtigen Voraussetzungen basierende Ausgangsgleichung zu Grunde liegt.[1] Damit sind natürlich die von Zenker berechneten Zahlenwerte und das von ihm entworfene Bild über die Verteilung der Wärmestrahlung bei Vorhandensein einer Atmosphäre auf der Erdoberfläche nicht zutreffend. Doch ist damit das große Verdienst Zenker's um die Klarlegung des so komplizierten Problems der Wärmestrahlung in keiner Weise geschmälert. Denn wenn auch die schließlich von ihm ermittelten Wärmemengen nicht den tatsächlichen Verhältnissen entsprechen, so wird doch die umfassende physikalische Untersuchung, die scharfe Trennung der verschiedenen der Erdoberfläche wärmespendenden Ursachen der Abhandlung die gebührende, bleibende Beachtung immer sichern.

Von Angot wird das Problem nicht in so umfassender Weise behandelt. Er berücksichtigt nur die Absorption, welche die Wärmestrahlen in der Luft erfahren, ebenso wie es in den vorigen Kapiteln geschehen ist. Auch er legt seiner Untersuchung das Lambert'sche Absorptionsgesetz zu Grunde. Man sieht, in den physikalischen Voraussetzungen stimmen die Angot'sche und die vorliegende Untersuchung vollkommen überein. Was nun die analytische Behandlung des Problems anbelangt, so wird es nötig sein, den von Angot eingeschlagenen Weg näher zu besprechen.

Ausgangsgleichung ist die auch unserer Rechnung im Abschnitt III zu Grunde gelegte Gleichung (5). Aus ihr berechnet Angot vorerst durch graphische Integration für 15 Tage des Jahres die Wärmemengen, welche auf 19 verschiedenen Breiten festgegebene Flächeneinheiten während eines Tages zugestrahlt erhalten.

Zu diesem Zwecke hatte er viele langwierige Rechnungen auszuführen. Er wählte 15 verschiedene Deklinationen der Sonne, nämlich $0°$, $\pm 4°$, $\pm 8°$, $\pm 12°$, $\pm 16°$, $\pm 20°$, $\pm 22°$, $\pm \varepsilon$ (Schiefe der Ekliptik); für jede dieser Deklinationen

---

[1] Siehe die Fußnote auf p. 179.

berechnete er aus der bekannten Formel für die Höhe der Sonne über dem Horizonte diese von Stunde zu Stunde an dem betreffenden Tage, und zwar für jeden zehnten Breitengrad. Mit Hilfe dieser Höhen berechnete er wieder für jede Stunde des Tages den Faktor $p^{\frac{1}{\sin h}}$, wobei er p der Reihe nach gleich 1, 0·9, 0·8, 0·7, 0·6, 0·5 annahm und schließlich das Produkt $p^{\frac{1}{\sin h}} \sin h$.

Denkt man sich nun die Tagesstunden auf einer Achse als Abszissen, die Werte dieses Produktes als zugehörige Ordinaten aufgetragen und ihre Endpunkte durch eine Kurve miteinander verbunden, so ist es klar, daß die von der Kurve und der Abszissenachse eingeschlossene Fläche proportional ist der Wärmemenge, welche der festgegebenen Flächeneinheit während eines Tages zugestrahlt wird. Auf diese Weise erhielt Angot für jeden zehnten Breitenkreis und für 15 Tage des Jahres entsprechend den angenommenen 15 Sonnendeklinationen je fünf Flächeninhalte gemäß den der Rechnung zu Grunde gelegten fünf Werten des Absorptionskoeffizienten.

Diese Flächeninhalte, mit einem Planimeter ausgemessen, geben nun allerdings für 15 Tage des Jahres die gesuchte Wärmemenge, aber eben nur für 15 Tage, und Angot strebte doch eine allgemeine Lösung des Problems an, die ihm ermöglichte, nicht nur für jeden Tag des Jahres die diesem zugestrahlte Wärmemenge zu berechnen, sondern es ihm auch erlaubte, für längere Zeitabschnitte die Größe der zugesandten Wärmemengen zu berechnen.

Behufs Erreichung dieses Zieles dachte er sich das Integral über das Produkt

$$\int_{t_1}^{t_2} p^{\frac{1}{\sin h}} . \sin h \, dt$$

(t_1, t_2 Stundenwinkel des Sonnen-Auf-, beziehungsweise -Unterganges) in eine Fourier'sche Reihe entwickelt, von der Erwägung ausgehend, daß $\sin h$ periodisch sei, da es wieder denselben Wert annehme, wenn sich die Sonnenlänge um 2π geändert habe.

Diese Reihe

$$a_0 + a_2 \cos 2\odot + a_4 \cos 4\odot + \ldots,$$
$$\pm b_1 \sin \odot \pm b_3 \sin 3\odot \pm \ldots$$

in welcher das positive Zeichen für Flächeneinheiten der nördlichen Halbkugel, das negative aber für solche der südlichen zu nehmen ist, setzte er nun jedesmal einer einem bestimmten Absorptionskoeffizienten und einer bestimmten Breite entsprechenden Serie von 15 Tageswärmen gleich. Auf diese Weise erhielt er fünfmal 19, je 15 Gleichungen umfassende Gleichungssysteme, aus denen er mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate die Konstanten obiger Reihe berechnen konnte, natürlich wieder jede Konstante zu fünfmal 19 Werten, entsprechend den fünf angenommenen Absorptionskoeffizienten und 19 Breitenkreisen.

Bei diesen Rechnungen ist noch nicht die wechselnde Entfernung der Erde von der Sonne berücksichtigt worden. Auch diese wird noch in Rechnung gebracht, wobei Angot gleichzeitig an Stelle der wahren Sonnenlänge die mittlere Anomalie M der Sonne als unabhängig Veränderliche in seine Reihe einführt. Er kommt schließlich auf die Fourier'sche Reihe

$$q = \frac{C}{r^2} \int_{t_1}^{t_2} p^{\frac{1}{\sin h}} . \sin h \, dt = A_0 + A_1 \cos M + A_2 \cos 2M + \ldots$$
$$\pm B_1 \sin M \pm B_2 \sin 2M \pm \ldots,$$

in welcher die Koeffizienten wieder für jeden Absorptionskoeffizienten und jede Breite separat berechnet werden mußten. Für ein bestimmtes M gibt diese Reihe sofort die Wärmemenge, welche der auf einer der 15 angenommenen Breiten festgegebenen Flächeneinheit an einem Tage zugestrahlt wird, während dessen Dauer ihre mittlere Anomalie dem in die Reihe eingesetzten Werte gleich ist.

Damit war das eine Ziel Angot's erreicht, nämlich für jeden Tag im Jahre die einer festgegebenen Flächeneinheit zugestrahlte Wärmemenge berechnen zu können.

Nun handelte es sich noch darum, die in längeren Zeiträumen den einzelnen Breiten zugestrahlten Wärme-

mengen zu berechnen. Zu diesem Zwecke bestimmte Angot aus voranstehender Reihe für eine Anzahl gleich weit voneinander abstehender Werte von *M* die Wärmemengen, welche Flächeneinheiten von dieser mittleren Anomalie im Laufe eines Tages zugestrahlt erhalten; nun trug er wieder die mittlere Anomalie als Abszissen, die zugehörigen Tageswärmen als Ordinaten in einem Koordinatensystem auf und bestimmte den durch die erhaltene Kurve und die Abszissenachse eingeschlossenen Flächeninhalt auf graphischem Wege. Diese Operation führte er für jede der 15 Breiten und für jeden der fünf Absorptionskoeffizienten aus und berechnete auf diesem Wege die Wärmemengen, welche während der 12 Monate und während des ganzen Jahres einer jeden der 19 Breiten, und zwar deren ganzem Umfange zugesendet werden.

Für diesen Vorgang ist Angot folgende, auch bei Zenker in seiner oben besprochenen Abhandlung[1] auseinandergesetzte Auffassung des Problems maßgebend gewesen.

Angot war im stande, mit Hilfe seiner Fourier'schen Reihe für jedes beliebige *M* jene Wärmemenge zu berechnen, welche einer auf bestimmter Breite festgegebenen Flächeneinheit während eines Tages zugestrahlt wird. Auf dieser wird nun im allgemeinen durch den Anbruch der Nacht die Strahlung unterbrochen. Wollen wir daher die Wärmemenge berechnen, welche während eines längeren Zeitraumes als eines Strahlungstages dieser Flächeneinheit zugestrahlt wird, so müssen wir für jeden einzelnen Strahlungstag in diesem Zeitraum die Tageswärme berechnen und diese dann summieren. Hiebei wird sich natürlich die mittlere Anomalie, die während der Dauer eines Tages in der Fourier'schen Reihe immer konstant angenommen wird, von Tag zu Tag sprungweise ändern.[2]

Einfacher als durch diese umständliche Summation, nämlich durch eine bloße Integration, läßt sich aber nach Zenker diese Rechnung durchführen, wenn wir sie nicht für eine einzelne Flächeneinheit, sondern für eine unendliche Menge

---

[1] p. 185 ff.

[2] Vergl. hiemit die Ausführungen des ersten Abschnittes, p. 174.

solcher Flächeneinheiten anstellen, welche in gleichen Abständen auf der angenommenen Breite liegen. Denn in diesem Falle ändert sich dann die mittlere Anomalie, da die Flächeneinheiten unendlich nahe beieinander liegen, kontinuierlich von Flächeneinheit zu Flächeneinheit. Denken wir uns also für jede dieser Flächeneinheiten die Wärmemenge eines Tages berechnet und diese dann summiert, so wird ihre Summation mit Rücksicht auf die kontinuierliche Änderung der mittleren Anomalie von Flächeneinheit zu Flächeneinheit in eine Integration nach der mittleren Anomalie übergehen. Und was für Wärmemengen werden auf diesem Wege berechnet? Nach Ansicht Zenker's und auch Angot's, dessen graphisches Verfahren ganz mit der Zenker'schen Auffassung des Problems sich deckt, jene Wärmemengen, welche der ganzen Breite während einer gewissen Zeit, bestimmt durch die Änderung der mittleren Anomalie in ihr, zugesendet werden.

Es läßt sich nun zeigen, daß der eben geschilderte Vorgang bei der Integration nicht einwandfrei ist und daher nicht zu dem angestrebten Ziele führt. Zu diesem Zwecke wollen wir uns die analytische Seite der Angot'schen Rechnungen genauer vor Augen führen.

Aus der Grundgleichung (5) des Abschnittes III berechnet sich die Tageswärme einer auf beliebiger Breite festgegebenen Flächeneinheit aus dem Integral

$$C\int_{-t_0}^{+t_0} p^{\frac{1}{\sin h}} \cdot \frac{\sin h}{r^2}\, dt,$$

wobei wir, ohne damit die Strenge unserer Diskussion zu beeinträchtigen, der Einfachheit halber annehmen wollen, die Stundenwinkel des Sonnen-Auf- und -Unterganges sind, absolut genommen, einander gleich. Dieses Integral denkt sich Angot in eine Fourier'sche Reihe mit der mittleren Anomalie als unabhängig Veränderliche entwickelt; wir wollen diese kurz mit $f(M)$ bezeichnen. Dann gibt nach Angot das Integral über diese innerhalb der Grenzen M_1 und M_2 die Wärmemenge, welche der ganzen betrachteten Breite in dem diesen Grenzen entsprechenden Zeitraum zugestrahlt wird;

nennen wir diese Wärmemenge Q, so haben wir also die Beziehung

$$Q = \int_{M_1}^{M_2} f(M)\,dM.$$

Wir brauchen für unsere Betrachtung den Differentialquotienten von Q nach der mittleren Anomalie M; folgende Gleichung ist dann unsere Ausgangsgleichung

$$\frac{dQ}{dM} = f(M) = C\int_{-t_0}^{+t_0} p^{\frac{1}{\sin h}} \frac{\sin h}{r^2}\,dt. \tag{7}$$

Nach der Auffassung Angot's verlangt also die linke Seite der Gleichung, daß auf der rechten Seite jene unendlich kleine Wärmemenge dQ ausgedrückt sei, welche in der unendlich kleinen Änderung der mittleren Anomalie dM dem ganzen Breitenkreise von der Polhöhe φ zugestrahlt wird.

Diese Gleichung unterwerfen wir folgenden Transformationen. Wir führen einmal an Stelle der mittleren Anomalie mittlere Zeit ein auf Grund der bekannten Gleichung

$$M = \mu(t - t'),$$

wobei μ die mittlere siderische Bewegung der Erde an einem mittleren Tage, t' aber die Perihelzeit der Erde ist; dann ist $dM = \mu dt$. Um ferner obige Gleichung mit dem allgemeinen Wärmestrahlungsgesetze vergleichbar zu machen, wollen wir die Wärmemenge dQ auf die Flächeneinheit beziehen. Zu diesem Zwecke dividieren wir die rechte Seite der Gleichung durch den Umfang u_φ des Breitenkreises φ. Wir erhalten dann folgende Gleichung:

$$\frac{dQ'}{dt} = \frac{\mu}{u_\varphi} C\int_{-t_0}^{+t_0} p^{\frac{1}{\sin h}} \frac{\sin h}{r^2}\,dt,$$

in welcher die linke Seite verlangt, daß auf der rechten jene unendlich kleine Wärmemenge dQ' stehe, welche in der unendlich kleinen (mittleren) Zeit dt pro Flächeneinheit der Breite φ zugestrahlt wird.

Gehen wir nun zum allgemeinen Strahlungsgesetze über. Dieses besagt, daß man aus der Wärmemenge, welche in der Zeiteinheit der Flächeneinheit zugestrahlt wird, jene Wärmemenge, welche bei Unveränderlichkeit aller Verhältnisse ihr im Zeitraume t zugesandt wird, erhält, wenn man die Wärmemenge der Zeiteinheit mit der Zeit t einfach multipliziert. Ist daher ω_0 die in der Zeiteinheit zugestrahlte Wärmemenge, so ist, die Gleichheit aller Verhältnisse vorausgesetzt, die im Zeitraume t der Flächeneinheit zugestrahlte Wärmemenge ω_t gegeben durch die Gleichung

$$\omega_t = \omega_0 . t,$$

daher die unendlich kleine Wärmemenge $d\omega_t$, welche in der unendlich kleinen Zeit dt der Flächeneinheit zugestrahlt wird, bestimmt durch die Gleichung

$$d\omega_t = \omega_0 dt.$$

Hierin ist, wie nochmals betont sei, ω_0 die Wärmemenge der Zeiteinheit, nämlich jenes Zeitraumes, welcher der Zählung von dt zu Grunde gelegt ist.

Wenden wir dieses Ergebnis auf unsere transformierte Gleichung an. Darnach muß also

$$\frac{\mu}{u_\varphi} C \int_{-t_0}^{+t_0} p^{\frac{1}{\sin h}} \frac{\sin h}{r^2} dt$$

jene Wärmemenge sein, die in der Zeiteinheit, nämlich jener Zeit, welche der Zählung der unendlich kleinen Zeit dt im Nenner unseres Differentialquotienten $\frac{dQ'}{dt}$ als Einheit zu Grunde gelegt ist, der angenommenen Breite pro Flächeneinheit zugestrahlt worden ist.

Der Ableitung gemäß ist aber die durch das Integral gegebene Wärmemenge jene, welche in der Zeit

$$\int_{-t_0}^{+t_0} dt = 2t_0$$

einer in der Breite φ festgegebenen Flächeneinheit zugestrahlt worden ist. Diese Zeit $2t_0$ ist nun aber von Angot nicht in der Zählung des dt im Nenner des Differentialquotienten $\frac{dQ'}{dt}$ als Einheit verwendet worden, sondern er zählt diese Zeit, das beweist die Verwendung der mittleren Anomalie, in dem in der Astronomie gebräuchlichen Maße, nämlich in mittlerer Zeit. Hätte er die Zeit $2t_0$ seiner Rechnung als Zeitmaß zu Grunde legen wollen, so hätte er[1] das im Nenner des Differentialquotienten $\frac{dQ'}{dt}$ befindliche dt durch diese dividieren müssen. Einwandfrei würde dann die Gleichung lauten:

$$\frac{dQ'}{dt} = \frac{\mu}{2u_\varphi} C \frac{1}{t} \int_{-t_0}^{+t_0} p^{\frac{1}{\sin h}} \frac{\sin h}{r^2} dt.$$

Führen wir wieder die mittlere Anomalie ein und berechnen mit Angot wieder die Wärmemengen, welche dem ganzen Breitenkreise zugestrahlt werden, so erhalten wir

$$\frac{dQ}{dM} = \frac{\mu}{2M} C \int_{-t_0}^{+t_0} p^{\frac{1}{\sin h}} \frac{\sin h}{r^2} dt = \frac{\mu}{2} \frac{f(M)}{M}$$

und daraus als Wärmemenge, wenn die mittlere Anomalie von M_1 bis M_2 gewachsen ist,

$$Q = \frac{\mu}{2} \int_{M_1}^{M_2} \frac{f(M)}{M} dM.$$

Es gibt also ein wesentlich anderer analytischer Ausdruck, als ihn Angot bei seiner Rechnung verwendet, die gesuchte Wärmemenge.

Fragen wir uns, für welche Zeit, beziehungsweise für welche mittlere Anomalie Angot seine Berechnung durchgeführt hat. Wir finden diese aus dem Integral

$$2 \int_{t_1}^{t_2} t\, dt = t_2^2 - t_1^2 = \frac{1}{\mu^2} (M_2^2 - M_1^2).$$

[1] Abgesehen von einer multiplikativen Konstanten.

Hätte nämlich Angot zur Messung von dt den Zeitraum $2t$ als Einheit benützt, so würde obiges Integral in die Form

$$\int_{t_1}^{t_2} d\underline{t} \quad (\underline{t} \text{ nun im neuen Zeitmaße})$$

übergegangen sein und die Berechnung wäre für die von Angot gewünschte Zeit durchgeführt worden.

Setzen wir in der Gleichung (7) dieses Abschnittes den Absorptionskoeffizienten $p = 1$, so würde nach Angot die Gleichung

$$\frac{dQ}{dt} = C \int_{-t_0}^{+t_0} \frac{\sin h}{r^2} dt$$

jene unendlich kleine solare Wärmemenge geben, welche der ganzen Breite von der Polhöhe φ in der unendlich kleinen Zeit dt zugestrahlt wird. Von Interesse ist nun der Hinweis, daß Wiener in seiner eingangs zitierten Abhandlung ganz genau dieselbe Beziehung als Ausgangsgleichung für seine Untersuchung über solare Wärmemengen verwendet, nur mit dem Unterschiede, daß er obigen Differentialquotienten dahin definiert, dQ sei jene unendlich kleine mittlere solare Wärmemenge, welche pro Flächeneinheit der Breite φ zugestrahlt wird. Dies wäre ein Beweis für die Unsicherheit der Autoren selbst hinsichtlich der physikalischen Bedeutung der von ihnen berechneten Wärmemengen. Es bedarf wohl keiner weiteren Erwähnung, daß, abgesehen von den Einwänden, welche der Verfasser bereits in seiner Abhandlung über die solare Strahlung bei der Ableitung dieses Differentialquotienten gegen Wiener erhoben hat, bei der Integration dieses Differentialquotienten auch in der ihm von Wiener beigelegten Bedeutung dasselbe wie eben bei Angot geäußerte Bedenken ausgesprochen werden müßte.

Die Gründlichkeit in der Besprechung der Angot'schen Abhandlung verlangt, daß noch die folgende, mögliche Eventualität in Betracht gezogen werde, nämlich die, daß Angot durch sein Verfahren habe mittlere Wärmemengen berechnen wollen, indem er sich in der Fassung des gestellten Problems

Wiener anschloß, was nicht ganz ausgeschlossen ist,[1] da er sich über die physikalische Bedeutung der von ihm berechneten Wärmemengen nicht präzis ausspricht und daher in dieser Hinsicht den Leser im Unklaren läßt. In diesem Falle würde von Angot's Abhandlung das eben von der Wienerschen Untersuchung Gesagte gelten. Sie wäre dann aus zwei Gründen nicht einwandfrei, nämlich einmal hinsichtlich der Definition des Differentialquotienten als mittlere Wärmemenge überhaupt, dann aber hinsichtlich der Verwendung von zweierlei Zeitmaßen in der weiteren Rechnung.

Eine dritte physikalische Bedeutung läßt sich aber den von Angot berechneten Wärmemengen nicht beilegen. Es sind daher die Angot'schen Untersuchungen nicht einwandfrei, mag er mittlere Wärmemengen in der Wiener'schen Auffassung berechnen wollen oder Wärmemengen, welche nicht pro Flächeneinheit, sondern dem ganzen Umfange der betrachteten Breite in einer gewissen Zeit zugestrahlt werden.

Aber selbst wenn man Angot's Verfahren bei der Berechnung der Wärmemengen für längere Zeitabschnitte billigen wollte, würde er nicht in einwandfreier Weise die Wärmemengen berechnen, welche den beiden Polen der Erde in längeren Zeitabschnitten zugestrahlt werden. Auf jedem Breitenkreise der Erde, auch wenn sein Radius noch so klein ist, lassen sich unendlich viele, unendlich nahe Flächeneinheiten annehmen, so daß die mittlere Anomalie von einer zur anderen sich kontinuierlich ändert. Anders wird es jedoch, wenn dieser Radius Null wird, also der Breitenkreis in einen Punkt zusammenschrumpft, wie es auf den beiden Polen der Fall ist. Da hat man es dann nur mit einer einzigen Flächeneinheit zu tun. Und auf dieser ändert sich dann von Tag zu Tag (diesen natürlich nach einem Hauptmeridian der Erde gerechnet) die mittlere Anomalie sprungweise, da diese nach Angot in seiner Fourier'schen Reihe während eines Tages konstant genommen

[1] Der Verfasser hat nur aus dem Grunde angenommen, Angot habe die Wärmemengen berechnen wollen, welche dem ganzen Umfange der betrachteten Breite innerhalb einer gewissen Zeit zugestrahlt werden, um den Nachweis erbringen zu können, daß auch bei dieser Fassung des Problems der von Angot eingeschlagene Weg nicht einwandfrei ist.

werden muß. Mit der Diskontinuität von M ist aber eine Integration der Reihe ausgeschlossen und dennoch integriert sie Angot, indem er sich desselben graphischen Verfahrens bei den Polen wie bei den einzelnen Breiten bedient.

Bei der Diskontinuität von M und daher von $f(M)$ hätte Angot nur in der Weise die Wärmemenge des bestrahlten Poles während eines längeren Zeitraumes, beispielsweise eines halben Jahres, ermitteln können, daß er für jeden Tag (gezählt nach einem Hauptmeridian der Erde) des Halbjahres die mittlere Anomalie des Poles berechnet, diese Werte von M der Reihe nach in $f(M)$ einsetzt und die erhaltenen Tagessummen addiert; oder, da Angot das graphische Verfahren bevorzugt, hätte er folgenden Weg einschlagen können. Er hatte nicht nötig, die mittlere Anomalie für jeden einzelnen Tag des Halbjahres zu bestimmen, sondern nur für einzelne wenige Tage, etwa für jeden zehnten Tag, und hätte nur für diese wenigen Werte von M den Wert von $f(M)$ berechnen müssen. Die einzelnen Werte von M hätte Angot nun als Abszissen, die zugehörigen Werte von $f(M)$ als Ordinaten auftragen und deren Endpunkte dann durch eine Kurve verbinden können. Das hat nun auch Angot tatsächlich getan. Doch nun maß er den Flächeninhalt der Kurve mit einem Planimeter aus. Das durfte nicht geschehen. Denn damit integrierte er eine diskontinuierliche Funktion. Er hätte vielmehr diese Kurve nur dazu benützen dürfen, für die zwischen jedem zehnten Tage liegenden Tage die dem Pole zugestrahlte Tageswärme durch graphische Interpolation zu ermitteln, indem er in den diesen Tagen entsprechenden Punkten der Abszissenachse Senkrechte bis zu ihrem Schnitte mit der Kurve einzeichnete. Denn die Länge einer solchen Geraden ist proportional der Tageswärme. Dadurch nun, daß er die den auf der Abszissenachse markierten Tagen des halben Jahres entsprechenden Ordinaten addierte, hätte er einwandfrei die Wärmemenge erhalten müssen, die dem bestrahlten Pole in einem halben Jahre zugesendet wird.

Trotz der großen Rechenarbeit hat Angot sein Ziel nicht erreicht, denn die Wärmemengen, die in längeren Zeiträumen, sei es nun pro Flächeneinheit, sei es dem ganzen Umfange

nach einem Breitenkreise zugestrahlt werden, hat er nicht berechnet. Bis zur Entwicklung der Formel zur Berechnung der Tageswärme in eine Fourier'sche Reihe sind seine Schlüsse einwandfrei. Alle Ergebnisse, welche sich auf diesem ersten Teile seiner Entwicklung aufbauen, sind daher auch unanfechtbar. Es sind das alle Sätze über die Größe der Tageswärme in den einzelnen Breiten bei verschiedener mittlerer Anomalie und verschiedenem Absorptionskoeffizienten. Auch die von ihm konstruierten Kurven, von denen er irrtümlicherweise annimmt, sie repräsentieren den Verlauf der Wärmestrahlung auf der gegebenen Breite während eines Jahres, sind brauchbar, da sie es gestatten, auf graphischem Wege, wie wir es eben beim Pole gesehen haben, die Tageswärme für jede mittlere Anomalie zu ermitteln.

Alles Weitere ist aber nicht mehr einwandfrei. Vor allem das Bild, das Angot über die Verteilung der Wärmestrahlung auf der Erdoberfläche entwirft. So erhält, wie wir in Abschnitt IV gesehen haben, zu keinem Zeitpunkte der Pol, welche Größe auch immer der Absorptionskoeffizient haben mag, mehr Wärme pro Flächeneinheit zugestrahlt als innerhalb der gleichen Strahlungszeit der Äquator. Es ist daher auch die Wärmemenge, welche der Äquator seinem ganzen Umfange nach zugestrahlt erhält,[1] immer größer als jene, welche gleichzeitig der Pol zugesandt erhalten hat.[2] Wenn Angot findet, daß dies nur bei einem Absorptionskoeffizienten $p \gtrless 0{\cdot}7$ möglich ist, so ist das eine Folge seiner Unstrenge in der analytischen Behandlung des Problems. Auch für Absorptionskoeffizienten $p > 0{\cdot}7$ und die solare Strahlung hat dieser Satz Gültigkeit. Überhaupt hat sich bei den Untersuchungen Angot's — die eben besprochenen Strahlungsverhältnisse auf Pol und Äquator sind ja nur ein spezieller Fall hievon — ergeben, daß die Verteilung der Wärmestrahlung auf der Erdoberfläche abhängig sei vom Absorptionskoeffizienten der Atmosphäre, während wir gerade das Gegenteil im Abschnitte IV als richtig erkannt haben.

[1] Diese wird gefunden, wenn man seine mittlere Wärmemenge mit seinem Umfange multipliziert.

[2] Siehe Anmerkung p. 170.

Weiter ist auffallend das Ergebnis Angot's, daß die Wärmestrahlung in den Sommermonaten einer Hemisphäre[1] wenigstens für Absorptionskoeffizienten in der Nähe von 1 mit wachsender Breite sehr stark zunimmt. Vergleicht man damit die von Angot einwandfrei gefundene Verteilung der Wärmestrahlung an einem Tage der Sommerhemisphäre von Breite zu Breite, so wird man eine auffällige Übereinstimmung finden, die jedoch kein Beweis für die beiderseitige Richtigkeit ist; denn wie schon anfangs dieser Abhandlung bemerkt wurde, dürfen Resultate, welche für einen bestimmten Punkt auf verschiedenen Breitenkreisen ermittelt wurden, nicht verglichen oder identifiziert werden mit Resultaten, welche für ganze Breitenkreise gelten; vielmehr zeigt uns diese auffällige Übereinstimmung die Ursachen, warum Angot auch bei längeren Zeiträumen, als es ein Strahlungstag ist, zu einem ähnlichen Resultat wie für einen einzelnen Tag kommen mußte: es ist die von Angot nicht aus seinen Formeln eliminierte Strahlungszeit $2t$ eines Bestrahlungstages, welche auf der Sommerhemisphäre mit wachsender Breite bis schließlich zu 24 Stunden anwächst, welche den Einfluß der verschiedenen Tageslänge in seine Fourier'sche Reihe hineinbringt, die nach den Erläuterungen des ersten Abschnittes überhaupt unabhängig sein sollte von den Erscheinungen der scheinbaren täglichen Bewegung.

Hiemit soll die Besprechung der Angot'schen Arbeit abschließen. Es folgt nun die Lösung des noch übrig gebliebenen Teiles unserer Aufgabe.

VI. Die vierte Form des Lambert'schen Absorptionsgesetzes.

Die Wärmemengen, welche nach erfolgter Absorption in der atmosphärischen Luft pro Flächeneinheit auf eine beliebige Breite innerhalb einer gewissen Zeit auffallen, d. i. innerhalb einer gewissen Längendifferenz $\odot_2 - \odot_1$, erhält man, wenn man die Form (I) des Lambert'schen Absorptionsgesetzes innerhalb

[1] Das von Angot ermittelte Verhältnis in der Bestrahlung von Pol und Äquator steht hiemit im engsten Zusammenhange.

dieser Grenzen integriert; es ergibt sich daher für die Berechnung der gesuchten Wärmemengen die Gleichung:

$$q = \int_{\odot_1}^{\odot_2} \psi e^{-\frac{\mu}{\psi}} d\odot.$$

Der Versuch, die angezeigte Operation des Integrierens direkt auszuführen, führt auf langwierige Rechnungen auch dann, wenn man $e^{-\frac{\mu}{\psi}}$ in bekannter Weise durch die Reihe

$$\sum_0^\infty{}_r \frac{(\pm\mu)^r}{r!} \frac{1}{\psi^r}$$

ausdrückt, welche für jeden endlichen Wert von $\left|\frac{\mu}{\psi}\right|$ unbedingt konvergent ist. Es geht dann nämlich obige Gleichung in die Form

$$q = \sum_0^\infty{}_r \frac{(\pm\mu)^r}{r!} \int_{\odot_1}^{\odot_2} \frac{d\odot}{\psi^{r-1}}$$

über, in welcher die Fourier'sche Reihe, durch welche gemäß den Gleichungen des Abschnittes II die Funktion ψ dargestellt worden ist, in der $(r-1)^{\text{ten}}$ Potenz im Nenner auftritt.[1]

Diese langwierigen Rechnungen lassen sich dadurch vermeiden, daß wir das Lambert'sche Absorptionsgesetz noch in einer vierten Form darstellen, welche in relativ einfacher Weise die auszuführende Integration ermöglicht.

Zu diesem Zwecke wollen wir uns den Weg vor Augen führen, der einzuschlagen wäre, wenn wir jene solare Wärmemenge zu berechnen hätten, welche innerhalb einer gegebenen

---

[1] Man könnte auf den ersten Blick meinen, es sei praktischer, die Form (II) des Lambert'schen Absorptionsgesetzes für die auszuführende Integration zu verwenden; doch stößt man auf große analytische wie rechnerische Schwierigkeiten bei dem Versuche, die Länge $\odot$ der wahren Sonne als Funktion der solaren Wärmemenge W darzustellen.

Zeit dem Äquator pro Flächeneinheit zugestrahlt wird. In diesem Falle ist die Fourier'sche Reihe (Gleichung 2) des Abschnittes II innerhalb der Grenzen $\odot_1$ bis $\odot_2$ einer Integration zu unterziehen, bei welcher folgende geometrische Betrachtung am raschesten zum Ziele führt.

Vom Standpunkte der Geometrie aus ist diese Fourier'sche Reihe nichts anderes als die Gleichung einer Kurve, welche durch ihren Verlauf den Gang der solaren Wärmestrahlung am Äquator während eines Jahres wiedergibt. Nehmen wir an, die Erde bewege sich in einer Kreisbahn, setzen also die Erdbahnexzentrizität e gleich Null und nehmen weiter an, auch die Schiefe der Ekliptik ε sei gleich Null, so wird einfach $\left(\frac{dW}{d\odot}\right)_{\varphi=0} = \text{Konst.}$ Geometrisch ist dann der Verlauf der solaren Strahlung am Äquator durch eine Gerade repräsentiert, welche in einer gewissen Entfernung parallel mit der Abszissenachse des gewählten Koordinatensystems verläuft. Die Wärmemenge nun, welche dem Äquator unter diesen vereinfachten Verhältnissen auf einem gewissen Bahnstück in der Ekliptik zugestrahlt wird, ist dann geometrisch durch den Flächeninhalt eines Rechteckes gegeben, dessen Höhe die Ordinate $\left(\frac{dW}{d\odot}\right)_{\varphi=0} = \text{Konst.}$, dessen Grundlinie die dem gegebenen Bahnstück entsprechende Abszisse ist.

Wie liegen nun die Verhältnisse, wenn weder die Exzentrizität der Erdbahn noch die Schiefe der Ekliptik Null ist? In diesem Falle treten zu dem konstanten Gliede a_0 noch eine Reihe von periodischen Gliedern hinzu. Wie ist dies geometrisch aufzufassen? Nicht anders, als daß wir uns über der Geraden $\left(\frac{dW}{d\odot}\right)_{\varphi=0} = \text{Konst.}$ jedes einzelne dieser periodischen Glieder — geometrisch eine Anzahl Sinuswellen von verschiedener Amplitude, Phase und Periode — konstruiert denken; die den wahren Verlauf der solaren Strahlung am Äquator repräsentierende Kurve wird dann erhalten, wenn die der gleichen Abszisse entsprechenden Ordinaten der Geraden und der einzelnen Wellen algebraisch addiert und die sich so ergebenden Punkte verbunden werden, also, physikalisch

ausgedrückt, wenn die einzelnen Wellen zur Interferenz gebracht werden.

Damit ist auch bereits angedeutet, auf welche Weise die dem Äquator auf einer gegebenen Längendifferenz zugestrahlten Wärmemengen oder, geometrisch ausgedrückt, der von zwei Ordinaten begrenzte Flächeninhalt unserer Kurve bestimmt wird. Man hat einfach den Flächeninhalt einer jeden einzelnen dieser Wellen zu berechnen, welchen sie innerhalb der beiden Grenzordinaten mit der Geraden $\left(\frac{dW}{d\odot}\right)_{\varphi=0} =$ $=$ Konst. einschließen, und diese Flächeninhalte zu dem Flächeninhalte des von der Geraden und den beiden Grenzordinaten bestimmten Rechteckes zu addieren, beziehungsweise von diesem zu subtrahieren, je nachdem die Flächeninhalte der Wellen von positiven, beziehungsweise negativen Ordinaten — bezogen auf die Gerade $\left(\frac{dW}{d\odot}\right)_{\varphi=0} =$ Konst. — erfüllt werden.

In der Figur sind über der Geraden $\left(\frac{dW}{d\odot}\right)_{\varphi=0} = F(\odot) =$ $=$ Konst. als Abszissenachse jene Wellen konstruiert, deren Amplituden bei einer fünfstelligen Rechnung berücksichtigt werden müssen.[1]

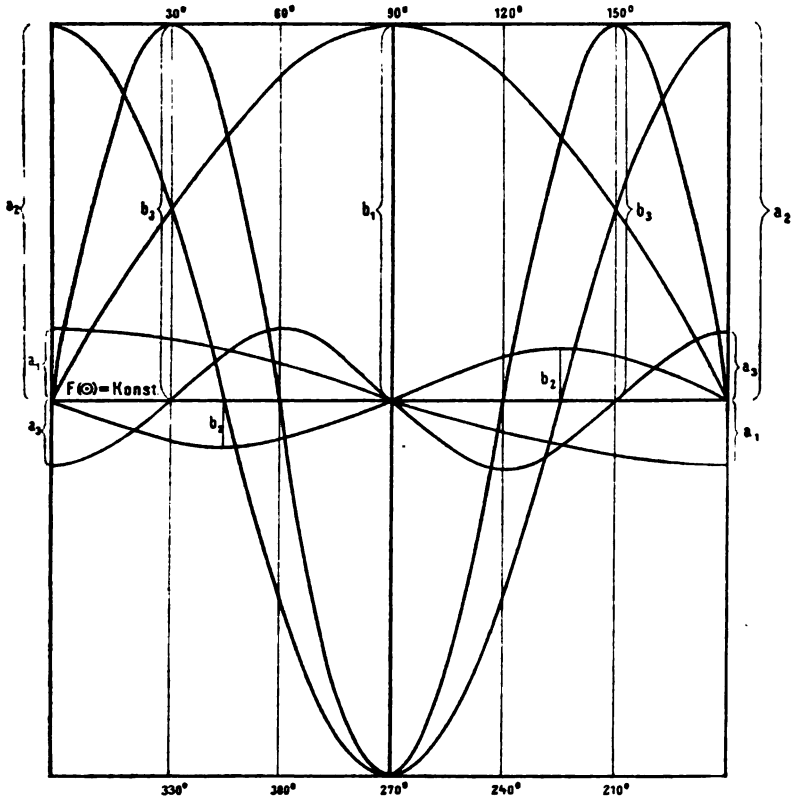
An der Hand dieser Figur und mit Rücksicht auf die oben gegebenen Anleitungen ist es nun nicht schwer, jene Wärmemengen zu berechnen, welche dem Äquator auf einer beliebigen Längendifferenz, beispielsweise auf Bahnstücken zu je 30 Längengraden, zugestrahlt werden. Denkt man sich nämlich unsere Fourier'sche Reihe innerhalb dieser willkürlichen Längendifferenz integriert, so erhält man allgemein für die Wärmemenge, welche dem Äquator auf diesem Längenintervall zugestrahlt wird:

---

[1] Bis auf die Amplitude a_2, welche 60mal verjüngt in die Figur eingezeichnet werden mußte, sind die Amplituden aller anderen Wellen in den sich aus der Rechnung ergebenden Verhältnissen konstruiert worden. Hinsichtlich der numerischen Berechnung der Amplituden sehe man nach Meteorol. Zeitschrift, 1906, p. 385 ff.

$$[W]_{\varphi=0} = a_0 \frac{\pi}{6} + w_1 + w_2 + w_3 + w_1' + w_2' + w_3',$$

wenn mit w_1, w_2, w_3 und w_1', w_2', w_3' die den Wellen mit den Amplituden a_1, a_2, a_3, beziehungsweise b_1, b_2, b_3 entsprechenden Flächeninhalte auf je 30 Längengraden bezeichnet werden.



Aus der Figur erkennt man leicht, daß diese Flächeninhalte im geometrischen Sinne in den angenommenen Längendifferenzen wie folgt algebraisch zusammenzufassen sind:

0°—30°	30°—60°	60°—90°
330°—360°	300°—330°	270°—300°
$a_0 \frac{\pi}{6}$	$a_0 \frac{\pi}{6}$	$a_0 \frac{\pi}{6}$
$+w_1+w_2-w_3$	$+w_1+w_2+w_3$ [1]	$+w_1-w_2+w_3$
$+w'_1-w'_2+w'_3$	$+w'_1-w'_2+w'_3$	$+w'_1-w'_2-w'_3$
90°—120°	120°—150°	150°—180°
240°—270°	210°—240°	180°—210°
$a_0 \frac{\pi}{6}$	$a_0 \frac{\pi}{6}$	$a_0 \frac{\pi}{6}$
$-w_1-w_2-w_3$	$-w_1+w_2-w_3$ [1]	$-w_1+w_2+w_3$
$+w'_1+w'_2-w'_3$	$+w'_1+w'_2+w'_3$	$+w'_1+w'_2+w'_3$

Man sieht, daß die zugestrahlten Wärmemengen berechnet sind, wenn man die numerischen Werte der Flächeninhalte der sechs Wellen kennt.

Gehen wir nochmals auf die Gleichung für $[W]_{\varphi=0}$ zurück. Physikalisch besagt diese Gleichung nichts anderes, als daß die Wärmemenge, welche dem Äquator auf einer gewissen Längendifferenz zugestrahlt wird, als eine algebraische Summe von Komponenten aufgefaßt werden darf, also als eine Summe von Teilwärmemengen, welche je nach dem Bahnstücke, für das die Gesamtwärmemenge zu berechnen ist, positiv oder negativ zu nehmen sind. Hiebei kann den negativ einzuführenden Wärmemengen insofern auch eine physikalische Bedeutung beigelegt werden, als man annimmt, diese Teilwärmemengen werden dem Äquator auf der angenommenen Längendifferenz durch irgend eine Ursache entzogen, und zwar nach demselben Gesetze, auf Grund dessen in einem anderen, ebenso

[1] Wie leicht einzusehen ist, muß für unsere Rechnung in diesen Längendifferenzen $w_2 = 0$ sein.

langen Bahnstücke dieselbe Wärmemenge dem Äquator zugestrahlt wird.

Und nun wollen wir annehmen, es sei eine Atmosphäre gegeben, welche nach dem Lambert'schen Gesetze die sie durchdringenden Wärmestrahlen absorbiert; die Aufgabe aber sei dieselbe wie vorhin. Welche Veränderungen erfahren nun hiedurch einmal der Verlauf der Wärmestrahlung am Äquator während eines Jahres, dann aber auch der Verlauf einer jeden einzelnen Teilwelle?

Über diese Fragen geben uns die Ergebnisse des Abschnittes IV Aufschluß. Dort hat sich gezeigt, daß der Verlauf der Wärmestrahlung für eine beliebige Breite, daher im besonderen auch für den Äquator, durch die Existenz einer Wärmestrahlen absorbierenden Atmosphäre nur insofern beeinflußt wird, daß die Jahresschwankung eine Verkleinerung erfährt, die Eintrittszeiten der Maxima und Minima in der Bestrahlung aber keine Verschiebung erfahren. Wie ist es nun aber mit den einzelnen Teilwellen bestellt bei Annahme einer solchen Atmosphäre? Auch da gibt uns der genannte Abschnitt Aufschluß.

Die Untersuchungen sind, wie bereits am Schlusse des Abschnittes hervorgehoben worden ist, ganz allgemein durchgeführt worden ohne Rücksicht auf die spezielle Form der Funktion ϕ. Nichts hindert uns, diese als die Gleichung einer der Teilwellen bei Existenz einer Wärmestrahlen absorbierenden Atmosphäre zu betrachten. Darum müssen auch alle Ergebnisse des Abschnittes IV unverändert für jede einzelne Teilwelle Gültigkeit haben.

Es wird daher jede Teilwelle für dieselbe Länge $\odot$ der Sonne dort ihr Maximum, beziehungsweise Minimum haben, wo sie einen solchen Extremwert bei solarer Strahlung erreicht. Ferner wird sie für dieselbe Sonnenlänge die Gerade $\left(\frac{dW}{d\odot}\right)_{\varphi=0} = \text{Konst.}$ schneiden, für welche dieser Schnitt bei Fehlen einer Atmosphäre eingetreten ist; denn die Bedingung $\phi = 0$ ist unabhängig vom Absorptionskoeffizienten, weil frei von der Konstanten μ. Nur die Differenz zwischen den dem Maximum und dem Minimum der Teilwelle entsprechenden

Ordinaten wird eine Verkleinerung erfahren. Rein geometrisch gesprochen, besagen diese Ergebnisse nichts anderes, als daß die einzelnen Teilwellen weder in ihrer Phase noch in ihrer Periode eine Änderung erfahren bei Existenz einer Atmosphäre, sondern nur in ihrer Amplitude.

Diese Ergebnisse berechtigen nun zu folgenden, die durchzuführende Berechnung ungemein vereinfachenden Schlüssen. Da die Teilwellen durch die Absorption der Wärmestrahlen in der Atmosphäre weder in ihrer Phase noch in ihrer Periode eine Änderung erfahren, wohl aber eine kleinere Amplitude erhalten, so fallen die von ihnen und der Geraden $\left(\frac{dW}{d\odot}\right)_{\varphi=0} =$ $=$ Konst. eingeschlossenen Flächen für jede Längendifferenz ganz innerhalb jener Flächen, welche von den Wellen gleicher Phase und Periode und dieser Geraden bei solarer Strahlung auf derselben Längendifferenz gebildet werden. Es ist daher der Flächeninhalt einer solchen Teilwelle bei Existenz einer Atmosphäre positiv, beziehungsweise negativ in die Rechnung einzuführen, wenn der durch die Teilwelle bei solarer Strahlung mit der Geraden $\left(\frac{dW}{d\odot}\right)_{\varphi=0} =$ Konst. gebildete Flächeninhalt positiv, beziehungsweise negativ in der Rechnung verwendet wurde. Gelingt es daher, für jede einzelne Teilwelle bei Existenz einer Atmosphäre den Flächeninhalt für jede beliebige Längendifferenz zu bestimmen, so sind diese Flächeninhalte auf dieselbe Weise algebraisch zusammenzufassen, um den Flächeninhalt der aus ihnen resultierenden Hauptwelle zu berechnen, wie die Flächeninhalte der Teilwellen bei solarer Strahlung auf derselben Längendifferenz.

Übertragen wir diese Schlüsse ins Physikalische, so besagen sie folgendes: Wir erhalten die Gesamtwärmemenge, welche auf einer gewissen Längendifferenz unter Annahme einer nach dem Lambert'schen Gesetze absorbierenden Atmosphäre pro Flächeneinheit auf den Äquator in einer gewissen Zeit auffällt, wenn wir für jede Komponente der solaren Wärmemenge, welche auf der gleichen Längendifferenz unter gleichen Verhältnissen dem Äquator zugestrahlt wird, die nach erfolgter Absorption durch die Atmosphäre übrigbleibende

Wärmemenge bestimmen und diese als Komponenten der durch die Absorption reduzierten Wärmestrahlung ebenso algebraisch zusammenfassen wie die Komponenten der solaren Strahlung auf derselben Längendifferenz.

Diese Ergebnisse gewinnen an Klarheit, wenn wir sie analytisch zum Ausdrucke bringen. Wir haben die Kurve, welche den Verlauf der solaren Strahlung am Äquator während eines Jahres angibt, dadurch, daß wir den Differentialquotienten $\left(\frac{dW}{d\odot}\right)_{\varphi=0}$ in eine Fourier'sche Reihe entwickelt haben, dargestellt als Interferenzwelle aus einer unendlichen Anzahl von Wellen. Ist nun eine Wärmestrahlen absorbierende Atmosphäre vorhanden, so erfahren diese Wellen nur in ihrer Amplitude, nicht aber in ihrer Phase und Periode eine Veränderung. Lassen wir also diese durch die Absorption modifizierten Wellen interferieren, so muß notwendig ihre Interferenzwelle jene Kurve sein, welche den Verlauf der Wärmestrahlung am Äquator bei Existenz einer Atmosphäre in einem Jahre angibt. Analytisch wird diese Interferenz der einzelnen Wellen dadurch zum Ausdrucke gebracht, daß wir die Gleichungen dieser Wellen algebraisch addieren. Diese sind aber, wie sich unmittelbar aus der ersten Form des Lambert'schen Absorptionsgesetzes ergibt, von folgender Form:

$$\frac{dq_\varkappa}{d\odot} = \psi_\varkappa e^{-\frac{\mu}{\psi_\varkappa}}, \qquad \psi_\varkappa = a_\varkappa \cos \varkappa\odot \qquad (\varkappa = 0, 1, 2 \ldots r)$$

$$\frac{dq'_\varkappa}{d\odot} = \psi'_\varkappa e^{-\frac{\mu}{\psi'_\varkappa}}, \qquad \psi'_\varkappa = \pm b_\varkappa \sin \varkappa\odot \qquad (\varkappa = 1, 2, 3 \ldots r)$$

wenn wir durch Hinzufügen des Indexes k die Teilwellen von der Hauptwelle $\left(\frac{dq}{d\odot}\right)_{\varphi=0}$ und untereinander durch Anbringung eines Akzentes unterscheiden, je nachdem wir es im letzteren Falle mit einer Sinus- oder Kosinuswelle zu tun haben. Für das Vorzeichen im Exponenten auf der rechten Seite obiger Gleichungen ist aber die folgende Bemerkung von Wichtigkeit. Solange die linke Seite der Gleichungen positiv ist, wird dem Äquator Wärme zugestrahlt; wird sie aber negativ, so läßt sich das analog den negativen Teilwärme-

mengen bei der solaren Strahlung physikalisch so auffassen, als würde dem Äquator nach dem gleichen Gesetze wie bei der Zustrahlung Wärme entzogen. Die Atmosphäre spielt bei dieser Auffassung in jedem der beiden Fälle eine ganz entgegengesetzte Rolle. Im ersten Falle schützt sie den Äquator vor jener starken Einstrahlung, wie sie beim Fehlen einer Atmosphäre stattfinden würde; sie wirkt also vermindernd auf die zugestrahlten Wärmemengen ein. Im zweiten Falle aber schützt sie vor jenem starken Wärmeentgange, wie er bei der solaren Strahlung durch die negativen Teilwärmemengen verursacht wird; es wirkt daher im letzten Falle die Atmosphäre relativ vergrößernd auf die Wärmemengen des Äquators ein. Analytisch kommt dieses verschiedene Verhalten der Atmosphäre in beiden Fällen dadurch zum Ausdrucke, daß der Logarithmus des Absorptionskoeffizienten μ gleichzeitig mit der linken Seite der Gleichungen sein Zeichen wechseln muß. Da aber mit dieser auch der Nenner im Exponenten der Basis e der natürlichen Logarithmen sein Vorzeichen ändert, so bleibt das Vorzeichen des ganzen Exponenten von diesen beiden Zeichenwechseln unbeeinflußt. Für die praktische Anwendung obiger Gleichungen ergibt sich daher die einfache Regel, daß sowohl μ als auch der Nenner im Exponenten stets nur ihrem absoluten Betrage nach in die Rechnung einzuführen sind. Man erhält somit als Gleichung des Verlaufes der Wärmestrahlung am Äquator bei Existenz einer Atmosphäre

$$\left(\frac{dq}{d\odot}\right)_{\varphi=0} =$$

$$= a_0 e^{-\frac{\mu}{a_0}} + \sum_1^\infty (a_\varkappa e^{-\frac{\mu}{a_\varkappa \cos \varkappa \odot}} \cos \varkappa \odot \pm b_\varkappa e^{-\frac{\mu}{b_\varkappa \sin \varkappa \odot}} \sin \varkappa \odot).$$

Das Integral[1] über diese Gleichung innerhalb der Grenzen $\odot_1$ bis $\odot_2$ gibt die Wärmemengen, welche in der diesen Grenzen entsprechenden Zeit pro Flächeneinheit auf den Äquator auffallen, wobei ebenso, wie wir beim Beispiele der

[1] Die gleichmäßige Konvergenz dieser Reihe läßt sich ohneweiters aus der physikalischen Bedeutung des Differentialquotienten schließen.

solaren Strahlung gesehen haben, auf die verschiedene Periode der einzelnen Glieder der Reihe Rücksicht zu nehmen ist.

Dieselben Schlüsse wie für den Äquator gelten auch für den Verlauf der Wärmestrahlung und für die Berechnung der auffallenden Wärmemengen bei Existenz einer Atmosphäre am bestrahlten Pole. Den Verlauf der Wärmestrahlung auf ihm stellt die Gleichung

$$\left(\frac{dq}{d\odot}\right)_{\varphi=90} = \pm\frac{1}{2}pe^{-\frac{\mu}{\frac{1}{2}p\sin\odot}}\sin\odot$$

dar, deren Integral innerhalb der Grenzen von $\odot_1$ bis $\odot_2$ die gesuchte Wärmemenge gibt.

Es frägt sich nun, wie die Verhältnisse liegen, wenn wir auf eine beliebige Breite von der Polhöhe φ übergehen. Gemäß der Gleichung (1) des zweiten Abschnittes erhalten wir den Verlauf der solaren Strahlung auf dieser Breite, wenn wir die Welle des Poles, deren Amplitude mit dem Sinus der Polhöhe der angenommenen Breite zu multiplizieren ist, mit der Welle des Äquators, deren Amplitude mit dem Kosinus der Polhöhe zu multiplizieren ist, zur Interferenz bringen. Da letztere Welle aber selbst eine Interferenzwelle aus einer unendlichen Anzahl von Wellen ist, so hat man die auf die Breite φ reduzierte Welle des Poles mit dieser unendlichen Anzahl von Teilwellen, deren Amplituden jedoch vorher mit dem Kosinus der Polhöhe zu multiplizieren sind, interferieren zu lassen. Bei Existenz einer Atmosphäre erfahren alle diese Wellen weder in ihrer Phase noch in ihrer Periode, sondern nur in ihrer Amplitude eine Veränderung. Die Gleichungen dieser durch Absorption modifizierten Wellen ergeben sich analog wie bei Äquator und Pol unmittelbar aus Form (I) des Lambert'schen Gesetzes; deren algebraische Summe stellt die Interferenzwelle für die Polhöhe φ dar. Man erhält somit als Gleichung des Verlaufes der Wärmestrahlung auf einer beliebigen Breite bei Existenz einer Wärmestrahlen absorbierenden Atmosphäre

$$\left(\frac{dq}{d\odot}\right)_{\varphi} =$$

$$= A_0 e^{-\frac{\mu}{A_0}} + \sum_{1}^{\infty}{}_{\varkappa}\left(A_\varkappa e^{-\frac{\mu}{A_\varkappa\cos\varkappa\odot}}\cos\varkappa\odot + B_\varkappa e^{-\frac{\mu}{B_\varkappa\sin\varkappa\odot}}\sin\varkappa\odot\right), \qquad \text{(IV.)}$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$A_\varkappa = a_\varkappa \cos\varphi \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, \ldots r)$$

$$B_1 = \pm\left(b_1 \cos\varphi + \frac{1}{2} p \sin\varphi\right)$$

$$B_\varkappa = \pm b_\varkappa \cos\varphi \qquad (\varkappa = 2, 3, 4, \ldots r).$$

Diese Gleichung gibt das Lambert'sche Absorptionsgesetz in einer vierten Form. Diese zeichnet sich vor den anderen Formen dieses Gesetzes dadurch aus, daß sie ähnlich wie eine Fourier'sche Reihe die Kurve, welche den Verlauf der Wärmestrahlung auf einer beliebigen Breite bei Existenz einer Atmosphäre darstellt, als das Resultat einer Interferenz aus einer unendlichen Anzahl von Wellen zum Ausdrucke bringt. Diese Art der Darstellung wird dort gute Dienste leisten, wo es sich darum handelt, die Eigentümlichkeiten im Verlaufe der Wärmestrahlen in ihrer Abhängigkeit von den Elementen der Erdbahn zu studieren. Für unseren Zweck aber, nämlich für die auszuführende Integration, ist diese Form aus dem Grunde besonders geeignet, da in ihr bei den der Integration zu unterziehenden Funktionen eine möglichst einfache Form erzielt worden ist. Wendet man nämlich auf diese Funktionen die bereits eingangs dieses Kapitels gebrauchte Reihenentwicklung an, so reduziert sich die auszuführende Integration auf folgende einfache Integrale:

$$\int_{\odot_1}^{\odot_2} \frac{d\odot}{(\cos \varkappa\odot)^{r-1}} \quad \text{und} \quad \int_{\odot_1}^{\odot_2} \frac{d\odot}{(\sin \varkappa\odot)^{r-1}}.$$

Damit ist der Weg angegeben, welcher bei der Berechnung jener Wärmemengen einzuschlagen ist, welche nach Passieren der Luft auf eine beliebige Breite innerhalb einer gewissen Zeit pro Flächeneinheit auffallen. Mit Rücksicht auf das bereits in den früheren Abschnitten gegebene Bild über die Verteilung der Wärmestrahlung auf der Erdoberfläche bei Existenz einer Atmosphäre darf durch die Ableitung der vierten Form des Lambert'schen Absorptionsgesetzes das gestellte Problem für die Meteorologie als gelöst betrachtet werden. Denn die noch auszuführende Integration beansprucht nur noch ein rein mathematisches Interesse; mit ihrer Ausführung und der numerischen Berechnung der auffallenden Wärmemengen werden sich die folgenden Abschnitte beschäftigen.

Die Herstellung von Karten und Plänen auf photographischem Wege

von

Theodor Scheimpflug,

k. u. k. Hauptmann d. R. und Kapitän l. F.

(Mit 6 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 7. März 1907.)

I. Überblick über die leitenden Gesichtspunkte der Methode.

Das hier zu erläuternde Verfahren beruht auf der Auswertung von Photogrammen des Terrains zu Karten oder Plänen, unterscheidet sich aber von den bekannten photogrammetrischen Methoden wesentlich dadurch, daß diese Auswertung nicht punktweise durch Messung, Rechnung und Zeichnung erfolgt, sondern daß bei derselben die Bilder in ihrer Gänze oder zum mindesten größere Teile derselben auf einmal systematisch verändert und durch rein optische, beziehungsweise photographische Prozesse in Teile von Karten oder Plänen übergeführt werden.

Der theoretische Grundgedanke, der dem Verfahren zu Grunde liegt, läßt sich kurz dahin formulieren, daß sowohl die Photographien als die Karten ebene und projektive Bilder des Terrains sind und sich nur dadurch voneinander unterscheiden, daß im allgemeinen jedes einzelne Element der Photographie einen anderen Maßstab hat als das ihm entsprechende Element der Karte. Es muß also möglich sein, durch Prozesse, welche diese Maßstabsverschiedenheiten beseitigen, die Photographien in Karten überzuführen.

Allerdings ist der Standpunkt, von dem aus die Photographie des Terrains aufgenommen wurde, im allgemeinen ein

niedriger; es wird bei selber in der Regel nicht nur der Vordergrund viel zu groß und detailreich, der Hintergrund viel zu klein und detailarm erscheinen, sondern es wird, und das ist prinzipiell viel bedenklicher, der Vordergrund große und wichtige Partien des Hintergrundes verdecken. Was in der Photographie fehlt, aber in der Karte nicht fehlen darf, kann nur aus anderen Bildern ergänzt werden. Solange die Standpunkte niedrig sind und das Terrain nahezu enfilieren, wäre aber eine Unzahl von Bildern dazu nötig und die zu ihrer Verarbeitung nötige Mühe stände in keinem Verhältnis zum Resultat.

Erst wenn und in dem Maße, als man hohe Standpunkte wählt, wird die Sache diskutabel.

Es kommen also im weiteren nur Aufnahmen von hohen terrestrischen Standpunkten, Hochgebirgsaufnahmen und Ballonaufnahmen in Betracht.

Einfache Überlegungen zeigen, daß die Maßstabsverschiedenheiten zwischen Photographie und Karte zweierlei Art sind; und zwar ist die erste Art bedingt durch die Lage der Projektionsebene und die zweite Art bedingt durch die Plastik des Terrains.

Die Maßstabsverschiedenheiten der ersten Art sind hiebei bedeutend größer und weitaus störender als jene der zweiten Art.

I. Ist die Projektionsebene der Photographie vertikal oder geneigt, wie das gewöhnlich der Fall ist, die Projektionsebene der Karte horizontal, so ist es klar, daß das zu bedeutenden Maßstabsverschiedenheiten führen muß. Man kann in erster Annäherung, d. h. wenn man von den Maßstabsverschiedenheiten der zweiten Art vorläufig absieht, sagen, Photographie und Karte entstehen dadurch, daß ein und dasselbe den Standpunkt mit dem Objekt verbindende Strahlenbüschel von zwei Ebenen verschiedener Lage geschnitten wird. Sobald man aber an dieser Annahme festhält, können die perspektivischen Verschiedenheiten zwischen Photographie und Karte ohne Schwierigkeit mit Hilfe des vom Verfasser konstruierten Photoperspektographen (siehe »Photographische Korrespondenz«, November 1906, Nr. 554 der ganzen Folge) beseitigt werden.

Nur ist hiebei noch folgendes zu beobachten:

Bei Ballonaufnahmen hat das in Betracht kommende Strahlenbüschel beinahe stets eine solche Lage im Raume, daß ein horizontaler Schnitt durch dasselbe ein reelles Bild ergibt. Anders bei Hochgebirgsaufnahmen. Bei diesen kommt es häufig vor, daß das photographierte Objekt mindestens teilweise höher ist als der Standpunkt. Dann gibt ein horizontaler Schnitt durch das primäre Strahlenbüschel kein brauchbares Bild mehr.

Das Verfahren wird scheinbar undurchführbar.

Erst durch die Verwertung der mathematischen Beziehungen zwischen räumlich kollinearen Gebilden läßt sich diese Schwierigkeit umgehen.

E. Deville, Surveyor General of Dominion Lands, gibt in seinem Werke: »Photographic Surveying including the Elements of Descriptive Geometry and Perspective 1895« höchst elegante Konstruktionen an, um aus den Perspektivbildern (Photographien) ebener Figuren deren Horizontalprojektionen abzuleiten.

Diese Konstruktionen sind im wesentlichen Transformationen des Standpunktes, der Bildebene und der Projektionsebene.

Da sich aber jedes räumliche Gebilde durch Führung paralleler Schnitte in eine Schar ebener Figuren auflösen läßt und für diese Schar ebener Figuren die Transformationen des Standpunktes und der Bildebene stets gemeinsam sind, die Transformationen der Projektionsebenen aber in ihrer Gesamtheit eine Umformung des Originalterrains in ein zu demselben räumlich kollineares Gebilde, »das transformierte Terrain«, darstellen, so ist es leicht, die Deville'schen Konstruktionen auch für räumliche Gebilde anzuwenden und dadurch die obangedeuteten Schwierigkeiten zu überwinden.

Rein mathematisch genommen, entspricht der Photographie $1', 2', 3'$ und ihrem Standpunkte S vor der Transformation das gegebene Terrain 1, 2, 3, 4, 5, nach der Transformation entspricht dem verschobenen Standpunkte S_1 und der eventuell verschobenen Bildebene $1'\,2'\,3''$ ein transformiertes Terrain $1''\,2''\,3''\,4''\,5''$ (Fig. 1).

Das ursprünglich gegebene und das transformierte Terrain haben bei richtiger Durchführung der Deville'schen Konstruktionen die gleiche Horizontalprojektion. Denn sie sind zueinander räumlich affin und ihre Affinitätsrichtung ist die Vertikale.

Die Horizontalprojektion (Karte) der Hochgebirgslandschaft in erster Annäherung wird dadurch zum horizontalen Schnitt eines Strahlenbüschels, welches vom transformierten Standpunkte und der eventuell[1] verschobenen Photographie

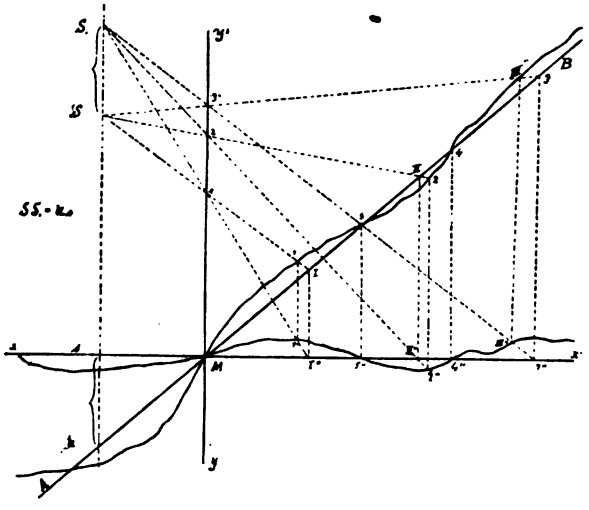


Fig. 1.

bestimmt ist. Es ist also wieder möglich, mit Hilfe des Photoperspektographen die Photographie der Hochgebirgslandschaft ohne weiteres in eine Horizontalprojektion derselben bei Vernachlässigung der Maßstabsdifferenzen zweiter Art zu transformieren.

Wurde bei der ursprünglich vollkommen freien Wahl der Ebenenschar, welche die Hochgebirgslandschaft in eine Schar

[1] In dem durch Fig. 1 dargestellten Spezialfalle bleibt die Bildebene unverrückt an ihrem Platze, was die Anschaulichkeit ungemein erhöht. Im allgemeinen muß jedoch auch die Bildebene verschoben werden.

ebener Figuren auflösen sollte, die Vorsicht gebraucht, diese Ebenen sich dem allgemeinen Verlauf des Terrains möglichst anschmiegen zu lassen (daher der Name Schmiegungsebene), so ist die Terrainplastik auch bereits in ihren Hauptzügen berücksichtigt und spielen daher die Maßstabsdifferenzen zweiter Art keine große Rolle mehr.

Betreffs der Maßstabsdifferenzen zweiter Art, welche durch die Terrainplastik bedingt sind, zeigt wieder eine einfache Überlegung, daß selbe, sobald man einmal die Photographien auf horizontale Projektionsebenen transformiert hat, d. h. die Maßstabsdifferenzen erster Art weggeschafft hat, nur mehr Funktionen des senkrechten Abstandes jedes einzelnen Terrainpunktes von der Vergleichsebene (bei Anwendung der Devilleschen Konstruktionen, von der mittleren Schmiegungsebene) sind.

Alle Terrainteile gleicher Höhe, respektive gleichen Abstandes von der Schmiegungsebene erscheinen also im gleichen Maßstabe, Terrainteile verschiedener Höhe, respektive verschiedenen Abstandes von der Schmiegungshöhe in verschiedenem Maßstabe. Was dem Standpunkte näher liegt, erscheint größer, was vom Standpunkte entfernter ist, erscheint kleiner.

Ist man also in der Lage, den Schichtenplan des Terrains (bei Anwendung der Deville'schen Konstruktionen, des transformierten Terrains) zu ermitteln, so kann man aus dem Schichtenplan auch den Maßstabfehler jeder einzelnen horizontalen Zone berechnen und durch eine photographische Reproduktion beseitigen.

Die Ermittlung dieses Schichtenplanes aus je zwei von verschiedenen Standpunkten aus aufgenommenen Bildern desselben Terrains läßt sich aber, sobald selbe einmal auf horizontale Projektionsebenen transformiert sind, ohne Schwierigkeit und mit großer Genauigkeit mit dem Stereokomparator von Dr. Pulfrich, Firma Zeiß (Jena), durchführen, worauf die Beseitigung der Maßstabdifferenzen zweiter Art ohne weiteres mit einem beliebigen photographischen Reproduktionsapparat besorgt werden kann und nur aus Gründen der Bequemlichkeit und Genauigkeit mit einem eigens hiezu konstruierten Zwillingsapparat, dem Zonentransformator, geschieht.

II. Die geodätische Orientierung der Ballonbilder und ihre Transformation in horizontierte Vogelperspektiven mit Hilfe des Photoperspektographen.

Das ganze Verfahren bliebe aber ein bloßes Luftschloß, wenn es nicht möglich wäre, die geodätische Orientierung der Ballonaufnahmen, die stets das wichtigste Rohmaterial des Verfahrens bilden werden, auf genaue und einfache Weise zu ermitteln.

Die einschlägigen Methoden, welche wir den grundlegenden Arbeiten Prof. Dr. S. Finsterwalder's, München,

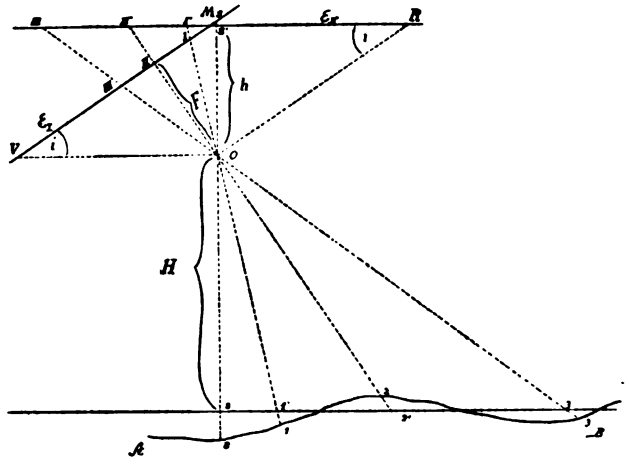


Fig. 2.

verdanken, sind, soweit sie einfach sind, wie sein graphisches Verfahren zur Ermittlung des Ballonortes nach Pothenot und seine Anwendung vom Ballonäquator herabhängender Notleinen zur Bestimmung des Nadirpunktes der Ballonphotographien, bloß Näherungsmethoden und, sobald sie die Methode der kleinsten Quadrate zu Hilfe nehmen, um die Genauigkeit der Resultate auf das unbedingt erforderliche Maß zu erhöhen, bei weitem zu mühsam und zeitraubend für die praktische Arbeit in großem Stile.

Es ist demnach von Wichtigkeit, daß der Photoperspektograph nicht bloß dazu benützt werden kann, einen ebenen

Schnitt eines Strahlenbüschels in einen anderen ebenen Schnitt desselben Strahlenbüschels überzuführen, sondern auch dazu dienen kann, die Ballonbilder genauestens zu orientieren.

Zur Erläuterung dieser beiden Funktionen des Photoperspektographen dienen die Figuren 2 und 3.

Fig. 2 zeigt die geometrischen Beziehungen des Objektes AB (des Terrains) des mit der Neigung i aufgenommenen Originalbildes E_I und der horizontierten Vogelperspektive E_{II} zur Brennweite F des bei der Aufnahme verwendeten Objektives, zur

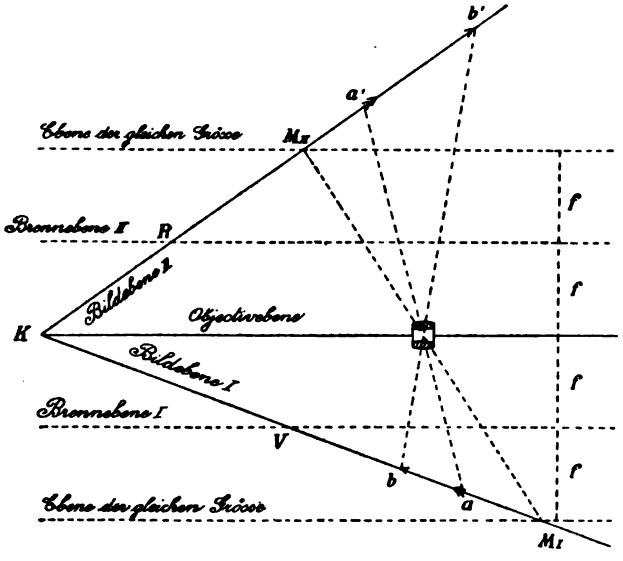


Fig. 3.

Höhe H des Standpunktes und zu der für den Maßstab der Transformation maßgebenden Fokaldistanz k der horizontierten Vogelperspektive.

Fig. 3 zeigt die geometrischen Beziehungen der Originalaufnahme ab (E_1) und der horizontierten Vogelperspektive $a'b'$ (E_2) zur Brennweite f des in dem Photoperspektographen eingebauten Reproduktionsobjektives.

Die Schnittgerade oder das gemeinsame Element $M(M_I, M_{II})$ beider Bilder sowie die Horizontlinie oder Fluchtgerade V der Originalaufnahme ab (E_1) und die Verschwindungsgerade der

Bildränder oder kurzweg Fluchtgerade R der horizontierten Vogelperspektive $a'b'$ (E_{II}) finden sich in beiden Figuren.

Macht man mit einem Objektiv beliebiger Brennweite F mit beliebiger Neigung i des Apparates eine Ballonaufnahme, so ist die Lage der Horizontlinie oder Fluchtgeraden V der Originalaufnahme, d. h. der Schnittgeraden der durch das Objektiv gelegten Horizontalebene mit der Bildebene, bereits durch F und i bestimmt.

Weiters bestimmen der optische Mittelpunkt O des Objektives und die Photographie zusammen ein Strahlenbüschel

$$O\begin{cases} s \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{cases}$$

Schneidet man dasselbe in beliebigem Abstand h von O durch eine Horizontalebene, so ist es klar, daß der Maßstab der dadurch entstehenden Schnittfigur, der horizontierten Vogelperspektive, von der Größe h abhängen wird. Aber nicht nur der Maßstab der horizontierten Vogelperspektive, sondern auch die Lage der Schnittgeraden M derselben mit der Originalaufnahme auf letzterer, d. h. der Abstand MV des gemeinsamen Elementes M von der Horizontlinie oder Fluchtgeraden V ist von h abhängig. Dagegen ist die analoge Größe MR auf der horizontierten Vogelperspektive von h völlig unabhängig. Man vergleiche die Formeln:

$$MR = OV = \frac{F}{\sin i} \quad \text{und} \quad MV = OR = \frac{h}{\sin i}.$$

Jedenfalls sind in einem gegebenen Falle durch die Größen F, i und h auch die Abstände MV und MR völlig eindeutig bestimmt.

Hat man mit Hilfe des Photoperspektographen die Überführung der Originalaufnahme in die horizontierte Vogelperspektive tatsächlich durchzuführen, so müssen die beiderseitigen Fluchtgeraden V und R in die Gegenachsen des Apparates zu liegen kommen, weil sie nur dann, wie es sein soll, in die Unendlichkeit projiziert werden, dagegen muß das

gemeinsame Element M (M_I, M_{II}) beider Bilder in die beiden Ebenen der doppelten Brennweite f zu liegen kommen, weil nur dort eine Abbildung in natürlicher Größe stattfindet. Da aber die Brennweite f des Reproduktionsobjektives des Photoperspektographen eine bestimmte unveränderliche Größe hat, so sagen uns die Gleichungen $MV \sin \alpha = f = MR \sin \beta$, daß die Neigungswinkel α und β, welche Original und Transformation mit der Objektivebene einzuschließen haben, durch die Größen MV und MR bereits bestimmt sind. Da aber weiters im Sinne der Theorie der schiefen Abbildung (siehe »Photographische Korrespondenz«, November 1906, Nr. 554 der ganzen Folge) die beiden Bildebenen und die beiden Gegenebenen ein Parallelopiped bilden müssen, so ist die Lage der beiden Bilder im Apparat genauestens festgelegt.

Die Größen MV und MR können an eigenen Teilungen des Photoperspektographen eingestellt, beziehungsweise abgelesen werden.

Sind in einem bestimmten Falle F, i und h gegeben, so können MV und MR, α und β berechnet und darnach die Einstellungen am Apparat bewerkstelligt werden.

Ist dagegen, wie es wohl die Regel sein wird, bloß die Brennweite F des Aufnahmsobjektives und das Maßstabsverhältnis $d:D$ der gewünschten Karte zur Natur bekannt, dagegen i und h unbekannt, so genügt es, die genaue Lage von drei Punkten 1, 2, 3 der Natur, die sich auf der Ballonphotographie gut identifizieren lassen, zu kennen und im Maßstabe $d:D$ in perspektivischer Projektion auf der Mattscheibe des Photoperspektographen aufzutragen und die Originalphotographie mit ihren drei identen Bildpunkten auf diese drei vorgezeichneten Fixpunkte zu projizieren. Eine größere Anzahl identer Bildpunkte, respektive bekannter Fixpunkte gewährt erwünschte Kontrollen, ohne die aufzuwendende Arbeit wesentlich zu steigern, im Gegensatze zu der in ähnlichen Fällen sonst angewendeten Methode der kleinsten Quadrate.

Nachdem die identen Bildpunkte I, II, III der Originalaufnahme hiebei mit den auf der Mattscheibe vorgezeichneten Fixpunkten $I' II'' III'''$ optisch zur Deckung gebracht werden, ist das hier angedeutete Verfahren einer großen Genauigkeit

fähig. Es werde fernerhin als die Methode der »optischen Koinzidenz« bezeichnet.

Die Lesungen für die Größen MV und MR, die nach erfolgter optischer Koinzidenz der Apparat ergibt, gestatten nach den Formeln:

$$\sin i = \frac{F}{MR}$$

$$MV \sin i = \frac{MV}{MR} F = h$$

$$MV \cos i = S'R$$

$$h : H = d : D$$

die Ermittlung des Neigungswinkels i der Originalaufnahme,
der Fokaldistanz h der horizontierten Vogelperspektive,
der Höhe H des Ballonortes,
des Bildes S' des Ballonortes in der horizontierten Vogelperspektive im Fußpunkte des Lotes vom optischen Mittelpunkt O auf dieselbe.

Durch Identifikation dieses Bildpunktes S' in der Natur findet sich dann die Horizontalprojektion des Ballonortes s.

Sind solcherart die Originalaufnahmen sämtlich geodätisch orientiert und in horizontierte Vogelperspektiven transformiert, so ist zum Zwecke der Wegschaffung der Maßstabfehler zweiter Art, welche durch die Terrainplastik bedingt werden, ein genauer Schichtenplan des Terrains zu entwerfen.

III. Die Ermittlung des genauen Schichtenplanes des Terrains aus den horizontierten und geodätisch orientierten Vogelperspektiven. Über die Verwendung des Stereokomparators hiezu.

A. Ermittlung des Schichtenplanes ohne besondere instrumentelle Hilfsmittel.

Es wird angenommen, daß die Ballonaufnahmen gegen ein genau eingemessenes Netz identer und auf die Mattscheibe des Photoperspektographen im gewollten Maßstab der

Karte aufgetragener Terrainpunkte horizontiert und geodätisch orientiert wurden.

Die Bilder sind somit bereits sämtlich auf den gleichen Maßstab, d. h. auf den Maßstab des gegebenen Punktnetzes gebracht. Die Ballonörter sind durch optische Koinzidenz genau bestimmt. Die Bilder sind streng und nicht bloß genähert horizontal, was eventuell dadurch mit Hilfe der Hauck'schen Kernpunkte kontrolliert werden kann, daß man aus den bekannten Ballonörtern die Lage der Kernpunkte auf jedem Bilde berechnet, für eine Anzahl identer Punkte die Kernstrahlen zieht und nachsieht, ob die so entstehenden Strahlenbüschel zusammengehöriger Bilder sich decken. Da nämlich die Bilder sämtlich durch optische Koinzidenz nicht nur horizontiert, sondern auf denselben Maßstab reduziert wurden, so liegen sie alle in einer Ebene. Für zwei Bilder aber, die in derselben Ebene liegen, fallen die beiden Kernpunkte zusammen und decken sich die zusammengehörigen Kernstrahlen.

Diese Kontrolle wird am besten rechnerisch durchgeführt. Grobe Fehler sind zu beseitigen, kleine Fehler eventuell empirisch auszugleichen.

Um die Bilder weiter verarbeiten zu können, bezieht man jetzt jedes derselben auf ein dreiachsiges Koordinatensystem durch die Horizontalprojektion des Ballonortes als Ursprung.

Man kann hiezu entweder die Verbindungslinie der beiden Ballonörter (Basis) als Abszissenachse (x-Achse), die Senkrechte darauf als Ordinatenachse (Y-Achse), das Lot auf die Bildebene im Ballonort als z-Achse wählen; oder man kann die Ost—West-Linie als Abszissenachse (x-Achse), die Nord—Süd-Linie als Ordinatenachse (y-Achse) und wieder das Lot im Ballonort als z-Achse benützen. Das erstere dürfte bei einer geringen Anzahl von Bildern, das letztere bei einem umfangreichen Bildermaterial das Vorteilhaftere sein.

Nachdem unter B bei der Verwendung des Stereokomparators vorwiegend der erstere Fall Besprechung finden wird, beide Arbeitsmethoden jedoch gleichwertig sind, sei hier dem zweiten Arbeitsvorgange die größere Aufmerksamkeit zugewendet.

Die Lage der Nord—Süd-Linie kann aus dem Triangulierungsnetz ermittelt und mit Hilfe der in jedem Bilde ent-

haltenen Triangulierungspunkte in die Bilder übertragen und an den Bildrändern durch Marken festgelegt werden. Die Nord—Süd- und Ost—West-Linie werden dabei am besten bei jedem Bilde durch den Fußpunkt des Lotes vom Ballonort gelegt.

Dann ist der senkrechte Abstand der Nord—Süd-Linien zweier Aufnahmen $\Delta X = \frac{a}{V}$, wobei $a = \Delta\lambda \cos\varphi$ die Längenabweichung der beiden Ballonörter ist.

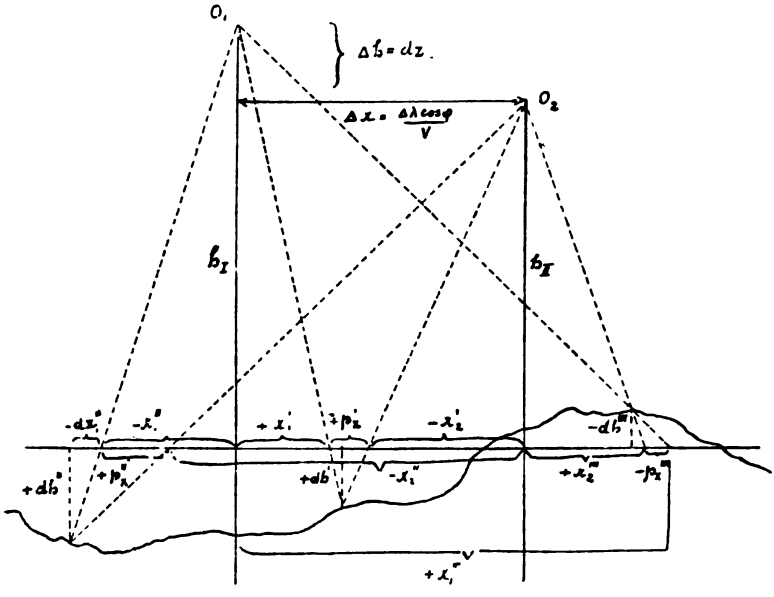


Fig. 4.

Weiters ist der senkrechte Abstand der Ost—West-Linien zweier Aufnahmen $\Delta y = \frac{\Delta\varphi}{V}$, wobei $\Delta\varphi$ der Breitenunterschied der beiden Ballonörter ist.

Endlich ist noch $\Delta z = \Delta h$ von Wichtigkeit. Aus der Proportion $H : h = D : d$ folgt, wenn $V = \frac{d}{D}$ und das Verjüngungsverhältnis V, wie vorausgesetzt, bekannt ist, $V = \frac{h}{H}$ und weiters auch $V = \frac{\Delta h}{\Delta H}$.

ΔH ist der Höhenunterschied der Ballonörter in der Natur, $\frac{\Delta H}{V} = \Delta h = \Delta z$ ist der verjüngte Höhenunterschied der Projektionszentra der verwendeten Bilder,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\Delta\varphi}{V} &= \Delta y = y_1 - y_2 + p_y \\ \frac{a}{V} = \frac{\Delta\lambda \cos\rho}{V} &= \Delta x = x_1 - x_2 + p_x \end{aligned}\right\}$$

sind die Koordinatenunterschiede der beiden Ballonörter.

(Die Zeichen von $x_1, x_2, y_1, y_2, dx, dy, p_x$ und p_y sind algebraisch zu nehmen.)

$$p_x = dx_1 - dx_2$$

$$p_y = dy_1 - dy_2$$

$$dh : h_1 = dx_1 : x_1 \qquad dh = h_1 \frac{dx_1}{x_1}$$

$$dh : h_2 = dx_2 : x_2 \qquad dh = h_2 \frac{dx_2}{x_2}$$

$$h_1 \frac{dx_1}{x_1} = h_2 \frac{dx_2}{x_2}$$

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{h_2 x_1}{h_1 x_2}$$

$$\underbrace{(dx_1 - dx_2)}_{p_x} : dx_1 : dx_2 = (h_2 x_1 - h_1 x_2) : h_2 x_1 : h_1 x_2$$

$$dx_1 = \frac{p_x h_2 x_1}{h_2 x_1 - h_1 x_2}$$

$$dx_2 = \frac{p_x h_1 x_2}{h_2 x_1 - h_1 x_2}$$

$$dh = \frac{p_x h_1 h_2}{h_2 x_1 - h_1 x_2} = \frac{p_y h_1 h_2}{h_2 y_1 - h_1 y_2}$$

$$\underbrace{(dy_1 - dy_2)}_{p_y} : dy_1 : dy_2 = (h_2 y_1 - h_1 y_2) : h_2 y_1 : h_1 y_2$$

$$dy_1 = \frac{p_y h_2 y_1}{h_2 y_1 - h_1 y_2}$$

$$dy_2 = \frac{p_y h_1 y_2}{h_2 y_1 - h_1 y_2}.$$

Durch diese sechs Formeln sind die Raumkoordinaten jedes einzelnen Terrainpunktes aus den Bildern leicht bestimmbar. Das setzt stillschweigend voraus, daß die sieben Seitenbilder des Ballonapparates[1] mit dem Mittelbilde zu einem Gesamtbilde vereinigt wurden oder wenigstens sämtliche Seitenbilder jedes für sich je nach Anwendung von Arbeitsvorgang 1 oder 2 entweder gegen die Basis (Verbindungslinie der beiden Ballonörter) oder gegen die Nord—Süd- und Ost—West-Linie orientiert und die Koordinatendifferenzen der Hauptpunkte der Seitenbilder gegen den Ballonort genauestens ermittelt wurden.

B. Ermittlung des Schichtenplanes mit Hilfe des Stereokomparators.

Der Stereokomparator von Dr. C. Pulfrich (siehe dessen Broschüre: »Neue stereoskopische Methoden und Apparate für die Zwecke der Astronomie, Topographie und Metronomie«) ist ein Instrument, welches eine logische Fortbildung und sinngemäße Ergänzung des stereoskopischen Entfernungsmessers der Firma Zeiß in Jena darstellt und dazu dient, das Prinzip der stereoskopischen Distanzmessung auf photographische Bilder anzuwenden.

In der Form, in der er heute von der Firma Zeiß hergestellt wird, ist er ein wissenschaftliches Präzisionsinstrument ersten Ranges. Fig. 5, zu welcher die Firma Zeiss das Klisché gütigst zur Verfügung stellte, zeigt seinen Aufbau.

Die beiden Stereoskopbilder (Glasbilder, nach Belieben Negative oder Positive) werden in ihre Halter geklemmt und können gemeinsam mittels des Triebes *H* nach rechts und links bewegt werden, während das am Träger *T* befestigte Mikroskop mittels des Triebes *V* nach auf- und abwärts bewegt werden kann.

Beide Platten sind bei den neueren hier in Betracht kommenden Apparaten auf Drehscheiben und Kreuzschlitten

---

[1] Siehe Photographische Korrespondenz, 1903. Scheimpflug, Über österreichische Versuche, Ballonaufnahmen geodätisch zu verwerten, und deren bisherige Resultate.

montiert. Es liegt aber die Drehscheibe der rechten Platte P_2 auf dem Kreuzschlitten und macht alle Bewegungen desselben mit, während links die Platte P_1 im Kreuzschlitten liegt und mit diesem Kreuzschlitten auf der Drehscheibe montiert ist und daher der Kreuzschlitten alle Bewegungen der Drehscheibe mitmacht.

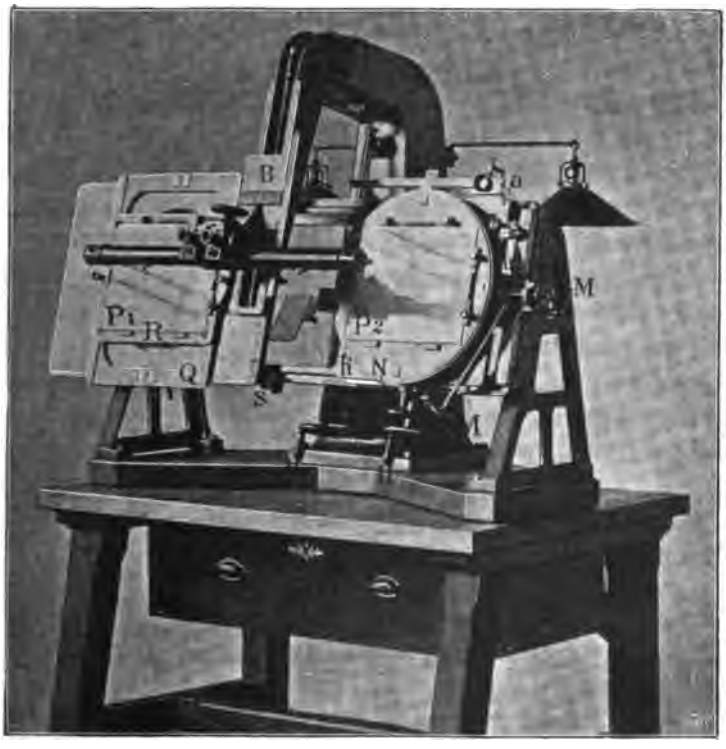


Fig. 5.

Durch die Schraube M, welche zum rechtsseitigen Kreuzschlitten gehört, können die Abstände der beiden Drehscheibenmittelpunkte voneinander verändert werden und dient die Teilung a, die sogenannte Parallaxenteilung, dazu, diese Veränderungen zu messen.

Dagegen lassen sich die Abszissen M und Ordinaten N der linken Platte P_1 am Abszissenmaßstab A und am Ordi-

natenmaßstab B ablesen, welche dazu dienen, die durch die Triebe H und V bedingten Verschiebungen zu messen.

Den Strahlengang des Mikroskops, das 4—6—8fache Vergrößerungen hat, zeigt Fig. 6.

In der Fadenkreuzebene des linken Mikroskops ist eine fixe, in der Fadenkreuzebene des rechten Mikroskops ist eine bewegliche, mit Hilfe einer Mikrometerschraube verschiebbare Marke eingesetzt.

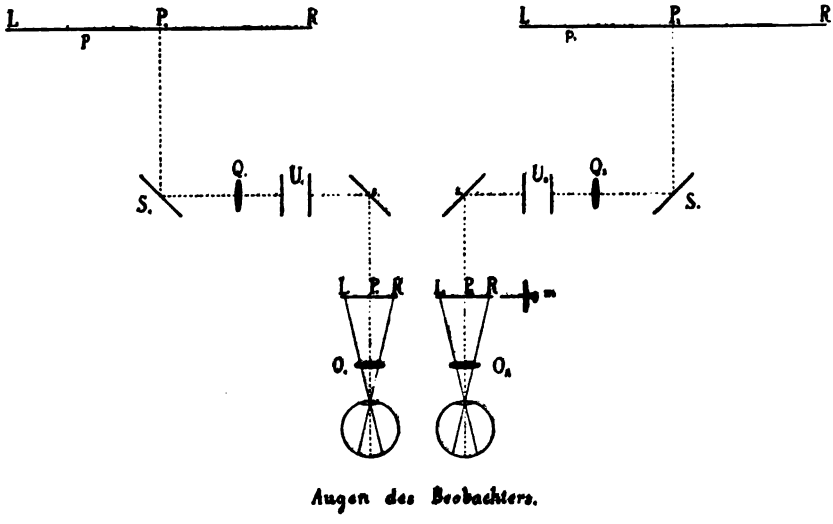


Fig. 6.

Strahlengang im Mikroskopstereoskop.

Die Bilder der beiden Marken vereinigen sich für den Beobachter im binokularen Sehen zu einer einzigen, der sogenannten wandernden Marke, welche in das Gesichtsfeld des Instrumentes (Terrain) hinausprojiziert ist und welche je nach der Stellung, die die bewegliche Marke momentan im rechten Mikroskop einnimmt, ihre scheinbare Distanz vom Beschauer ändert.

Steht die rechte Marke, ebenso wie die linke, im Kreuzungspunkte der Fäden, so scheint die wandernde Marke in die Unendlichkeit zu rücken, d. h. sie entspricht der Lage von Punkten, die so weit sind, daß man ihre Distanz nicht

mehr messen kann. Verrückungen der beweglichen Marke aus dem Kreuzungspunkte der Fäden heraus nach links bewirken ein scheinbares Näherkommen der wandernden Marke im Terrain und stehen die Verschiebungen der Marke im Mikroskop mit den Bewegungen der wandernden Marke im Terrain in einem gesetzmäßigen Zusammenhange.

Verschiebungen der beweglichen Marke nach rechts sieht der Beobachter als ein scheinbares Fernerrücken der wandernden Marke im Terrain. Überschreitet hiebei die bewegliche Marke den Vertikalfaden, indem sie auf die rechte Seite desselben tritt, so würde das rein geometrisch einer wandernden Marke entsprechen, die aus der Unendlichkeit dem Beobachter von rückwärts näher kommt. Nach rückwärts aber sieht man bekanntlich nicht. Offenbar aus rein physiologischen Gründen, die auch bei verschiedenen Beobachtern sehr verschieden sein dürften, bemerkt das Auge des Beobachters den Fehler nicht immer gleich. Blickt man aber auf und sieht dann mit ausgeruhtem Auge wieder ins Instrument, so sieht man die Marke doppelt, d. h. sowohl die fixe als die bewegliche Marke getrennt, und nicht mehr körperlich zur wandernden Marke vereint.

Wichtig ist noch die merkwürdige Erscheinung, daß es für den Effekt gleichgültig ist, ob die photographischen Bilder stehen und die Marke im Mikroskop bewegt wird oder ob die Marke im Mikroskop steht und die photographischen Bilder bewegt werden.

In der Praxis benützt man das dazu, sich von dem beschränkten Gesichtsfelde des Mikroskops unabhängig zu machen, indem man große Bewegungen mit der Platte P_2 durchführt und auf der Parallaxenteilung a des Instrumentes mißt und nur kleine Bewegungen (Differenzmessungen) mit der Mikrometerschraube der Marke durchführt und an der Mikrometerteilung abliest.

Die Erfahrung hat weiters gezeigt, daß bei plastischen Gebilden die Basis, d. h. der Abstand der beiden Aufnahmsstandpunkte im Verhältnis zur Entfernung des Objektes (d. h. der sogenannte Winkel am Objekt oder die Parallaxe des Objektes oder mit noch anderen Worten der Winkel, unter

welchem die beiden Aufnahmsstandpunkte vom Objekt aus gesehen werden), nicht zu groß gewählt werden darf. Das Objekt wird sonst von zu verschiedenen Seiten angesehen und lassen sich dann, weil das auf den beiden Bildern Enthaltene nicht mehr leicht identifiziert werden kann, die beiden ebenen Ansichten nicht mehr gut zu einem räumlichen Bild vereinigen.

Das ist bei Ballonaufnahmen wichtig, wo man versucht sein könnte, um Platten zu sparen, zu große Aufnahmsdistanzen zu wählen.

Da aber andrerseits das Terrain in der Regel eine relativ zur Ballonhöhe geringe Plastik zeigt, braucht man wieder, wenn man nicht gerade Hochgebirge unter sich hat, diesbezüglich nicht allzu ängstlich zu sein.

Eine mittlere Horizontaldistanz der einzelnen Ballonörter gleich der mittleren Ballonhöhe wird vielleicht das Richtige sein. Bleibt man aber mit der Horizontaldistanz innerhalb 60% der Ballonhöhe, so erleichtert das die gegenseitige Orientierung der Bilder im Stereokomparator ungemein, weil dann stets die Ballonörter der Nachbaraufnahmen noch auf das Mittelbild fallen. Die Parallaxe ist in diesem Falle zirka 30°.

Zweitens ist beim Stereokomparator aus praktisch-konstruktiven Gründen die Bedingung zu erfüllen, daß die beiden verwendeten Bilder bei der Aufnahme in einer Ebene liegen oder nachträglich auf eine Ebene reduziert werden, weil dieses Instrument nur für diesen einfachen Spezialfall, d. h. für die stereoskopische Ausmessung von Bilderpaaren, die in einer Ebene liegen, gebaut ist.

Dieser Bedingung ist durch die Orientierung der Ballonbilder in eine Horizontalebene und auf gleichen Maßstab durch optische Koinzidenz bereits Genüge geleistet. Jedoch empfiehlt es sich, die Richtigkeit und Genauigkeit der Durchführung dieser Orientierung dadurch zu kontrollieren, daß man, wie schon in diesem Kapitel sub *A* gezeigt wurde, nachsieht, ob die Kernstrahlenbüschel der beiden zu vergleichenden Bilder sich decken.

Allerdings verursacht die Erdkrümmung (Kugelgestalt der Erde) einen systematischen Fehler, welcher durch die Strahlen-

brechung bloß um ein Geringes vermindert wird. Der ungefähre Betrag der Summe beider Einflüsse ist

$$\delta \text{ (Bogenminuten)} = {}^{12}/_{13}\, B \text{ (Seemeilen)},$$

wenn B die Horizontaldistanz der Ballonörter, in Seemeilen ausgedrückt, ist.

Nach Oberst v. Hübl beseitigt man diese Verschwenkung am besten durch eine Verschiebung der Ordinatenachse der rechten Platte p_2 um den Betrag $v^{mm} = h_2{}^{mm}\,\delta'$, wenn h_2 die Bildweite des rechten Bildes ist.

Die dritte Bedingung für die Verwendung des Stereokomparators, daß die beiden Bilder gleiche Bildweiten haben sollen, ist zwar ursprünglich, wenn die zu vergleichenden Aufnahmen nacheinander mit demselben Apparat ausgeführt wurden, streng erfüllt, jedoch wird die Reduktion der Ballonbilder in eine und dieselbe Horizontalebene und auf gleichen Maßstab in der Regel nicht möglich sein, ohne die Bildweiten ungleich zu machen, weil die Ballonhöhe in der Praxis nicht konstant erhalten werden kann. Infolgedessen ist diese Bedingung im vorliegenden Falle nicht erfüllbar.

Man könnte nun zwar das von Prof. Karl Fuchs, Preßburg (siehe Mitteilungen des k. u. k. militärgeographischen Instituts, XXIV. Bd., 1904), angegebene Verfahren anwenden, müßte aber dann die Bilder, die bereits in einer Ebene liegen, wieder auf gleiche Bildweiten umphotographieren. Das scheint nicht praktisch zu sein.

Oder aber man stützt sich auf dieselben geometrischen Grundlagen, die bereits sub A entwickelt wurden.

Da muß man sich aber vorher vergewissern, ob das überhaupt tunlich und in welcher Weise dann die Arbeit durchführbar ist.

Streng genommen, dient der Stereokomparator bloß dazu, bei zwei zusammengehörigen Bildern die Lagenverschiedenheiten (Koordinatendifferenzen) identer Bildpunkte auf das genaueste zu ermitteln.

Hat man zwei Bilder, welche sowohl die gleichen Bildweiten haben als auch bei ihrer Aufnahme in einer Ebene gelegen waren, so bestimmen die Koordinatendifferenzen a identer Bildpunkte im Verein mit der bekannten Bildweite f

stets ganz unzweideutig die Parallaxe, d. h. den Winkel, unter welchem die beiden Aufnahmsstandpunkte von dem in Frage kommenden Terrainpunkte aus gesehen wurden.

Deshalb nennt Dr. Pulfrich auch die auf den Bildern gemessenen, in die Richtung der Verbindungslinie der Mikroskop-Okulare des Stereokomparators fallenden Koordinatendifferenzen identer Bildpunkte schlechtweg Parallaxen und bestimmt aus ihnen mit der Formel $D = \frac{Bf}{a}$ die Distanzen der einzumessenden Punkte von der Basis B der Verbindungslinie der Aufnahmsstandpunkte (Objektive).

Sobald aber die Bildweiten verschieden sind, bestimmen besagte Koordinatendifferenzen der identen Bildpunkte nicht mehr die oben definierte Parallaxe, ermöglichen aber noch immer eine sehr genaue Ermittlung der Distanzen der einzelnen Terrainpunkte.

Im Falle ungleicher Bildweiten, jedoch in eine Ebene fallender Bilder sind die geometrischen Orte aller identen Bildpunktpaare gleicher Koordinatendifferenzen Zylinderflächen, deren Erzeugende senkrecht auf der durch die optischen Achsen der beiden Objektive gelegten Ebene stehen und deren Leitlinien durch eine Schar äußerst schwach gekrümmter, Geraden ungemein nahekommender Hyperbelstücke dargestellt werden.

Nur in der Nähe des gemeinsamen Kernstrahles treten starke Krümmungen auf. Auch wird dort wegen der spitzen Winkel am Objekt (schiefen Schnitte) die Punktbestimmung sehr ungenau. Die Umgebung des Kernpunktes ist daher aus anderen Bildern zu bearbeiten, was bei dachziegelartigem Übergreifen der Bilder stets möglich sein wird.

Hiebei zerfallen im Sinne der in A entwickelten Formeln die Koordinatendifferenzen in zwei Teile, einen größeren konstanten Teil $\frac{B}{V}$, welcher der gewählten Vergleichsebene entspricht, und einen bei weitem kleineren variablen Teil p, welcher eine Funktion der senkrechten Abstände der einzelnen Terrainpunkte von der Vergleichsebene ist, für die Vergleichsebene selbst Null wird und für jede der in der Figur angedeuteten Zylinderflächen einen konstanten Wert annimmt.

Man kann also den großen konstanten Wert $\frac{B}{V}$ ein- für allemal durch die Einstellung der Parallaxenteilung am Instrumente berücksichtigen und den kleinen variablen Wert p mikrometrisch mit Hilfe der wandernden Marke ausmessen und nach den bereits in A gegebenen Formeln die Lage der einzelnen Terrainpunkte bestimmen.

Praktisch gestaltet sich dabei die Arbeit wie folgt:

Das Vorrichten und Justieren der Platten.

Man beginnt mit den Mittelplatten der beiden Aufnahmen und identifiziert gegenseitig die Ballonörter, welche, wenn die zwischen den beiden Aufnahmen durchfahrene Distanz (Basis B) nicht zu groß ist, $B \gtrless 0{\cdot}6\,H$ auf beiden Mittelbildern aufzufinden sein müssen. Bekanntlich ist der Stereokomparator zu derartigen Identifikationen zusammengehöriger Bildpunkte auf zwei Bildern ganz besonders geeignet.

Man dreht jetzt jede der beiden Platten so, daß die beiden Ballonörter beim Hin- und Herbewegen der Bilder mit dem Trieb H die Meßmarke passieren, und reißt endlich mit einer zu diesem Zwecke am Instrument angebrachten, in der Ebene der beiden optischen Achsen der Mikroskope liegenden Nadel an den Plattenrändern deutlich sichtbare Marken in die Schicht der beiden Platten.

Um die Richtung der Basis jetzt auch auf den Seitenbildern zu markieren, beläßt man das Mittelbild der einen Aufnahme als rechte Platte P_2 am Stereokomparator und kombiniert es mit einem der Seitenbilder derselben Aufnahme als linke Platte P_1.

Man macht jetzt einen markanten Bildpunkt, den das Mittel- und Seitenbild gemeinsam haben, also einen Punkt ihrer bei der Konstruktion des Ballonapparates vorgesehenen Überdeckung, zum Gegenstande der Aufmerksamkeit.

Man stellt die Meßmarke auf Unendlich, bringt das Seitenbild P_1 mit dem ausgewählten Bildpunkt über den Mittelpunkt der Drehscheibe (das geschieht mit dem links über der Drehscheibe angeordneten Kreuzschlitten und wird durch Drehungen

der Drehscheibe, bei welchen besagter Objektpunkt stehen bleiben muß, geprüft). Sodann bringt man diesen Bildpunkt mit Hilfe der Triebe V und H mit der Meßmarke des linken Mikroskops zur Deckung.

Jetzt bringt man den identen Bildpunkt der rechten Platte P_2 (des Mittelbildes) mit Hilfe des rechten Kreuzschlittens mit der Meßmarke des rechten Mikroskops zur Deckung.

Sodann wählt man einen zweiten markanten Punkt der Überdeckung, welcher möglichst weit vom ersten entfernt ist, und bringt lediglich mit Hilfe der Triebe H und V, jedoch ohne einen der beiden Kreuzschlitten oder die rechte Drehscheibe zu berühren, das Bild dieses Punktes auf der rechten Platte P_2 mit der Meßmarke des rechten Mikroskops zur Deckung.

Sonach bringt man lediglich mit Benützung der linken Drehscheibe, jedoch ohne einen Kreuzschlitten, die rechte Drehscheibe oder die Triebe H und V anzurühren, das Bild des besagten Punktes auf der linken Platte P_2 mit der Meßmarke des linken Mikroskops zur Deckung. Ist das geschehen, so sollen sämtliche Punkte der Überdeckung beider Bilder mit der auf Unendlich eingestellten »wandernden Marke« in gleicher Entfernung erscheinen und bei Benützung der Triebe H und V stets idente Punkte an die Meßmarken der Mikroskope kommen.

Sobald das zutrifft, hat das Seitenbild den gleichen Positionswinkel wie das Mittelbild. Nachdem aber laut Voraussetzung das Mittelbild mit seiner Basisrichtung parallel zur Verbindungslinie der beiden Mikroskopokulare gestellt war (die Meßmarke passierte bei der Bewegung des Triebes H die beiden Ballonörter und die in die Schicht eingerissenen Basismarken), so ist jetzt auch das Seitenbild so eingestellt, daß seine Basisrichtung parallel zur Verbindungslinie der Okulare steht. Man hebt oder senkt jetzt das Mikroskop so weit, bis seine Meßmarke beim Hin- und Herbewegen der Bilder mit dem Trieb H den durch die einkopierten Rahmenmarken definierten Hauptpunkt der Seitenbilder ungefähr passiert, und reißt jetzt mit der schon erwähnten Nadel entsprechende Marken in die Schichtseite der Ränder der Seitenbilder.

Damit ist auf diesem Bilde die Basisrichtung festgelegt.

Dasselbe macht man mit allen übrigen Seitenbildern dieser Aufnahme.

Dann wechselt man die Mittelbilder, stellt das neue Mittelbild wieder so ein, daß die Meßmarke beim Bewegen der Platten mittels des Triebes H die beiden Ballonörter passiert, und orientiert in der soeben beschriebenen Weise alle zu diesem Mittelbilde gehörigen Seitenbilder; u. s. f. für alle Aufnahmen.

Sobald dies mit den Bildern geschehen ist, und zwar mit jeder Aufnahme bezüglich aller Nachbaraufnahmen, mit denen sie verglichen werden soll, so beginnt die Justierung zweier zu vergleichender Bilder stets damit, daß man sie mittels der Drehscheiben derart im Apparat orientiert, daß beim Hin- und Herbewegen der Platten mit dem Trieb H die Meßmarken des Mikroskops die Basismarken an den Bildrändern passieren. Sodann stellt man die rechte Platte P_2 stets gleich auf den Teilstrich $\frac{B}{V}$ des Parallaxenmaßstabes.

Hierauf sucht man einen der eingemessenen Kontrollpunkte heraus, mittels deren die Bilder durch optische Koinzidenz horizontiert worden waren, berechnet den senkrechten Abstand dh desselben von der Vergleichsebene, mißt am linken Bilde die Abszisse M, am rechten Bilde die Abszisse N des Bildpunktes, berechnet p mit der Formel $p = \frac{dh(h_2 M - h_1 N)}{h_1 h_2}$ und stellt p auf der Mikrometerteilung ein.

Jetzt bringt man mittels der Triebe H und V, also durch Verschieben beider Platten, das Bild des Kontrollpunktes auf der rechten Platte an die Meßmarke des rechten Mikroskops und verschiebt mittels des linken Kreuzschlittens die linke Platte P_1 so lange, bis das stereoskopische Bild mit der bereits eingestellten Meßmarke gleich weit zu sein scheint.

Die so gewonnene Einstellung kontrolliert man noch mit Hilfe der anderen auf beiden Platten etwa vorhandenen Kontrollpunkte und beseitigt eventuell übriggebliebene Fehler.

Stimmt endlich die Probe, so sind die Platten richtig justiert und kann die Ausmessung beginnen.

Das Ausmessen der Platten.

Das Ziel der Arbeit ist die Herstellung eines möglichst genauen Schichtenplanes sowohl in perspektivischer als in orthogonaler Projektion für die Ausdehnung der linken Platte P_1. Wie die Formeln

$$dh = \frac{p h_1 h_2}{h_2 M - h_1 N}$$

$$dM = \frac{p h_2 M}{h_2 M - h_1 N}$$

$$dR = R \frac{dh}{h_1}$$

zeigen, sind die senkrechten Abstände dh der einzelnen Terrainpunkte von der Vergleichsebene ebenso wie die Abszissendifferenzen dM und die Ordinatendifferenzen dR der einzelnen Bildpunkte des linken Bildes zwischen der perspektivischen und orthogonalen Projektion von den drei Veränderlichen M, N und p abhängig.

Es ist aber $M - N + p = \frac{B}{V}$. Man kann also eine von ihnen, am besten N, weil am Apparat nicht direkt ablesbar, eliminieren (N ist die Abszisse des Bildpunktes am rechten Bilde P_2).

Arbeitet man weiter nach M-Profilen, d. h. stellt man die linke Platte P_1 auf eine bestimmte Abszisse M ein und mißt nacheinander alle Terrainpunkte aus, welche das gleiche M haben oder, was dasselbe ist, die auf der gleichen M-Ordinate liegen, so nehmen die Formeln für ein derartiges Profil die Form an:

$$\frac{dh}{h_1} = \frac{dM}{M} = \frac{dR}{R} = \frac{p h_2}{h_2 M - h_1 N} = pU.$$

Man findet also für jeden einzelnen Punkt die Verbesserungen.

$dh = pUh_1$ als senkrechten Abstand des Terrainpunktes von der Vergleichsebene;

$dM = pUM$ als Abszissendifferenz ein und desselben Bildpunktes in der perspektivischen und orthogonalen Projektion;

$dR = pUR$ als Ordinatendifferenz ein und desselben Bildpunktes in der perspektivischen und orthogonalen Projektion.

Man hätte also dann die Ausmessung derart vorzunehmen, daß man erstens die Platte P_2 auf den Teilstrich $\frac{B}{V}$ der Parallaxenteilung stellt, beide Platten gemeinsam so einstellt, daß die Platte P_1 auf den Teilstrich M des Abszissenmaßstabes so lange stehen bleibt, bis die ganze Ordinate ausgemessen ist, und jetzt mit dem Trieb V das Mikroskop längs des Bildes vertikal nach auf- oder abwärts bewegt und sukzessive für verschiedene Werte der Abszissen R die Größe p mit Hilfe der wandernden Marke und der Mikrometerteilung am Mikroskop ausmißt.

Diese Messungsresultate lassen sich dann leicht in eine Tabelle folgender Form bringen:

	M_1	M_2	M_3	M_4	
R_1	p				
	N				
	U				
	dh				
	dM				
	dR				
R_2					
R_3					

Die Werte p werden laut Messung in die vorbereitete Tabelle eingesetzt. Die anderen fünf Werte N, U, dh, dM, dR werden nachträglich auf Grund der Formeln

$$N = M + p - \frac{B}{V}$$

$$U = \frac{h_2}{h_2 M - h_1 N}$$

$$dh = pUh_1$$

$$dM = pUM$$

$$dR = pUR$$

gerechnet.

Auf Grund dieser Tabelle unterliegt es dann keiner Schwierigkeit, sowohl den perspektivischen als den orthogonalen Schichtenplan für das Bild P_1 in beliebigem Maßstabe zu zeichnen.

M_1
R_1
h_1+dh+r } P_p sind die Koordinaten eines Punktes des perspektivischen Schichtenplanes.

M_1+dM
R_1+dR
h_1+dh+r } P_o sind die entsprechenden Koordinaten desselben Punktes im orthogonalen Schichtenplane.

r ist eine Korrektur, welche dem Umstande Rechnung trägt, daß die Höhen bisher tatsächlich auf eine Tangentialebene an die Niveaufläche (die Vergleichsebene) bezogen wurden, während sie richtigerweise auf die kugelig gekrümmte Nullniveaufläche hätten bezogen werden sollen. Selbstverständlich wächst r mit dem radialen Abstande von der Horizontalprojektion des Ballonortes der Platte P_1, für welche der Schichtenplan gilt, und kann ein- für allemal berechnet und in eine Tabelle gebracht werden.

Sind diese Schichtenpläne gezeichnet, so unterliegt es wieder keiner Schwierigkeit, sie photographisch zu reproduzieren, und zwar reduziert man den perspektivischen Schichtenplan genauestens auf die Größe der Platte P_1 (der horizontalen Vogelperspektive), den orthogonalen Schichtenplan auf den Maßstab der gewünschten Karte.

Ist das geschehen, so sind mit den erhaltenen Negativen die Grundlagen für die Zonentransformation, siehe Kapitel IV, gegeben.

Es ist klar, daß ebenso wie hier die Bilder nach der Basisrichtung orientiert wurden, sie ebenso wie in A auch nach Ost—West und Nord—Süd orientiert werden können.

Die Orientierung der Bilder nach den Weltgegenden müßte aus dem Triangulierungsnetz, d. h. den Kontrollpunkten, ermittelt werden und hätte man bei genügender Netzdichte die Möglichkeit, jedes einzelne Bild unabhängig von anderen zu orientieren und nur das gerade zu vergleichende Bilderpaar betreffs der Übereinstimmung dieser Orientierung zu prüfen und eventuelle Differenzen auszugleichen.

Man hätte dann bei der Orientierung nach der Ost—West-Richtung nach Nord—Süd-Profilen, bei der Orientierung nach der Nord—Süd-Richtung nach Ost—West-Profilen zu arbeiten, hätte an der Parallaxenteilung im einen Falle die Größe $\Delta x = \frac{\Delta\lambda \cos\varphi}{V}$, im anderen Falle die Größe $\Delta y = \frac{\Delta\varphi}{V}$ einzustellen und würde an der Mikrometerteilung in einem Falle die Größe p_x, im anderen Falle die Größe p_y ablesen. Hieraus würde sich dann ergeben:

$$dh = \frac{p_x h_1 h_2}{h_2 x_1 - h_1 x_2} = \frac{p_y h_1 h_2}{h_2 y_1 - h_1 y_2}$$

$$dx_1 = \frac{p_x h_2 x_1}{h_2 x_1 - h_1 x_2}$$

$$dy_1 = \frac{p_y h_2 y_1}{h_2 y_1 - h_1 y_2}.$$

IV. Die zonenweise Überführung der horizontalen Vogelperspektiven in Orthogonalprojektionen.

Wie schon im Kapitel I gezeigt wurde, erscheinen in der horizontalen Vogelperspektive, respektive in einem nach E. Deville erhaltenen perspektivischen Grundriß einer Hochgebirgslandschaft bei vollster Aufrechterhaltung der Ähnlichkeit jene Terrainteile, welche bei der Aufnahme dem Objektiv

näher waren als der Vergleichshorizont (die mittlere Schmiegungsebene), zu groß, dagegen jene Terrainteile, welche entfernter waren, zu klein. Denkt man sich das Terrain durch eine Schar zum Vergleichshorizont (zur Schmiegungsebene) paralleler Ebenen in dünne Zonen zerschnitten, so kann man den mittleren Maßstabfehler für jede dieser Zonen bestimmen und durch photographische Vergrößerung oder Verkleinerung beseitigen.

Das geschieht unter Zugrundelegung des nach Kapitel III gewonnenen Schichtenplanes mit Hilfe des Zonentransformators.

Selber ist nichts anderes als ein gut gearbeiteter Zwillings-Reproduktionsapparat, in welchem vorne links die zu transformierende horizontale Vogelperspektive mit Schicht auf Schicht aufgepaßtem perspektivischen Schichtenplan, vorne rechts der perspektivische Schichtenplan allein eingelegt wird, während rückwärts auf der Seite der Ballonaufnahme die Kassette mit der empfindlichen Platte, auf der anderen Seite der orthogonale Schichtenplan eingesetzt wird.

Bei der Arbeit wird nun rechts eine Zone des perspektivischen Schichtenplanes nach der anderen mit der entsprechenden Zone des orthogonalen Schichtenplanes zur Deckung gebracht.

Gleichzeitig wird links der ganze Schichtenplan auf der Rückseite mit leicht wegwischbarer, aber gut deckender Farbe undurchsichtig gemacht und nur jedesmal die gerade rechts in Deckung gebrachte Zone freigelassen und exponiert.

Wenn diese allerdings etwas zeitraubende Geduldarbeit vollendet ist, wird die empfindliche Platte entwickelt und gibt die vollkommen korrekte Orthogonalprojektion, wobei die Schichtenlinien als zarte, hellere oder dunklere Linien erscheinen, je nachdem die betreffenden Terrainteile konvex oder konkav waren, also ihre Bilder verkleinert oder vergrößert werden mußten, daher benachbarte Zonen entweder nicht ganz aneinander anschließen oder aber sich gegenseitig etwas übergreifen.

V. Die Herstellung der Karte auf photographischem Wege.

Nachdem in den ersten vier Kapiteln die Bausteine des neuen Verfahrens zusammengetragen wurden, sei hier gestattet, dieselben zu einem Ganzen zu vereinigen.

Man kennt heute verschiedene Mittel, um photographische Apparate in große Höhen zu heben, und zwar

1. den bemannten Freiballon,
2. den Sondierballon,
3. die Drachen,
4. den lenkbaren Luftballon (Graf Zeppelin, Santos-Dumont, Deutsch, La Patrie, Conte da Schio etc.),
5. den Fesselballon,
6. Raketen.

Von diesen Hilfsmitteln ist entschieden der Freiballon am leistungsfähigsten. Man kann bis in ungeheure Höhen (nahezu 10.000 *m*) steigen, man kann große Fahrten bei nahezu jedem Wetter machen. Der einzige Übelstand ist, daß der Ballon nicht lenkbar ist.

Da der bereits vor Jahren vom Verfasser konstruierte siebenfache Ballonapparat (siehe »Photographische Korrespondenz«, 1903) eine Kreisfläche, deren Durchmesser ungefähr der fünffachen Ballonhöhe gleichkommt, mit einem Male aufzunehmen gestattet, kann schon mit einer einzigen Fahrt, wenn man schönes, klares Wetter hat, mit Leichtigkeit ein Geländestreifen von 10 bis 15 *km* Breite und 50 bis 100 *km* Länge aufgenommen werden, also 500 bis 1500 km^2 mit einem Schlage.

Bei der großen Ruhe des Freiballons hat man auch die größten Chancen, gute Bilder zu erzielen, viel größere als bei allen anderen Behelfen. Da sich die Aufnahmen zu langen Ketten aneinander reihen, die sich mit Hilfe der Hauck'schen Kernpunkte leicht verknüpfen lassen, so dürften die aus diesen Bildern gewonnenen Resultate auch sehr genau werden.

Wegen seiner großen Leistungsfähigkeit und relativen Betriebssicherheit ist der bemannte Freiballon auch bis jetzt entschieden das billigste Mittel zur Hochnahme von photographischen Apparaten.

Nur muß man, da er nicht lenkbar ist, um ein Land planmäßig zu vermessen, Wind und Wetter studieren und klug benützen. Man wird prinzipiell nur bei schönstem, klarstem Wetter fahren und darauf achthaben, was für ein Wind bei solchen Wetterlagen in verschiedenen Höhen vorherrscht. Dann wird man, auf die Kenntnis der bei schönem, klarem Wetter vorherrschenden Windverhältnisse gestützt, die Aufstiegsorte des Ballons derart verändern, daß nach und nach das ganze zu vermessende Land sozusagen abschraffiert wird. Selbstverständlich wird das nicht vollkommen gelingen. Es werden Lücken bleiben und andrerseits vieles mehrfach aufgenommen werden. Durch Verwendung und Beobachtung der Flugbahnen von Pilotballons vor jedem Aufstiege nach der Methode Dr. de Quervain kann diese Arbeit ungemein erleichtert und verbilligt werden.

Zur Ausfüllung der unvermeidlichen Lücken verwendet man dann am besten, wenn Wind ist, Drachen, wenn kein Wind ist, Sondierballons.

Insbesondere Sondierballons sind durch die neuen, von Prof. Dr. Hergesell erdachten Einrichtungen und Verbesserungen für die hier ins Auge gefaßten Zwecke besonders geeignet. Nur ist ihr Betrieb etwas teuer, weil jede einzelne Aufnahme einen Gummiballon (zirka 200 bis 300 Kronen) kostet. Obendrein werden die Apparate durch den Wind vertragen und hat man stets mit der Wahrscheinlichkeit zu rechnen, daß Unberufene den Apparat in die Hände bekommen und die kostbaren Aufnahmen aus Unverstand belichten oder sonst Schaden machen.

Bei Drachen ist das letztere nicht zu befürchten. Dagegen ist ihr Betrieb ohne fahrbare, maschinell betriebene Winde (vier bis sechs Pferdekräfte) nicht rationell und ist eine solche Winde ein sehr teures Stück. Auch sind sie nur bei stetigem Winde verwendbar, der häufig gerade dann nicht vorhanden ist, wenn man klares Wetter und eine gute Beleuchtung hat.

Das lenkbare Luftschiff kommt vorläufig noch nicht in Betracht, weil es erstens noch nicht sicher genug funktioniert, zweitens zu kostspielig ist und drittens in den bisher ausgeführten Formen nicht im stande ist, größere Höhen zu

erreichen, während doch gerade in dem Erreichen großer Höhen die eventuelle Rentabilität der hier besprochenen Methode begründet ist.

Auch der Fesselballon ist minder empfehlenswert, erstens, weil er in der Regel zu unruhig ist, um gute Bilder zu ermöglichen, und zweitens, weil auch er nicht dazu taugt, größere Höhen zu erreichen.

Die Rakete endlich ist ein ganz neues Hilfsmittel, photographische Apparate bis in größere Höhen, angeblich bis zu 1000 *m*, hinaufzutreiben. Wegen ihrer Billigkeit hätte sie entschieden sehr große Zukunftschancen, insbesondere als Ersatz des Sondierballons; sie ist aber noch nicht genügend erprobt, um vorläufig hier in Betracht zu kommen.

Obiges vorausgeschickt, sei jetzt der normale Arbeitsvorgang bei einer ballonphotogrammetrischen Neuvermessung eines großen Gebietes in seinen großen Zügen entwickelt.

Man trachtet, durch eine Reihe von Ballonfahrten möglichst lückenlos womöglich das ganze aufzunehmende Land mit dachziegelartig sich übergreifenden Ballonaufnahmen zu überdecken. Die unvermeidlichen übrig bleibenden Lücken werden entweder mittels Sondierballons oder durch Drachenaufnahmen ausgefüllt.

Mit jeder Aufnahme wird eine möglichst genaue Neigungsmessung verbunden.

Die Bilder werden vorerst mit konstanter Brennweite nach Maßgabe der beobachteten Neigungen in die Horizontalebene transformiert und dienen vor allem als Rekognoszierungsbehelf für die Auswahl der einzumessenden Triangulierungspunkte.

Dieselben werden so gewählt, daß je drei auf einer Aufnahme sichtbar sind und der Ballonort weitab von der Peripherie des durch sie bestimmten Kreises liegt, weiters daß sie leicht in der Natur aufgefunden werden können und daß sie sich gegenseitig sehen (wo brauchbare ältere Karten oder Triangulierungsnetze vorliegen, können dieselben eventuell benützt werden). Die gewählten Punkte sind in der Natur aufzusuchen, zu bezeichnen und einzumessen.

Nach Maßgabe, als das geschehen ist, werden die Bilder durch optische Koinzidenz mit Hilfe des Photoperspekto-

graphen genau horizontiert und auf den gewünschten Maßstab gebracht.

Sodann wird die Güte der Arbeit mit Hilfe der Hauckschen Kernpunkte dadurch kontrolliert, daß man die Lage der Kernpunkte, die jedes Bild mit seinen Nachbarbildern gemeinsam haben soll, aus den bereits bekannten Ballonörtern rechnet und nachsieht, ob die von ihnen zu einer Anzahl identer Bildpunkte gezogenen Strahlenbüschel sich in den in Betracht kommenden Bildern auch tatsächlich decken.

Eventuell dadurch aufgedeckte Fehler sind zu beseitigen.

Nachdem so ein homogenes, horizontales, richtig orientiertes und maßstabrichtiges Bildermaterial geschaffen ist, welches das ganze zu vermessende Land überdeckt, werden die Bilder in passender Weise gepaart, um zur Ermittlung des Schichtenplanes mit oder ohne Hilfe des Stereokomparators zu dienen.

Diese Ermittlung des Schichtenplanes erfolgt nach Kapitel III. Sodann hat nach Kapitel IV die Zonentransformation zu erfolgen, d. h. die Überführung der Perspektivbilder in Orthogonalprojektionen.

Endlich schließt die Kartierung die Rechnung ab. Selbe kann entweder dadurch erfolgen, daß man die orthogonalen Kopien der Einzelaufnahmen bezüglich ihrer Begrenzungen den gegebenen Vorschriften entsprechend zusammenfügt und beschreibt oder, wenn der Charakter der Photographie nicht gewünscht und die bisherige symbolistische Terraindarstellung vorgezogen wird, an der Hand obiger Teilbilder die eigentliche Karte zeichnet.

Inhaltsübersicht.

I. Überblick über die leitenden Gesichtspunkte der Methode.

II. Die geodätische Orientierung der Ballonbilder und ihre Transformation in horizontierte Vogelperspektiven mit Hilfe des Photoperspektographen.

III. Die Ermittlung des genauen Schichtenplanes des Terrains aus den horizontierten und geodätisch orientierten Ballonaufnahmen.

A. Ermittlung des Schichtenplanes ohne besondere instrumentelle Hilfsmittel.

B. Ermittlung des Schichtenplanes mit Hilfe des Stereokomparators.

IV. Die zonenweise Überführung der horizontalen Vogelperspektiven in Orthogonalprojektionen.

V. Die Herstellung der Karte auf photographischem Wege.

Über das Vorkommen der seltenen Erden auf der Sonne

von

Dr. **Georg Hofbauer.**

Aus dem II. physikalischen Institute der Universität Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 28. Februar 1907.)

Rowland hat in seinen Wellenlängentabellen des Sonnenspektrums[1] die seltenen Erden nur unvollständig und teilweise auch ungenau identifiziert, da ihm von diesen entweder gar keine Proben oder bloß unreine Präparate vorlagen. Noch am vollständigsten sind die Elemente Lanthan, Neodym, Scandium und Yttrium mit ihren starken Linien vertreten, mangelhafter Cer und besonders Erbium; die wenigen Linien, die Rowland in dem von mir durchsuchten Teile des Sonnenspektrums als dem Erbium gehörig angibt, erweisen sich als starke Ytterbiumlinien. Vollkommen fehlen in den Tafeln: Erbium, Europium, Dysprosium, Gadolinium, Neoholmium, Praseodym, Samarium, Terbium, Thorium, Thulium und, von den falschen Ytterbiumidentifikationen abgesehen, auch Ytterbium. Eine Revision der Rowland'schen Wellenlängentafeln bezüglich der seltenen Erden wird erstens die Frage entscheiden, ob die daraufhin noch nicht untersuchten Elemente Er, Eu, Dy, Gd, Ho, Pr, Sa, Tb, Th, Tm und Yb auf der Sonne vorkommen und zweitens die Zahl der unbekannten Fraunhofer'schen Linien erheblich vermindern.

Eine vorläufige Durchsicht der stärksten und charakteristischen Spektrallinien der seltenen Erden ließ erkennen, daß

---

[1] H. A. Rowland, A preliminary table of solar spectrum wave-lengths. Chicago 1898.

diese auch auf der Sonne nicht häufig auftreten, und eine genaue Untersuchung des Funken- und Bogenspektrums von Lanthan bestätigte dann meine Vermutung, daß die schwächsten Linien aller dieser Elemente im Sonnenspektrum nicht mehr vorhanden sind. Es war daher eine erlaubte Vereinfachung, wenn ich alle Linien, die Exner und Haschek in ihren Spektraltafeln[1] mit der Intensität 1 und 2 angeben, ganz vernachlässigte.

Bei der Aufstellung der folgenden Tabelle ging ich von der Haupttabelle aus dem genannten Werke Exner's und Haschek's aus, so zwar, daß ich das Funken- und Bogenspektrum parallel benützte. Denn es würde nicht genügen, nur das Bogen- oder Funkenspektrum zum Vergleich heranzuziehen wegen der gänzlich unbekannten Bedingungen, unter denen sich die Metalldämpfe auf der Sonne befinden. Am ehesten wird im Sonnenspektrum eine Linie dann zu erwarten sein, wenn sie sich im Bogen und Funken zugleich vorfindet und somit dem Element unter verschiedenen Leuchtbedingungen charakteristisch ist.

Zum genaueren Vergleich nahm ich noch die Messungen Kayser's und seiner Schüler über die Bogenspektren einiger seltener Erden hinzu,[2] in wenigen Fällen Zahlen aus dem Tantalspektrum von Morsch[3] und aus den Messungen der dritten Cyanbande von Jungbluth,[4] falls die Identifikationen Rowland's zweifelhaft waren.

---

[1] F. Exner und E. Haschek, Wellenlängentabellen. I. Funkenspektren, 1902; II. Bogenspektren, 1904.

[2] H. Kayser, Die Bogenspektren von Yttrium und Ytterbium. Berlin 1903. — J. Kellner, Das Lanthanspektrum. Inaug.-Diss., Bonn 1904. — E. Wolff, Das Lanthanspektrum. Inaug.-Diss., Bonn 1905; Zeitschr. f. wiss. Phot., III, Heft 10 (1905). — Chr. Rütten, Das Bogenspektrum von Samarium. Inaug.-Diss., Bonn 1905; Zeitschr. f. wiss. Phot., III, Heft 5 (1905). — M. Bertram, Die Bogenspektren von Neodym und Praseodym. Inaug.-Diss., Bonn 1905; Zeitschr. f. wiss. Phot., IV, Heft 1 und 2 (1906).

[3] H. Morsch, Das Bogenspektrum von Tantal. Inaug.-Diss., Bonn 1905; Zeitschr. f. wiss. Phot., III, Heft 5 (1905).

[4] Fr. Jungbluth, Gesetzmäßigkeiten in dem Bau der dritten Cyanbande. Inaug.-Diss., Bonn 1904; Astroph. Journal, *20*, 237 (1905).

Diese Bonner Messungen sind unter möglichst gleichen Versuchsbedingungen ausgeführt und daher wohl miteinander vergleichbar. Sie geben noch die dritte Dezimale einer Angströmeinheit an, bei einer Meßgenauigkeit von $\pm 0{\cdot}005$ A. E. bis $\pm 0{\cdot}01$ A. E., während die Exner-Haschek'schen Tafeln zweistellig sind und ihre Fehlergrenze bei $\pm 0{\cdot}02$ A. E. liegt.

Die Intensitätsangaben bei Exner-Haschek, Kayser und Rowland basieren auf ungleichen Skalen, was einen wechselweisen Vergleich dieser Zahlen ausschloß. Um nun die Intensität einer Linie möglichst genau und leicht vergleichbar zu fixieren, ordnete ich ihr die Intensitätszahl bei, die sie bei Exner-Haschek im Funken hat, dann die Zahl aus dem Bogenspektrum, drittens die Intensitätsangabe der Bonner Bogenmessungen und schließlich die Intensität, mit der sie im Sonnenspektrum auftritt. Statt einer Zahl hatte nun jede Linie eine viergliederige Intensitätenreihe von der eben geschilderten fixen Anordnung der Glieder. Diese Reihen hatten den Vorteil, daß sie sich gliedweise vergleichen ließen; also war der Schluß erlaubt, daß Spektrallinien eines Elementes, bei denen die drei ersten Glieder übereinstimmten oder wenig voneinander abwichen, auch im letzten Gliede gleich oder wenig abweichend sein werden, kurz, daß solche Linien auch im Sonnenspektrum gleich, respektive ähnlich stark auftreten werden. Weiter wählte ich von jedem Element die stärksten Spektrallinien mit den zugehörigen Intensitätsreihen aus und vereinigte diese zu einem Intensitätenschema. Durch die vierte Kolumne eines solchen Schemas war mir die obere Grenze der Intensität gegeben, mit der die Linien eines Elementes in der Sonne auftreten konnten. Ebenso verfuhr ich mit den schwächsten Linien, die nicht mehr im Sonnenspektrum bemerkbar sind, und bekam so die untere Grenze der geringen Intensitäten im Funken und Bogen, denen ein eben noch merkbarer Betrag im Sonnenspektrum entspricht. Diese Feststellung der beiden Grenzen besorgte ich bei jedem Element, weil so ein schneller und sicherer Überblick zu gewinnen war, ob und wie stark eine Linie in der Sonne auftreten könne. Eine gute Übereinstimmung mit der wirklich von Rowland angegebenen Zahl war mir außer der Übereinstimmung der Wellenlängen Voraussetzung für eine sichere Identifikation.

Waren derart die Schwierigkeiten vermieden, die die Intensitätsvergleiche boten, so traf ich nun bei der Vergleichung der Wellenlängen auf Störungen, die oft eine sichere Identifikation erschwerten, wenn nicht unmöglich machten, nämlich Differenzen in den Wellenlängen. Jewell[1] fand zuerst, daß die Wellenlängen der Fraunhofer'schen Linien, die Rowland veröffentlichte, oft nicht mit den entsprechenden Metallinien im Bogen übereinstimmten, was er mit den verschiedenen Temperaturbedingungen, Druck und Dichte, unter welchen die Lichtemission auf der Sonne und im Bogen stattfindet, erklärte. Versuche von Humphreys und Mohler[2] zeigten unzweifelhaft den Einfluß des Druckes des umgebenden Gases auf die Wellenlänge im Bogenspektrum. Die Linienverschiebungen, die nun Exner und Haschek bei ihren Messungen der ultravioletten Spektren der Elemente fanden, ließen sich nicht allein durch den Gasdruck erklären, es mußte noch ein Einfluß der Dampfdichte auf die Wellenlänge angenommen werden. E. Haschek[3] fand Proportionalität zwischen Partialdichte und Verschiebung.

Der letztere Einfluß ist indessen nicht unbestritten. Vorzüglich Kayser[4] leugnet, wenigstens beim Bogen, einen Einfluß der Dichte des leuchtenden Dampfes auf die Wellenlänge gemerkt zu haben und führt die gegenteiligen Resultate auf falsche Deutungen einseitiger Linienverbreiterungen zurück. Außerdem führen Eder und Valenta[5] photographische Scheinverschiebung infolge Überexposition als Fehlerquelle bei den Exner-Haschek'schen Messungen an, ein Einwand, der höchstens bei den sehr starken Linien zutreffen kann, Verschiebungen schwacher Spektrallinien aber nicht erklärt, ebensowenig wie die Verschiebungen von Umkehrungen. Neuerdings hat Kent[6] Differenzen zwischen den Wellenlängen im Funken und im

---

[1] Astrophys. Journal, *3*, 89 bis 113 (1896).

[2] Ebenda (1896, 1897 und 1905).

[3] Spektralanalytische Studien. Diese Sitzungsber., *110*, IIa (1901) und *111*, IIa (1902).

[4] Handbuch der Spektroskopie, II, 310 (1902).

[5] Diese Sitzungsber., *112*, IIa, 1291 bis 1304.

[6] Astrophys. Journal, *17*, 286 bis 299 (1903) und *22*, 182 bis 198 (1905).

Bogen konstatiert und Exner und Haschek[1] beim Ca, Sn und Zn die Inkonstanz der Wellenlängen im Funken und Bogen nachgewiesen.

Die Wellenlängendifferenzen, die ich fand, überstiegen auch beim Vergleich von Bogenmessungen oft 0·01 A. E. Mithin muß entweder zugegeben werden, daß die Angabe einer dritten Dezimale illusorisch ist oder man muß das Vorhandensein von Linienverschiebungen auch beim Bogenspektrum anerkennen, falls die Fehlergrenze tiefer liegt. In der folgenden Tabelle, die eine Genauigkeitsprobe geben soll, ist eine Reihe von Lanthanlinien aus dem Sonnenspektrum Rowland's zusammengestellt. Dann folgen die Differenzen gegenüber den Wertangaben Exner's und Haschek's beim Funken und beim Bogen (E. H.), weiter gegenüber den Bogenmessungen Kellner's, Wolff's, Bertram's (der das La als Verunreinigung im Pr-Spektrum mißt) und Rowland's.[2] Die Differenzen bei Exner-Haschek mußte ich in Hundertsteln von Angströmeinheiten angeben, wobei die Rowland'schen Zahlen zweistellig korrigiert verwendet wurden. Die anderen Angaben sind dreistellig.

Falls die Identifikation von mir herrührt, ist dies durch ein * gekennzeichnet.

λ in ⊙	E. H.		Kellner	Wolff	Bertram	Rowland
	Fu	Bo_1	Bo_2	Bo_3	Bo_4	Bo_5
3337·630	+04	+03	+007	—019	—010	000
44·655	+05	+08	+057	+027	+032	+050
76·471	—02	+01	—004	—020	—045	+001
81·026	+07	+07	+032	—002	+017	+020
3574·559	+04	+01	+015	+002	—029	+006
3705·968*	+05	—03	—018	000	—022	—

[1] Diese Sitzungsber., *115*, IIa (1906).

[2] H. A. Rowland and C. N. Harrison, Arc spectra of Zirconium and Lanthanum. Astrophys. Journal, *7*, 387 bis 389 (1898).

λ in ⊙	E. H.		Kellner	Wolff	Bertram	Rowland
	Fu	Bo_1	Bo_2	Bo_3	Bo_4	Bo_5
3759·215	+11	00	000	+012	+026	+002
94·909	+08	—01	+009	+007	+022	—005
3840·893*	+03	—01	—034	—062	—027	—
49·140	+06	00	—	+027	—	—
71·785*	+10	+01	—007	—021	—	—
3916·207	00	—05	—011	—021	—025	—154
49·199	+02	+07	+055	+041	+043	+057
4015·532*	+03	—01	—004	+025	+024	+001
37·268*	+08	—01	+086	+103	+100	—
43·054	+13	—01	+021	+012	+014	+016
4141·910	—01	+01	—015	—039	—035	—038
52·108	+06	+03	+035	000	+037	+011
52·927	+04	+01	—003	—012	+027	—
4204·163	+07	+02	+051	+032	+030	+055
87·159	—07	—06	—047	—022	—040	—031
4364·827*	+02	—03	+009	+018	—006	—
4430·070	+03	+02	+016	—006	+008	+005
4522·539*	+07	+01	—001	+011	—	+005
75·075*	00	—05	—028	—002	—	—016
4613·544	+03	—01	+014	+032	—	+013
55·634*	+08	+04	+020	+080	—	+033
62·693*	+04	00	—012	+025	—	—015

Die Tabelle zeigt deutlich, daß auch analoge und unter gleichen Versuchsbedingungen angestellte Bogenmessungen, wie die von Kellner, Wolff und Bertram, nicht selten Differenzen bis zu 0·03 A. E. ergeben.

Sicher war eine Identifikation dann erst, wenn außer der Koinzidenz auch die Intensität im Sonnenspektrum sich den durch die Intensitätsschemen gezogenen Grenzen gut einfügte. Sehr häufig war diese Intensitätsangabe zu hoch. Dann war eine mehrfache Koinzidenz mit noch anderen Elementen vorhanden oder zu vermuten. Auffällig war es, wenn von manchen

Elementen sehr oft schwache Linien, die im Sonnenspektrum kaum oder überhaupt nicht sichtbar sein sollten, noch merklich auftraten, ohne daß ich eine Koinzidenz mit anderen Elementen fand. (Auch hier vernachlässigte ich die schwächsten Linien mit den Intensitäten 1 und 2, was aber diese Untersuchung recht unsicher macht; denn immerhin können mehrere sich deckende Linien, auch wenn sie einzeln sehr schwach sind, im Sonnenspektrum einen namhaften Betrag der Intensität ausmachen.) In der Tabelle sind alle diese Linien, die wider Erwarten im Sonnenspektrum merkbar auftreten, durch eine ( ) kenntlich gemacht, z. B. (Gd). Eine zweite Anomalie war es, wenn bei einem Element, dessen Vorhandensein auf der Sonne durch eine große Reihe von Koinzidenzen erwiesen war, stärkere Linien im Sonnenspektrum nicht zu finden waren. Meist erklärte sich dieses Fehlen aus der Nachbarschaft einer verbreiterten oder starken Linie, die die immerhin schwachen Linien des seltenen Elementes überdeckte.

Es gelang mir bei allen eingangs erwähnten seltenen Erden, den Nachweis für ihr Vorkommen auf der Sonne zu erbringen. Am häufigsten — mit den relativ stärksten und meisten Linien — kommen vor: Y, Sc, La, Nd, Ce. Die übrigen Erden treten auch auf der Sonne nur spärlich auf. Tb fehlt nach der Ansicht Eberhard's[1] im Sonnenspektrum, dagegen fand ich die stärkeren Terbiumlinien, wenn auch schwach, in den Rowland'schen Tafeln. Auch für die Dysprosiumlinien und die paar Neoholmiumlinien, die Eberhard anführt, fand ich Koinzidenzen bei Rowland. Doch ist den Angaben über die beiden letztgenannten Erden höchstens der vorläufige Wert beizumessen, den ihnen Eberhard beilegt. Beim Vergleich der genannten Messungen Eberhard's mit denen von Exner-Haschek, das »Holmium« von A. Langlet betreffend, zeigte es sich, daß das von letzteren untersuchte Präparat hauptsächlich Dysprosium und Neoholmium enthielt, in geringerer Menge Terbium. Eine Reihe von stärkeren »Holmium«linien ließ sich übrigens mit keiner der bis nun bekannten Linien

[1] G. Eberhard, Spektroskopische Untersuchung der Terbiumpräparate von Dr. G. Urbain, Sitzungsber. d. k. preuß. Akad. d. Wiss., XVIII (1906).

des Tb, Dy und Ho identifizieren; solche Fälle, in denen unbekannte Linien aus dem Exner-Haschek'schen »Holmium«-spektrum mit Linien im Sonnenspektrum gut übereinstimmten, sind hier aufgezählt.

λ	Rwl.	*i*	λ	Rwl.	*i*
3156·565	Fe?[1]	1	3753·667	—	000
62·916	—	0	53·893	—	00
70·117	—	0000	92·041	—	000 *N*
3388·994	—	00	3810·854	C	000
3447·089	—	0	41·486	—	00
74·410	—	0000	48·840	—	00
94·654	—	0	53·184	—	00
94·871	—	000	89·077	—	0
3506·980	—	0	3957·939	—	00
46·974	—	000	91·459	—	00 *N*
63·855	—	0000	4014·827	—	00
78·138	—	0000	4103·470	—	0
80·227	—	00	03·967	—	00 *N*
95·161	—	0000	63·144	—	000
3620·295	—	0000	86·955	C?	0000
29·492	—	000 *N*	4201·486	—	0
40·403	—	0000	11·350	—	0 *N*
48·898	—	0000	56·469	—	00
3708·327	—	000	4612·446	—	000

[1] Keine Fe-Linie.

Die Anordnung obiger Tafel ist ganz analog der folgenden Haupttabelle. Diese schließt sich möglichst an die Wellenlängentabellen des Sonnenspektrums von Rowland an. Es befindet sich unter

λ die Wellenlänge, die Rowland im Sonnenspektrum mißt;
Hfb. meine Identifikation der Linie mit den seltenen Erden;
i Intensität und Charakter einer Linie;
Rwl. die Identifikation, die von Rowland herrührt.

Ferner sind von Rowland'schen Bezeichnungen zu nennen:

Ein Beistrich zwischen zwei Symbolen (z. B. Cr, Nd) bedeutet vollkommene Koinzidenz.

Ein Bindestrich (z. B. Cr–Nd) bezeichnet unvollkommene Koinzidenz, so zwar, daß dem violetten Rand der Absorptionslinie Cr, dem roten Rand Nd entspricht. Dementsprechend heißt z. B. Fe– oder –Ni, daß auf den violetten Linienteil Fe (respektive auf den roten Teil Ni) entfällt, während der restliche Teil nicht identifiziert ist. Schließlich wird ein Fall wie beispielsweise Ce,– heißen, daß nach der zu großen Intensitätszahl zu urteilen noch eine oder mehrere Linien genau an derselben Stelle wie Ce liegen dürften.

Zur Charakterisierung der Linien dienen die Abkürzungen:

N = eine unscharfe Linie, die vielleicht zusammengesetzt ist, ohne sich aber auflösen zu lassen.

d? (*tr*?) = eine unsicher als doppelt (dreifach) erscheinende Linie.

d (*tr*) = eine gewiß doppelte (dreifache) Linie.

Als Intensitätsskala bedient sich Rowland einer Reihe aufsteigend von 0000, 000, 00, 0, 1 bis 1000, wobei die mit Nullen versehenen Linien solche bezeichnen, die nur schwer und unter günstigen Verhältnissen zu sehen sind.

An alle diese Bezeichnungsweisen habe ich mich in der Haupttabelle gehalten. Eingetragen sind womöglich nur sichere Koinzidenzen; waren in manchen Fällen die Identifikationen Rowland's falsch, so ist dies durch ein beigefügtes * kenntlich gemacht. Fehlt in der Kolumne »Rwl.« dieses Zeichen *, während sich unter »Hfb.« ein Strich befindet, so heißt dies, daß den richtigen Identifikationen Rowland's nichts hinzuzufügen war.

Einige Bemerkungen zur Tabelle befinden sich am Schlusse.

λ	Hfb.	*i*	Rwl.
2977·021	Pr, –	00 *N d*?	—
88·333	Th, –	000 *N*	—
99·136	Gd	0000	—
3005·852	Yb, –	2 *d*	–, Co ?
10·277	Gd	0	—
17·691	Yb, –	1 *N d*?	Co, Cr
19·426	Sc, – [1]	1	—
27·717	Gd	0	—
29·661	Yb	000	—
32·971	Gd	0000	—
34·166	Gd, (Th)	00	—
53·031	Sc	00	—
55·051	Eu, –	0	Zr
58·072	Yb	00	—
63·152	Ce, (Th)	0000	—
70·145	Tb	0	—
70·902	Er, (Th)	0	—
77·747	Yb –	1	—
78·932	Th	000	—
79·022	Tb	00	—
82·142	Gd [2]	1	Mn ? *
93·229	Va, Er	2 *N*	--
93·989	Yb, Ta	1	—
98·070	Th	000	—
3100·629	Gd	000	—
02·079	Dy	00 *N*	—
04·676	La, –	2 *N*	—
08·369	Th	00 *N*	—
09·909	Dy	0000	—
11·530	Eu	0000	—
17·998	Gd [3]	2	—
22·774	Er	00	—
31·350	–, Tm	0	Cr, –
39·781	Tb, –	1	—

λ	Hfb.	*i*	Rwl.
3141·053	Yb	00	—
41·221	Dy	00	—
45·641	Gd [2]	0	—
53·985	Yb	0000	—
68·392	Pr	0000	—
69·187	Yb	000	Co?
71·776	La, (Fe)	1	Fe?
72·963	Tm	000	—
75·821	(Th)	0000	—
85·333	(Er)	0000 *N*	—
88·310	Th [1]	0000	—
93·029	Yb, –	1 *N*	Fe?
94·961	Ce [2]	0	—
95·705	—	2	Y–Ni
98·213	Cr, Yb	000	Cr?
3200·407	—	2 *N d*?	Y, –
01·239	Yb	0000	Fe? *
01·834	Ce, –	000 *N*	—
03·435	—	1	Y
15·292	Dy, –	1	—
16·659	Th	0	—
16·807	—	1	Y
20·079	Tb	0000 *N*	—
23·479	(Er)	00	—
27·292	(Er)	0000	—
30·708	Er	00	—
32·193	Th, (Er)	0000	—
38·205	–, (Th)	0	Cr
40·381	(Er)	0000 *N*	—
40·616	(Er)	0000	—
42·395	—	1	Y
45·257	La	00 *N*	—
45·907	(Th)	0000	—
49·497	La, –	2	Ti

λ	Hfb.	*i*	Rwl.
3255·800	Sc	000 *N*	—
56·382	(Th)	0000 *N*	—
64·983	Tm	00	—
65·762	La, –	4	Fe
66·561	Tb	00 *N i*?	—
70·033	Sc	000	—
73·758	Sc	0	—
80·256	Dy	000 *N*	—
81·841	– Yb	2	—
83·286	Tb	00	—
89·498	Yb [4]	4	Er? *
90·642	Th	0 *N*	—
91·824	(Th)	00	Fe *
92·337	Gd	0000 *N*	—
3300·617	Th [5]	000	—
03·248	—	000 *N d*?	La [6]
12·563	Er	00	—
13·853	Th	0	—
16·467	Dy	0	—
20·032	Dy	0	—
23·426	Er	0000	—
25·288	Th	0000	—
28·016	—	2	Y
29·762	Er	0000 *N*	Fe *
31·527	Gd	000	—
32·850	Er	0000	—
37·630	—	0	La [6]
40·173	(Er)	000 *N*	—
41·137	Dy	0000	—
41·583	Pr	0000	—
44·655	La, –	2	La
50·214	(Er)	000 *N*	—
50·545	(Eu)	1	Di? *
50·648	Gd [3]	2	Ti *

λ	Hfb.	*i*	Rwl.
3351·379	Th	0000	—
53·875	—	4	Sc, –
57·816	(Pr)	0000	—
58·771	Gd	00	—
59·823	Sc	2	—
61·421	Sc	2	—
62·087	Sc	2	Ti *
62·402	Gd	2 *d*?	—
62·782	Tm, –	1	—
64·232	Er	0000	—
67·687	(Pr)	0	—
67·953	(Th)	000	—
69·083	Sc	3 *d*?	—
72·314	Sc [6]	0	—
72·901	*d*? Er, –	10	Ti–Pd
72·994			
75·601	Yb	0000	—
76·471	La, – [2]	2	La
81·026	—	5 *N d*?	Ni, La
85·167	Dy	0	Y
85·215	Er	000	—
89·747	(Th)	0000 *N*	—
90·919	(Eu)	00	—
92·153	Th, Er, (Tm), (Fe)	1	Fe
96·742	Eu	000	—
97·197	Yb	0000	—
99·059	Ho	0	—
3400·153	(Gd)	0000 *N*	—
01·992	Er	000	—
02·208	Gd	000	—
08·811	Sa, –	000 *N*	—
13·935	Dy, Tb	0000	—
16·541	Ho	0000	—
16·914	(Eu)	00	—

λ	Hfb.	*i*	Rwl.
3417·095	Gd, –	1	Ti
18·864	Gd	000 *N*	—
22·424	(Pr), –	000 *N*	—
22·629	Gd,[2] (Fe)	4	Fe
24·732	Gd	000	—
25·196	Tm	000	—
26·349	Ce	0000	—
28·626	(Yb)	1	—
30·071	(Tm)	0000 *N d*?	—
33·163	Gd, –	3	Co
33·290	(Er)	0000	Pd *
34·053	Th	0000	—
34·512	Dy	000	—
39·365	Gd	000 *N*	—
39·841	Th	0000	—
39·941	Gd	0000	—
40·138	Gd	000 *N*	—
41·248	(Er)	000 *N*	—
48·926	Y	0	—
51·369	Gd	0000	—
54·455	Dy	00	—
55·058	Gd	0000	—
56·148	Tb, Dy	00	—
56·634	Dy	0000 *N*	—
61·111	Tb, Dy	00	—
61·321	—	0	Co, La
62·347	Tm	000	—
64·113	Gd, (Pt)[7]	2	—
64·608	Yb, Er	1	—
67·407	Gd	00	Ti
68·347	Th	0000 *N*	—
69·114	Gd [2]	0	—
70·076	Th	0000	—
71·750	Dy	000	—

λ	Hfb.	*i*	Rwl.
3471·856	Er	000	—
72·916	Tb	000	—
73·363	Gd	0000	—
76·479	Yb, –	3	Co, Fe
78·923	Yb	0	Co
81·439	Gd	0	Cr
81·952	Gd	00	Fe *
84·995	Ho	1	Fe *
86·962	(Er)	0000	—
92·112	Gd	00	Co
94·551	Gd	0000	—
96·224	—	0	Co, Y
99·248	Er, (Ti)	0	Ti
3504·733	(Ce)	0000	—
05·628	Gd, –	0	Zr
07·687	Th	0000 *N*	—
11·209	(Eu)	0000 *N d* ?	—
11·763	Th	0	Mn *
12·639	Gd	0000	—
15·701	Ho	2	Fe *
16·021	(Yb)	0000 *N*	—
17·523	(Ce)	0000	—
24·130	Dy	000	—
25·063	(Er)	000 *N*	—
29·035	Th, –	1	Ni
31·851	Dy	1	—
34·206	(Ce)	0000	—
35·090	Dy	00	—
35·660	Tm	0000	—
35·868	Sc	3	—
36·165	Dy	00	—
37·265	Th	0000 *N d* ?	—
38·643	Dy	1	—
42·473	Dy	0000	—

λ	Hfb.	*i*	Rwl.
3542·910	Gd	0000 *N*	—
43·143	(Er)	0000	—
45·971	Gd, –, (Fe?)	3	Fe, C
49·151	Y	2	Y?
49·513	Gd	0	C
51·800	Dy	1	—
54·593	Yb, –	2	—
57·204	Gd	0000	—
57·370	La	000	—
58·672	Sc, –	8	Fe
61·796	Tb	0000	—
63·298	Dy	000 *N*	—
67·881	Sc [8]	2	—
68·451	Sa	0000	—
70·736	Yb	0000	—
72·712	—	6	Sc, –
74·297	Dy	0000	—
74·559	La, –	1	La
76·393	Dy	0000	—
76·527	–, Sc	3	–, Sc?
77·099	Dy	0000	—
77·605	Ce, –	1	—
80·682	Er, –	1 *N*	—
81·067	– Sc	5	—
82·081	Gd, –	1	—
84·660	—	2	Y
85·105	–, Gd	6	Fe
85·214	Dy, Tb	000	—
90·609	Gd, Rh? [9]	2	—
90·651	Sc	2	—
92·745	Sa, Nd	0000	—
92·819	Gd, (Fe)	3	Fe
93·049	—	0	Y
98·167	Nd	0000	—

λ	Hfb.	*i*	Rwl.
3600·513	Tb, Dy	0000	—
00·880	—	3	Y
01·220	Th, La	0000	—
02·060	—	1	Y
04·419	Sa, –	1	Ti
04·843	(Er)	0000	—
06·272	Dy, Tb	0000	—
07·264	(Gd)	0000	—
08·871	Gd, Tm	1 *N*	—
09·611	Sa, –	2	—
09·853	(Ce)	0000 *N*	—
09·907	Nd	000 *N*	—
11·189	—	2	Y, Mg?
11·443	Yb	000	—
13·587	–, Gd	2	Ti
13·947	Sc [10]	4	–, Sc
14·159	(Th)	0000	—
15·949	Nd	0000	—
16·710	–, Er	4	Fe
17·315	Gd	0000	—
19·061	Er, (Nd)	0	—
19·915	–, Yb	2	Fe
20·578	Gd	0000	—
21·110	Y	00	Y?
21·340	Sa, Nd	2	—
22·694	(Eu)	0000 *N*	—
25.766	Th	0000 *N*	—
28·847	—	2	Y, Mg?
28·967	—	2	La
29·652	(Gd)	0000 *N*	—
30·374	Dy, Tb	0	—
30·876	Sc [11]	4	—
30·918		3	—
33·277	—	2	Y

λ	Hfb.	*i*	Rwl.
3633·447	Tb	0000 *N*	—
33·651	Er, (Ti)	00 *N d*?	Ti
34·417	Sa, Nd	0000	—
35·419	Dy	000	—
38·910	Sa	0000	—
41·366	Er	0000 *N*	—
42·912	—	2	Sc
44·089	Dy	000	—
45·475	Sc, Sa	3	Sc?, –
45·552	—	00	La
45·765	Gd	0000	—
46·074	Er	0000	—
46·335	Gd	1	Ti
46·491	Pr, –	0000 *N d*?	—
48·461	(Pr)	00 *N*	—
50·507	Tb, Er	0000	—
51·337	Gd	00	—
51·940	—	4	–, Sc
53·023	Er	0000	—
53·260	Nd	0000	—
54·813	Gd	1	Fe
55·990	Ce	0000	—
59·003	Tb	0000 *N*	—
62·195	La	0000	—
63·835	Th	0000 *N*	—
64·548	(Er)	0000 *N*	—
64·760	Gd, –	2	Y
65·325	Nd	0000	—
66·676	Sc, –	1	—
68·634	Y	00	—
69·823	Yb, –	1	—
70·860	Yb	00 *N*	—
71·358	Gd	000	—
72·452	Dy, Nd	0000	—

λ	Hfb.	*i*	Rwl.
3673·679	Nd	0000	—
75·255	Yb	0000 *N*	—
75·692	Th	0000	—
82·807	(Er)	0 *N*	—
84·460	(Er)	0000	—
85·913	Nd–Dy	0000	—
87·899	Gd	0000	—
88·558	–, Eu	4	Ni
90·732	Yb	0000	—
91·315	Tb	000 *N*	—
92·790	Er, (Fe)	2	Fe
94·344	Yb 4	3	Er? *
94·954	Dy	000	—
96·890	(Gd)	000	—
97·883	Gd	000	—
99·877	Gd	000	—
99·962	(Yb)	1	—
3700·406	Tm	000	—
00·876	Er	000	—
00·942	(Th)	000	—
01·512	Tm	000	—
01·749	Dy	000	—
02·962	Tb	000 *N d*?	—
03·962	Tb	000 *N d*?	—
05·968	La	000 *N*	—
08·834	(Sa), –	000	Ti, Va
10·094	–, Ce	0	Ti
10·431	—	3	Y
11·254	(Pr)	000	—
11·440	(Th)	000	—
11·923	Tb	000 *N*	—
12·539	Er	000	—
12·856	Gd	000	—
13·693	La, (Gd)	000 *N*	—

λ	Hfb.	*i*	Rwl.
3714·359	Nd	000 *N*	—
14·926	Nd, –	0	Zr
15·615	La –	4	Mn? *
15·853	Nd	0000 *N*	—
16·517	Gd, Ce	00	—
18·665	Nd	0000	—
19·545	(Th)	0000 *N*	—
19·598	Gd	000 *N*	—
20·184	(Th)	0000	—
22·280	(Th)	00	—
23·651	Nd	00	—
24·399	Yb	000	—
25·090	Eu	0 *Nd*?	—
28·278	Nd	00	—
28·544	Ce – Sa	00	—
29·666	Er	00	—
30·732	Nd	00	—
32·356	(Eu)	000	—
33·222	Gd, Tm	000	—
35·694	Nd	000	—
36·107	Sa	0	—
36·619	Pr	00	—
38·211	Nd, Eu	00	—
38·281	Er	000	—
39·260	Fe, Sa	2	Fe
41·339	Th	00	—
41·453	Sa – Eu	0	—
43·626	Gd ?	2	—
47·492	Tb	00	—
47·694	Y, (Th)	1	—
49·884	Yb	000	—
50·448	(Nd)	1	—
50·648	(Er)	000 *N*	—
51·136	(Pr)	000	—

λ	Hfb.	*i*	Rwl.
3752·648	Nd	000	—
52·830	Nd	00	—
55·421	Tb, (Sa)	00	—
57·508	C, Dy	00	C?
58·099	(Gd)	0	—
58·456	Gd	0	—
59·096	Nd, –	0 *N*	—
59·215	—	1	La, C
60·844	Sa, Gd	00	—
63·008	–, Th	00 *N*	C
63·614	Nd	00	—
64·359	(Gd)	1	—
67·218	Gd ^{2}	0	—
68·544	Gd ^{12}	0	—
69·792	Nd	000	—
70·859	Gd, –	0 *N*	—
73·609	(Yb), –	00	C
74·473	—	3	Y
76·635	Tb	0	—
76·698	Y, (Mn)	1	Mn
78·301	(Sa)	0	—
80·564	Nd –	00	C
81·128	– Er	000 *N d*?	—
81·460	Nd	00	—
81·754	– Ce	1	C –
82·455	Y	00	C
83·224	(Gd)	000	—
83·954	Nd	00	C
84·391	Nd	0	—
86·983	Er	00	—
87·713	Gd	00	—
88·283	(Sa)	00	—
88·574	– Dy	0	C –
88·839	—	2	Y

λ	Hfb.	*i*	Rwl.
3790·972	—	1	La – C
91·332	Gd	000	C
91·885	(Yb)	1	—
94·107	Sa	0000	—
94·555	(Yb)	0	C
94·909	—	1	La
95·880	Tm, (Er)	00	C
96·531	Gd	0	—
99·159	Eu	000	—
3800·457	Pr	0 *N*	C? *
01·679	Ce –	0 *Nd*?	– C
03·618	Va, Nd	0	Va?
06·511	C, Dy	0	—
08·223	–, Ce	0	Co
12·205	Sa, –	0	C
14·154	Gd	0	—
16·252	C, Pr	0 *N*	C?
16·779	Gd, –	00 *N*	C
18·487	Y	1	—
18·891	C, (Gd)	000	C?
19·829	– Eu [18]	1 *Nd*?	C –
30·627	Er	0	—
30·801	Pr	0	C
31·657	Sa	000	—
33·026	Y, –	3 *N*	–, Ni
37·059	Gd [3]	1	—
38·345	Tm, –	1 *N*	—
38·675	Ce, – [2]	0 *N*	—
39·135	Sa?, Nd	0	—
40·893	La, –	1 *N*	Va
42·082	–, Nd, (Th)	0	C
42·354	Gd –	0 *d*?	– C?
42·500	Pr	000	—
44·714	Gd [2]	0	—

λ	Hfb.	*i*	Rwl.
3848·186	Tm	00	—
48·667	Nd	00	—
49·140	—	3 *d*?	La – C
51·733	Pr	00	C
51·895	Nd	00	—
54·343	Sa, Ce	0	—
55·088	La	00	C
62·627	– Nd	2	Cr? –
62·962	Tm, –	0	—
63·533	Nd, –	3 *N*	C
69·179	Nd, –	0	C
71·785	La	00	—
72·312	Dy	0	C *
74·258	Tb, Dy	00	C *
75·920	– Nd	2	C –
77·337	Pr	1 *N*	—
78·438	– Y, Ce [14]	2	C –
79·716	Nd, –	1	C
80·532	Nd, –	2	C
85·426	Sa, –	00	Co
86·568	—	0	La [15]
87·512	Yb, Tm	000 *N*	—
88·030	Nd	00	—
89·498	Pr, –	1 *d*?	Mn
89·810	Nd, –	2	Ni
90·068	—	1	Nd, Ce
90·222	Sa	000	—
90·707	—	1 *N*	Nd, –
91·084	Nd – Ho?	00	—
92·873	Er	000	—
94·768	Nd	00	—
94·850	Gd	0	Mn
95·224	—	1	Ce [2]
95·931	Gd	0	—

λ	Hfb.	*i*	Rwl.
3896·385	Mn?, Er	00	Mn
96·500	Er	00	—
96·917	—	0 *N*	Ce [2]
97·119	Sa	000	—
98·414	Ce [2]	00	—
98·645	Dy, –	0	Ti
99·015	(Pr)	0000	—
3900·361	Nd	0	—
00·973	(Th)	0	—
02·002	—	3	Nd –
02·567	Gd — Pr?	1 *N*	—
02·916	Er	0	—
03·398	Va, (Eu)	2	Va – Ce? *
03·553	Sa	000	—
05·017	–, Yb	1	Mn, –
06·044	—	3	Nd, –
06·438	Er, –	2	Co
07·251	Eu	0 *Nd*?	—
07·615	—	3 *d*	Fe – Sc
07·910	—	1	Cr, Nd
08·203	Pr	000	—
08·546	Pr	0	—
11·316	—	0	Nd
12·341	Nd, –	0	Va?
12·561	Ce –	0	—
12·963	—	2	Sc [31]
13·030	Pr	00	—
15·751	Dy, –	3	—
16·207	—	0 *Nd*?	Zr – La
16·545	Tm, –	3	—
16·661	– Gd	00	Mn
17·400	Eu, –	0	—
17·731	– Nd	0	Cr
18·396	Ce, –	0	Mn

λ	Hfb.	*i*	Rwl.
3919·035	Pr – Nd	0	—
19·708	–, Pr	0 *Nd*?	—
19·956	Ce, –	0	Cr
21·105	—	0	Nd
21·695	—	4	La –
21·855	—	4	Ce, Mn – Zr
22·043	Er, –	0 *Nd*?	—
22·560	Sa, –	1 *N*	Va
23·180	—	1	Pt, Ce
23·472	–, Gd	0	Sc *
25·677	Pr –	1	—
27·269	Nd –	0	—
27·585	Pr, –	1	—
29·363	—	2	Fe – La – Mn – Co
30·654	Eu [18]	0	—
30·804	Y	0	—
32·395	Er	00 *N*	—
33·523	Sc –	8 *N*	—
35·358	Tb	00 *Nd*?	—
38·439	(Pr), –	2	–, Cr
38·772	Er, (Yb)	0	—
39·007	Nd	0	—
39·659	Tb	00	—
40·499	Ce, –	0 *Nd*?	—
41·637	—	3 '	Cr, Nd
41·997	Sa –	1	– Mn
42·296	Ce, –	1	Ce?
42·747	Nd	000	—
42·886	—	0	Co – Ce
43·322	Sa, –	2	—
44·058	Ce	0	—
44·884	Dy	2	Fe? *
45·633	(Gd)	00	Cr?
49·199	—	1	La

λ	Hfb.	*i*	Rwl.
3949·544	Pr	00	—
50·497	—	2	Y
51·219	—	1	Cr, Nd
51·765	—	0 *Nd*?	Y
52·342	—	0	Nd
52·754	—	4	Ce – Fe
52·894	—	0	Mn, Nd? *
53·043	Nd? — [15]	3	—
53·641	Pr, Nd	000	—
56·476	—	4	Ce, Co – Ti
57·621	Nd	00 *N*	—
58·231	Tm	00	—
58·474	Tb	000	—
59·678	Gd	00	—
61·051	Ce	00	—
62·320	Nd, –	2	—
62·534	Pr	0	—
63·108	Sa –	00	—
63·252	Nd, –	3	Fe
64·059	Nd	00	—
64·663	(Er)	3	Ce, Fe
65·366	– Pr	0	– Co
66·494	(Er)	0 *N*	—
70·642	Sa	0 *N*	—
71·265	Pr'	000	—
72·134	Eu [13]	0 *Nd*?	—
72·313	Pr, –	2	Ni
73·262	Er	1	—
73·418	Nd	0	Fe? *
73·796	Er, –	1	Nd, Va, Fe
74·164	Gd	000	—
74·904	Er, –	6 *d*?	Co – Fe
76·009	—	2	Nd – Fe
76·416	Sa	00	—

λ	Hfb.	*i*	Rwl.
3978·715	Dy	00	—
78·809	—	3	Co – Cr, Ce
79·344	Sa	00	—
79·466	(Gd)	00	—
79·664	—	4	Nd – Co
80·289	(Er)	00	—
81·024	Ce	00	—
81·122	Nd [3]	1	Ce *
81·376	–, Nd	1	Cr
82·142	Tb, Dy	2	Fe? *
82·470	Nd, (Er)	00 *N*	—
82·742	—	3	Mn – Y
83·053	–, (Ce)	00	Mn
83·811	Dy	00	—
84·806	—	2	Ce – Zr
86·321	—	3	Fe – Nd
88·114	Yb [16] – (Th)	0	Er? *
88·617		0	
88·659	—	0	La
88·705		0	
89·592	Ce –	00 *N*	—
90·129	– Sa	1	Mn – Cr
90·248	Nd	0	—
91·095	Yb –	00 *Nd*?	—
91·892	Nd	0	—
92·041	(Pr)	00	—
92·538	—	1	Fe, Ce
93·451	Sa	00 *N*	—
93·978	Ce	00	—
94·828	Ti, Nd	2	Nd?
94·958	Pr	00	Ti *
95·899	—	1 *Nd*?	La
96·498	Gd	00	—
96·682	Tm	00	Sc *

λ	Hfb.	*i*	Rwl.
3996·752	Sc	00	—
96·845	Dy	00	—
97·895	Gd –	00 *N*	—
98·053	Nd, –	4 *d* ?	Co
99·295	Pr, (Er)	000	—
99·393	Ce	0	—
4000·296	Pr	000	—
00·611	Dy, –	2	Fe
00·729	Nd	00	—
01·387	–, Gd	000	Mn
02·652	Tb –	0 *d*	Fe * – Ti
03·489	Th	000	—
03·912	—	3	Ce – Fe – Ti
04·168	Nd	0	—
04·412	Nd	000	—
04·855	Pr	000	—
05·067	Gd [3]	1	—
05·632	Tb	1	Fe *
05·802	Ce	000	—
07·586	Nd	00	—
08·075	Co – Tm, (Er)	0 *N*	Co – ?
08·322	Er	0	—
08·882	Pr	00	—
09·022	Gd [3]	2	—
09·291	Er [3]	1	—
10·735	Pr [3]	3	—
11·451	Dy	00	—
12·399	—	1	Nd, Zr
12·541	—	4	Ti, Ce
12·757	Er	00 *N d* ?	—
12·858	Nd	00	—
13·964	(Gd), –	5	Fe [17]
14·677	Sc, –	5 *d* ?	Fe
15·086	Ce, –	0 *N d* ?	Ce

λ	Hfb.	*i*	Rwl.
4015·532	La, Pr	0	—
15·760	Er [3]	3	—
16·835	(Eu)	00	—
17·724	–, Eu	1	Ni?
18·996	Nd	00	—
19·201	—	1	Ni – Ce [32]
19·287	Th	00	—
20·547	—	1	Sc
20·639	Er, Tb, (Tm)	1	Fe *
21·057	—	3	Nd – Co
21·493	—	0	Nd
21·893	—	0	Nd
23·165	—	0	Nd
23·379	Sa	00 *N*	—
23·705	—	000	La
23·834	—	2	Sc
24·593	Ce, Dy	00	—
25·972	—	2	Co – La
27·939	Dy	00	—
28·272	(Gd)	000	—
28·497	—	4	Ti – Ce
30·646	—	5	Nd – Fe – Ti
31·048	(Gd) [3]	2	Fe? *
31·492	Ce	0	—
31·865	—	2	La, –
31·942	Pr, –	2	Fe?, Nd, Mn, Va
35·265	Sa	00 *N*	—
36·717	(Th), La	00	—
37·449	Gd	00	Cr
37·837	—	1	Ce, – [32]
38·094	Gd	00 *N d*?	—
38·627	Pr	00 *N d*?	—
40·013	—	00	Y
40·937	Pr, –	1 *d*?	Ce, Nd, Co

λ	Hfb.	*i*	Rwl.
4041·803	– Sa	1	Zr –
42·137	Dy	000	—
42·743	Cr, Ce	0	Cr, Nd *
43·054	–, Sa	0	La
43·145	Er	000	—
44·992	Pr	000	—
45·108	Sa	000	—
45·371	—	1 *N*	Ce, Mn
45·662	Ho	0	—
46·117	Dy	1 *N*	—
46·490	Ce	00 *N*	—
46·764	Pr	000	—
47·461	Ce? —	2	Ce [83] – Fe
47·823	—	0 *N*	Y
47·958	Sc	0 *N*	—
48·910	– Nd	5	Mn – Cr
49·590	Gd, Er	00	—
50·019	Gd	00	—
50·254	—	000	La
50·716	Dy	00	Zr [18]
51·336	Nd, Pr	00 *N d*?	—
52·176	(Ce)	0	—
52·454	–, Yb	2	Fe
52·992	Tb	000	—
53·424	–, Gd	2	Fe
53·639	Ce	00	—
53·839	Gd	00	—
54·085	Ho	000	—
54·714	—	00 *N*	Sc
54·863	(Gd)	0	—
55·023	–, Pr	3	Fe
55·189	—	3	Ce – Ti – Fe, Zr
56·708	Pr, Sc	00	—
57·955	Nd	000 *N*	—

λ	Hfb.	*i*	Rwl.
4060·117	Nd	00	—
61·244	—	3	Nd –
61·450	(Gd)	000 *N*	—
62·385	Ce, Pr	00	—
62·789	Gd	0	Cu?
63·895	Pr	00	—
63·105	Ce	00	—
63·573	Gd	0	Mn *
64·728	Sa, Ta	00	—
64·913	—	000	La
66·870	Sa	0	—
67·558	—	000	La
68·488	Sa	000	—
68·999	(Pr), Ce	00	—
69·423	Th, –	0	Nd
70·431	(Pr), – Gd	3	Mn
73·052	—	00 *N d*?	Ce [32]
73·287	Dy	0	—
73·921	Gd, –	4	Ce, Fe
75·257	—	2 *N*	– Nd
75·468	—	0 *N d*?	Nd
75·857	—	0	Ce [2]
76·995	Sa, –	00	Ce
77·498	—	1 *N d*?	La, Y
77·731	Nd	0 *N*	—
78·126	Dy	0	—
78·631	Gd –	3	Ti
78·801	– Gd	000 *N d*?	—
79·977	Pr	0	Fe *
80·368	—	3	Fe, Nd, Cr
81·190	Pr	00	—
81·385	—	0	Zr, Ce
81·415	Er – Zr	1	—
82·060	Pr	000 *N d*?	—

λ	Hfb.	*i*	Rwl.
4082·589	—	3	Sc – Fe – Ti
82·749	Sa, –	0	Co
83·376	—	0	Mn, Ce
83·515	Pr	000	—
83·783	—	4	Mn, Y
85·161	– Th	4	Fe
85·408	—	1	–, Ce
85·727	Gd	00	—
85·008	Nd	00 N	—
86·861	—	1	La
87·755	Er, Tm	00	—
87·855	Gd	000	—
89·748	La	000 *N*	—
94·220	Sa	000	—
96·262	—	2	Fe, Nd
97·976	Pr	000	—
98·335	–, Nd	5	Fe
98·587	Pr	000	—
98·746	Gd	2	–, Co?
99·054	Gd	000	—
99·727	—	000	La
4100·731	Er	000	—
00·901	Pr, –	4	Fe [19]
01·067	(Th)	0	—
02·541	—	0	Y
05·019	Cr?, La	000	Cr
05·981	Tm	000	—
06·738	Nd	00	—
07·099	Ce, Eu	0	—
07·449	Sa	00	—
07·649	—	5	Ce – Fe
08·041	(Eu)	00	—
08·547	– Th	00	Zr
09·215	Nd [2]	3	Fe *

λ	Hfb.	*i*	Rwl.
4109·609	Nd	1	Nd?
10·547	Ce	00	—
10·691	Nd –	4	Co
11·509	Dy, Ce – Gd	1	Ce?
12·234	(Eu)	00	—
14·021	Nd, Pr, Sa	00 *N d*?	Mn
15·533	Ce	00 *N*	—
17·113	(Ce)	0	—
18·307	Ce	0	Va [20]
18·708	Pr, Sa, (Er), –	5	Fe
19·411	(Eu)	00 *N*	—
19·950	Ce	0	—
20·995	Ce	00	—
23·384	—	1	La
23·664	—	1	Ce, Va – Mn
24·030	Ce, Nd	00	Ce?
24·097	Sa	00	—
24·782	Dy	000	—
24·938	(Ce)	0	—
25·067	Y	0	—
27·426	Eu, –	0	Cr
27·529	—	00	Ce
27·957	—	4	Ce [32] – Fe
28·251	—	6 *d*	Ce [32] – Va
28·461	Y	00	—
28·543	Ce	00	—
29·337	Pr – Sa	3	Ce – [32]
29·616	Dy, –	2	—
29·882	Eu [21]	1	—
30·520	Gd	00	—
30·847	Ce	000	—
31·271	—	1	Ce, Mn
31·606	Gd – (Er)	000	—
32·435	Gd	0 *N*	—

λ	Hfb.	*i*	Rwl.
4133·510	Nd	00	—
33·965	—	0	Ce
35·325	Sa	0000	—
35·447	Nd	0 *d*?	—
35·610	Ce, –	0 *N d*?	—
37·272	(Eu), La?– Gd	0000	—
37·809	—	1	Fe, Ce
38·515	(Tm)	0 *N*	—
40·400	Sc, Th	0	—
41·690	Dy, Tb	0 *N*	—
41·809	(Th)	0 *N*	–, La *
41·910	—	0000	La [6]
42·562	—	00	Ce
43·000	Y	00	—
43·103	Er	0	—
43·316	Pr	000	—
44·538	Tb	00 *N*	—
44·674	Ce, –	0 *N d*?	Ce?
45·152	—	0	Ce
46·299	Nd	0	—
46·655	Pr	00	—
46·845	(Sa)	0 *N*	—
48·330	(Th)	00	—
48·552	Pr	00	—
49·077	(Ce)	00	—
49·957	Sa	000	—
50·056	—	00	Ce
50·139	(Th)	00	—
51·129	—	1	Ce – Zr, Ti
51·225	Er	00	—
51·826	Nd	00	—
52·108	—	2	Fe, La, Ce
52·343	–, Sa	3	Fe
52·474	Sc [22]	00	C

λ	Hfb.	*i*	Rwl.
4152·927	—	0	La – Cr
55·359	Sa	00	—
56·238	—	0	Nd [31]
59·207	Ce	00	—
60·722	Nd	0	—
62·825	(Th), –	1 *N*	Ce, [32] C
63·449	La, –	00	—
63·642	– Ce	0 *d*	—
64·313	Pr	000	—
65·328	Sc [22]	00	—
65·759	—	1	–, Ce
67·013	Ce, –	00 *N d* ?	—
67·737	—	1 *N d* ?	Y – Ru ?
68·025	Ce?	2	Ce – Fe
68·133	Dy, (Nd), –	2	Ni, C
69·628	Sa	00	—
70·009	Ce	00	Cr
71·720	Sa	00	—
72·296	—	2	Fe – Ce [32]
72·447	Pr, La	000	—
74·240	Y	0	—
74·567	(Sa)	0	—
77·495	—	0	Nd
77·698	Y	3	—
78·160	Sa	00	—
78·223	Th, –	2	—
78·790	Nd	00	—
79·542	Pr, – [23]	3 *d* ?	Va, –
79·743	Nd	00	—
80·159	(Th)	000	—
81·065	Yb – (Er)	000 *N*	Ti
81·243	Ce – Sa, Ta	00	—
83·964	Sa –	00 *d* ?	—
84·472	Gd [2]	2	—

λ	Hfb.	*t*	Rwl.
4185·155	Nd	000	—
85·523	Ce	00 *N*	—
86·778	—	2 *N*	Ce – Zr
87·409	Ce, –	00	La, C
87·747	Tm, –	2	Fe
88·255	Sa	00 *N*	C
89·723	Pr – [23]	2	C, –
90·147	Er	0 *N*	Mn
90·874	Er, Gd	1 *N d*?	C, Co
91·240	Gd	00 *N*	—
93·433	Ce	00	—[24]
94·035	(Ce), –	00	C
95·155	– Nd	0 *d*?	C
96·699	—	2	La
97·806	Gd	00	—
98·800	Ce, –	3	Fe
99·434	Y	00	—
4201·402	Ce, (Pr)	00	—
03·100	Ce	0 *N*	—
03·851	Tm	0000	—
04·163	La, –	4	La
04·884	Y	1	—
05·054	Gd	000	—
05·186	Eu [13]	1	—
06·289	Sa	000 *N*	—
06·735	Dy, Sa	1	—
06·862	Pr, (Fe)	3	Fe
08·415	Pr	00	—
09·015	Th	00	C
11·899	Dy, –	0	Mn, C
12·200	Gd	00 *N*	—
13·323	(Nd), –	0 *N*	C, Cr
14·198	(Ce)	00	—
15·075	Gd	00	C

λ	Hfb.	*i*	Rwl.
4215·337	Tb, Dy	00	C
17·365	– Gd	1	—
17·720	Ce, –	5 *d*?	La, Fe – Cr
18·214	Dy	00	—
18·558	Er –	1 *Nd*	– Zr
18·726	Yb	000	—
20·813	Sa, Y	00	—
21·179	(Er)	000	—
21·332	Dy	00	—
22·768	Ce	0	—
25·378	Dy	0	—
25·490	Sa, Pr 25	000	—
27·918	Nd – Ce	0	Zr
31·958	La	00	—
32·201	Dy	000 *N*	—
32·544	Nd	00	—
34·385	Nd –	0 *N*	—
34·707	Sa	0 *N*	Zr *
34·895	(Er)	000 *N*	—
35·894	Y	0	—
36·112	–, Y	8	Fe
37·836	Sa	0	—
38·555	—	1 *N tr*?	La
40·014	Nd – Ce	3	Fe
40·246	Pr	000	—
41·485	Pr	00 *N*	—
42·322	(Er), Tm	0	—
44·888	Sa	00	—
46·071	Ce	00	—
46·729	Gd	000	—
47·726	Pr	0	—
47·996	—	5	Sc
49·648	– Sa	1 *N*	—
51·662	(Pr)	000	—

λ	Hfb.	*i*	Rwl.
4251·905	Gd,[26] Tb	00	Ti *
52·618	Nd	00 *N*	—
53·522	(Ce), Gd	00	—
55·406	Tb, –	1	—
56·575	Sa	00	Zr
57·977	Nd	000	—
62·287	Gd, (Cr)	00	Cr
62·498	(Pr), –	0	Cr
62·864	Sa	0	—
63·581	Nd	00 *N*	—
63·760	—	0 *d*?	La
63·996	Pr	000 *N*	—
65·238	Sa	000	—
66·894	Nd, –	0	Cr
69·625	—	0	La
70·329	– Ce	1 *N*	Ti –
70·880	Ce	00 *N*	—
72·458	Pr	0 *N*	—
75·262	Nd	00	—
75·814	La	0	—
76·685	(Er)	000	—
78·704	Tb	0000	—
79·874	Sa, –	2 *N d*?	—
80·698	Gd [27]	0	—
80·789	Nb, (Gd)	0	—
80·938	Sa	1	—
81·113	Sa, –	1	—
82·370	Sa	00	—
84·689	Nd	00	—
86·741	Er – Sa?	00	—
87·159	—	2	La
90·080	Ce, –	1	Ti
93·273	(Pr)	3	—
94·936	Sc, –	2	Zr

λ	Hfb.	*i*	Rwl.
4295·194	Dy, –	3 *d*?	—
96·235	–, Gd	0 *N*	La
96·840	Ce	1	Zr? *
96·933	Sa, Zr	0 *N*	—
97·908	Pr – Nd	0	Cr, Va
99·524	Ce	0	—
4300·478	Ce	1 *N*	—
02·460	Y, –	2	—
03·754	Nd, Pr	1	—
05·013	Gd – Sa	0 *N*	—
05·266	(Ce)	1	—
05·871	Sc	2	—
06·006	Pr	1	—
09·198	Sa, –	2	Fe
09·792	Y	1	—
09·876	(Ce)	1	—
14·248	—	3	Sc [31]
14·673	Nd	0 *N*	—
17·125	Yb	0	—
19·099	Tb, Sa	00	—
20·318	(Th)	00	—
20·907	Ce –	3	Sc [31]
21·294	Gd	00	—
22·670	La	0 *N*	Cr
23·670	Pr, –	1	—
25·152	—	4	Sc [31]
25·777	Gd [2]	1	—
25·939	–, Nd	8	Fe
26·641	Tb	000 *N*	—
27·274	Gd, –	3	Fe
28·080	Nd, (Fe)	2	Fe
28·589	Pr	000	—
29·213	Sa	00	—
29·559	Pr	0 *N*	—

λ	Hfb.	*i*	Rwl.
4330·743	Gd – (Eu)	000	—
33·925	—	1 *N*	La
34·174	Pr 28	00	—
34·354	Sa –	00	—
35·102	—	0	La
35·944	Pr	00 *N*	—
36·295	Sa	0000	—
36·433	(Ce)	00	—
36·602	Tb	000 *N d*?	—
37·945	Ce	00	Sr?
38·616	Tb, –	0 *d*?	—
38·854	Nd, Pr	0	—
41·410	Gd	00	—
42·219	Nd	000	—
42·350	Gd	0	—
42·750	Tb	000 *N*	—
44·451	– Pr	2	Ti –
46·068	Sa, (Eu)	0 *N*	—
46·580	Gd	00	—
48·933	Y	00 *N*	—
49·967	Ce	00	—
50·550	– Pr	00 *N*	Ba?
51·464	Nd	00	—
52·235	Sa	0 *N*	—
53·337	Tb	00 *N*	—
54·597	La	00	—
54·776	Sc, –	1	—
54·927	(Eu)	0 *N*	Fe? *
55·112	Pr	00 *N*	—
55·257	Eu, –	2	Ca? *
56·163	Nd, –	0	Ni
58·328	Nd	0	—
58·879	—	0	Y – Zr
59·236	Pr	000	—

λ	Hfb.	*i*	Rwl.
4359·907	Pr, –	0	Zr
60·067	Tm	00	—
61·091	(Gd)	000	—
61·219	Sa	000 *N d*?	—
62·198	Sa	000	—
63·629	(Sa)	0	—
64·349	Nd, –	1	—
64·827	–, La	00	Ce
66·572	Nd	00	—
68·224	Sa	00	—
68·462	Pr	0	Ni
68·801	Nd	0	—
71·748	Pr	000	—
74·628	Sc	3	Sc, ^{31} Fe? *
75·103	Y, Va? – Sa	2	Va, Mn
75·216	Nd?	000	—
78·419	Sa –	2 *N d*?	—
80·521	(Pr)	00	—
82·045	Th ^{29}	00	Mn *
82·325	Ce	00	—
82·928	Nd –	2	– Fe
83·332	Ce, (Gd, Eu)	00 *N*	—
84·284	Pr, –	0 *N*	—
84·873	–, Er	3	Va
84·986	Sc	0	—
85·406	– La	1	La
85·833	Nd	00	—
86·616	(Tm)	0	—
90·034	La	00	—
91·123	Sa, Gd	2	Fe
91·306	Th	000	—
91·642	Gd	00	—
91·823	Ce	0	Co
93·974	Yb, –	0	Va?

λ	Hfb.	*i*	Rwl.
4396·224	Pr	00	—
98·178	Y	1	—
99·379	Ce	00	—
99·451	Pr, –	0	Ni
4400·149	Pr, –	00 *N*	—
00·555	—	3	Sc [31]
01·020	Nd, (Ni)	0 *N*	Ni
03·241	Sa	00	—
03·815	Pr	00 *N*	—
08·956	Pr	00 *N*	—
09·525	Dy	00 *N*	—
10·817	Ce	000	—
11·240	–, Nd	1	Cr –
12·415	–, Nd	0	Cr
13·944	Pr	000	—
14·896	(Gd)	000	—
15·722	Sc	3	—
17·740	Sa	00	—
18·944	Ce	00 *N*	—
19·265	Pr?, La	00 *N*	—
19·440	(Sa)	00 *N*	—
19·768	Er, Pr	000	—
20·686	Sa	00	Zr
21·290	Sa	00 *N*	—
22·666	Er	00	—
22·741	—	3	Fe, Y
24·531	Sa	00	—
24·748	Pr –	0 *N d* ?	—
27·266	(Ce), –	2	Ti
27·760	—	000	La
28·083	Ce	00 *N*	—
30·070	—	00 *N*	La
31·525	Sc, –	0	—
32·477	Pr, Nd	0000	—

λ	Hfb.	*i*	Rwl.
4433·089	Th	000 *N*	—
34·057	Sa	000	—
34·504	Sa	00	—
39·332	Yb	0 *N d*?	—
42·842	La	000	—
44·385	Sa	0	—
44·862	Ce	00	—
46·566	Nd	00	—
47·190	Pr	0000	—
49·507	Ce	00	—
49·882	Dy	00	—
50·925	Ce	00	—
51·752	Nd, –	3	Mn
52·171	Nd –	0 *N*	Va
52·311	La	0000	—
52·903	Sa	00	—
54·836	Sa	00	—
55·980	La, –	2	Mn
58·690	Sa	0	Cr
60·389	Ce	0	Va *
62·592	Nd	00	—
63·152	Nd	00	—
65·519	(Th), –	0	Cr
65·775	Nd	00 *N*	—
66·147	Pr, –	00 *N*	—
67·248	Gd	000	—
67·498	Sa	00	—
68·317	Dy	000 *N*	—
68·800	Pr	000	—
69·150	La	00 *N*	—
69·441	Nd	0000	—
71·408	Ce	0	Ti
72·571	Sa	000	—
78·792	Sa	00 *N*	—

λ	Hfb.	*i*	Rwl.
4478·982	Gd	00 *N*	—
81·195	Gd	00	—
83·513	Gd	0000	—
84·078	Ce	0	Co
87·076	Ce	0	—
87·685	(Th)	00	—
88·852	Th	000	—
97·268	(Gd)	000	—
99·666	Sa	000	—
4500·932	Er	000	—
01·946	Nd	0 *Nd*?	—
06·092	Y	000	—
06·497	Gd	00	—
06·776	Nd	00	—
10·344	Pr	0000	—
10·708	Th	000	—
13·491	Nd	000	—
14·662	Gd, –	0	Cr
15·273	Sa	0000	—
17·764	Pr	000	—
19·806	Sa, Gd	00	—
22·539	La 80	00	—
22·802	Eu 3	3	—
23·250	Sa – Ce	0	—
24·090	Sa	00	—
26·269	La	0	Cr
27·954	Y	0	—
28·647	Ce	0 *N*	—
34·340	Pr, –	1	—
36·094	–, Pr	2	Ti
36·675	Sa	00	—
38·138	Sa	00 *N*	—
41·483	Nd –	0	—
42·234	Sa	000	—

λ	Hfb.	*i*	Rwl.
4542·785	Nd, –	0	Cr
52·314	(Er)	0	—
52·824	Sa	000	—
53·796	Yb	0000 *N*	—
54·626	Sa –	1	—
55·830	Th	000	—
58·640	La	00	—
60·457	Ce	00	—
60·589	Sa	00	—
61·145	Ce	00	—
62·541	Ce	0	—
63·413	Nd – Er	00	—
66·031	(Ce)	000	—
66·414	Sa	00 *N*	—
72·457	Ce	00	—
75·075	La	00 *N d* ?	—
77·868	Sa	00	—
79·062	Nd	00	—
79·506	Nd	0	—
80·228	–, La	3	Cr
82·683	(Ce)	00 *N*	—
85·001	Sa, –	2	—
93·704	Sa, –	1	—
94·113	Ce	0	—
97·211	(Gd), Nd	00	—
4606·574	Ce	00 *N*	—
06·687	Sa	000 *N*	—
13·544	—	3	Cr, La
15·896	Sa	00	—
20·072	La	0000	—
27·392	Eu	00 *N*	—
28·335	Ce	0	—
42·424	Sa	00	—
45·483	La	000	—

λ	Hfb.	*i*	Rwl.
4655·634	La	000 *Nd*?	—
62·693	La	0	—
69·568	Sa	000	—
69·829	Sa	00	—
70·590	Sc, –	2	—
75·053	Y	000	—
75·785	Er	0	—
77·096	Sa	00	Ti *
82·529	Y –	1	– Co
92·699	La	00 *N*	—
4704·587	Sa	00	—
44·008	Sc	000	—

* Unrichtige Identifikation bei Rowland.

[1] Große Differenz der λ im Funken und Bogen.

[2] Tritt im Sonnenspektrum zu stark auf.

[3] Im Sonnenspektrum viel zu stark; eine andere Koinzidenz aber nicht auffindbar.

[4] Eine der stärksten Yb-Linien.

[5] Starke Funkenlinie des Th.

[6] Tritt im Sonnenspektrum auffällig schwach auf.

[7] Im Sonnenspektrum viel zu stark. Die Pt-Linie gehört zu den schwächsten.

[8] Wahrscheinlich Sc; möglicherweise kann aber auch 3567·835 die fragliche Sc-Linie im Sonnenspektrum sein.

[9] Im Sonnenspektrum viel zu stark. Eine andere Koinzidenz als etwa mit der schwachen Rh-Linie war nicht auffindbar.

[10] Eine der stärksten Sc-Linien.

[11] Wegen großer Differenz der λ im Funken und im Bogen ist es unsicher, welche Linie die Sc-Linie ist.

[12] Stärkste Gd-Linie.

[13] Sehr starke Eu-Linie.

[14] Bei Bertram tritt die Ce-Linie als Verunreinigung außerordentlich stark hervor.

[15] Dieser Wert liegt im Sonnenspektrum zu hoch.

[16] Diese Yb-Linie tritt im Sonnenspektrum auffallend schwach hervor (besonders stark im Bogen).

[17] Die Fe-Linie ist viel zu schwach, um im Sonnenspektrum mit der Intensität 5 auftreten zu können.

[18] Zr, welches Rowland angibt, gehört wohl zu 4050·643.

[19] Die Fe-Linie gehört zu den schwächsten, kann also im Sonnenspektrum nur einen geringen Betrag der Intensität haben.

[20] Va hat die Wellenlänge 4118·347 statt 4118·307.

[21] Stärkste Eu-Linie.

[22] Tritt im Sonnenspektrum schwach auf.

[23] Eine der stärksten Pr-Linien.

[24] Bei 4192·258 und 4192·356 gibt Rowland La? an. Beide Linien gehören dem La nicht an.

[25] Zwei übereinanderliegende starke Linien des Sa und Pr, die im Sonnenspektrum auffällig schwach auftreten.

[26] Starke Gd-Linie.

[27] Eventuell kann auch 4280·647 statt obiger Linie Gd sein.

[28] Da Bertram den Wert 4334·072 anführt (um 0·1 A. E. tiefer), so ist eventuell 4334·063 im Sonnenspektrum als Pr anzusehen.

[29] Eine der stärksten Th-Linien. Das Mn, das Rowland hier irrtümlich angibt, soll in der vorigen Zeile bei 4381·875 stehen.

[30] Rowland gibt fälschlich 4522·418 als La an.

[31] Liegt im Sonnenspektrum zu tief.

[32] Rowland führt hier eine sehr schwache Ce-Linie an.

Untersuchungen über radioaktive Substanzen.

(VIII. Mitteilung.)

Über ein radioaktives Produkt aus dem Aktinium

von

Dr. **Stefan Meyer** und Dr. **Egon** Ritter v. **Schweidler.**

Aus dem Institut für theoretische Physik und dem II. physikalischen Institut der k. k. Universität in Wien.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 28. Februar 1907.)

Schon im April des vorigen Jahres[1] konnten wir über einige Erscheinungen berichten, welche sich ergaben, wenn man ein Blech der induzierenden Wirkung von Aktiniumemanation durch lange Zeit aussetzt. Man erhält dann bei der Messung der Aktivität des so induzierten Körpers zunächst den einfachen logarithmischen Gang des Abfalles, wie er der Halbierungskonstante von AcA + AcB, d. i. einem Wert von rund 36 Minuten, entspricht, aber der weitere Verlauf unterscheidet sich von der früher geltenden Annahme, daß diese Aktivität nach gleichem Gesetze restlos verschwinde — bloß in einem Falle hatten wir bei 48tägiger Exposition eine kleine Restaktivität nachweisen zu können geglaubt[2] — dadurch, daß Restaktivitäten nachweisbarer Menge erübrigten.

Diese Restaktivitäten nehmen mit der Zeit an Wirksamkeit ab und wir konnten seither trotz des leider noch nicht in ausreichender Menge verfügbaren Aktiniums wenigstens noch einige Beobachtungsreihen über den zeitlichen Gang der

---

[1] Anz. der kais. Akad. der Wiss. in Wien, Nr. XII vom 26. April 1906.

[2] Diese Sitzungsber., *114* (IIa), 1157 (1905).

Aktivitätsabnahme machen, die, wenn auch noch kein definitives, so doch ein vorläufiges Charakteristikum der neuen Substanz bieten.

Die folgenden Tabellen liefern einige Beispiele. Die Zeit t ist vom Moment des Abhebens des Bleches von dem flachen Gefäß, welches das Aktiniumpräparat enthielt und dem es als Deckel diente, gerechnet. J ist der gemessene Sättigungsstrom, J_∞ ist derselbe nach langer Zeit.

1. Platinblech, 102 Tage aktiviert.

t in Tagen	J in Volt/Minuten	$J - J_\infty$	$\log (J - J_\infty)$
0·8	6·70	5·10	0·708
2·8	6·40	4·80	0·681
6·9	5·70	4·10	0·613
8·9	5·10	3·50	0·544
13·1	4·30	2·70	0·431
15·2	4·00	2·40	0·380
16·8	3·95	2·35	0·371
20·1	3·40	1·80	0·255
*20·8	3·40	1·80	0·255
**20·9	3·20	1·60	0·204
21·9	3·20	1·60	0·204
31·1	2·42	0·82	0·914—1
36·8	2·30	0·70	0·845—1
43·8	2·11	0·51	0·708—1
49·8	2·00	0·40	0·602—1
53·8	1·99	0·39	0·591—1
58·8	1·98	0·38	0·580—1
65·9	1·90	0·30	0·477—1
73·8	1·80	0·20	0·301—1
87·1	1·65	0·05	—

$HC = 12{\cdot}3$ Tage
$\lambda = 0{\cdot}056$ 1/Tage
$\tau = 17{\cdot}7$ Tage

2. Kupferblech, 22 Tage aktiviert.

t in Tagen	J in Volt/Minuten	$J - J_\infty$	$\log (J - J_\infty)$
0·8	2·82	2·71	0·433
2·8	2·34	2·23	0·348
4·8	1·90	1·79	0·253
6·8	1·80	1·69	0·223
11·8	1·34	1·23	0·090
13·9	1·24	1·13	0·053
16·8	1·03	0·92	0·964—1
19·8	1·00	0·89	0·949—1
23·8	0·80	0·69	0·839—1
31·8	0·55	0·44	0·644—1
325·—	0·11	—	—

$HC = 12{\cdot}4$ Tage
$\lambda = 0{\cdot}056$ 1/Tage
$\tau = 17{\cdot}8$ Tage

3. Platinblech, 202 Tage aktiviert.

t in Tagen	J in Volt/Minuten	$J - J_\infty$	$\log (J - J_\infty)$
0·8	2·05	1·85	0·267
1·0	2·03	1·83	0·263
1·8	1·79	1·59	0·201
2·1	1·77	1·57	0·196
3·9	1·54	1·34	0·127
5·9	1·35	1·15	0·061
7·1	1·29	1·09	0·037
9·1	1·23	1·03	0·013
12·1	1·01	0·81	0·909—1
12·9	0·96	0·76	0·882—1
16·9	0·82	0·62	0·792—1
19·9	0·68	0·48	9·679—1
22·8	0·59	0·39	0·593—1
25·9	0·51	0·31	0·497—1
33·8	$0{\cdot}40_5$	$0{\cdot}20_5$	0·312—1
44·1	0·32	0·12	0·068—1
(∞)	(0·2)		

$HC = 10{\cdot}8$ Tage
$\lambda = 0{\cdot}064$ 1/Tage
$\tau = 15{\cdot}6$ Tage

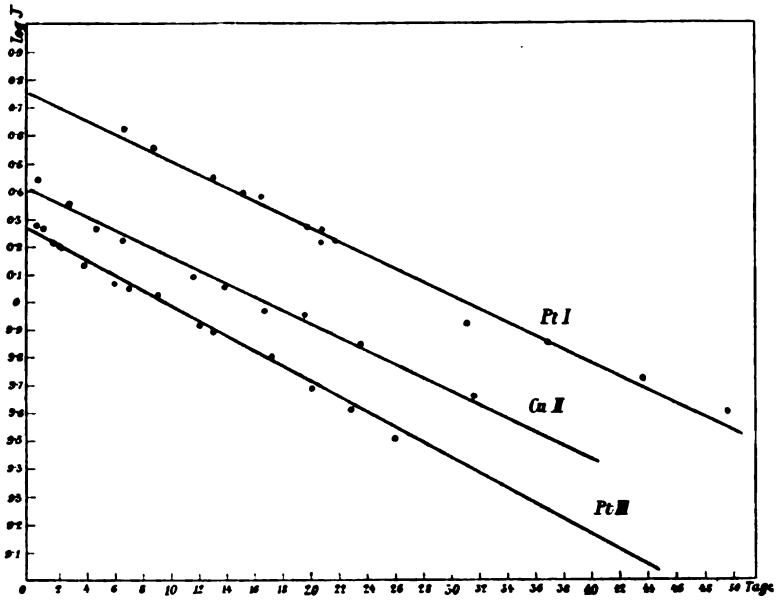


Fig. 1.

Der abgezogene Endwert, der nach langer Zeit erreicht war, J_∞, scheint nicht konstant zu sein, sondern nimmt vielmehr selbst langsam ab. Da uns aber mit Rücksicht auf die Kleinheit der Effekte hierüber genauere Angaben zu machen unmöglich ist, so erhellt daraus, daß in der Wahl des Wertes für J_∞ eine gewisse Willkürlichkeit und Ungenauigkeit liegen muß.

Es erscheint nicht unmöglich, daß durch die Annahme eines zweiten langsam zerfallenden Produktes sich einige der Abweichungen der gemessenen Punkte von den in der Fig. 1 eingezeichneten Geraden erklären ließen. Speziell die Kurven II und III, die unter sehr verschiedenen Bedingungen und zu sehr verschiedenen Zeiten aufgenommen wurden, zeigen auffallend übereinstimmenden Gang der Abweichungen in den ersten Tagen, der leicht als von der Type:

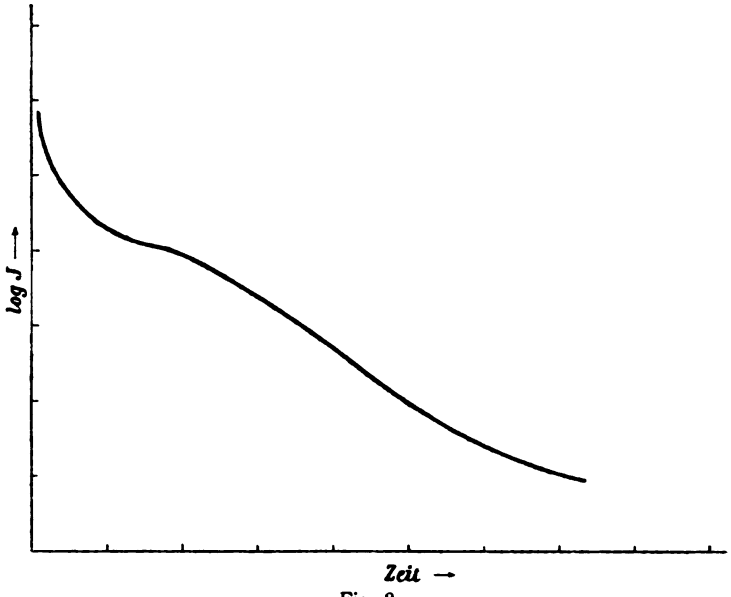


Fig. 2.

aufgefaßt werden könnte, die sich für die Koexistenz mehrerer Phasen (etwa Ac C, Ac D...) ergeben müßte.

Zumindest in erster Annäherung aber wird man die Ergebnisse der Fig. 1 als durch einen logarithmischen Abfall charakterisiert und die Kurven als Gerade auffassen dürfen, wobei sich aus $J = J_0 e^{-\lambda t}$ für die Zerfallskonstanten im Mittel

λ..... = 0·059 1/Tage
die Halbierungskonstante HC = 11·8 Tage
die mittlere Lebensdauer τ... = 17·0 Tage

ergeben.

Außer durch ihre Zerfallskonstanten wird man eine radioaktive Substanz durch ihre Strahlenart, ihre Verdampfungstemperatur, eventuell durch die von ihr erzeugten weiteren Produkte zu kennzeichnen trachten.

Über die Strahlen können wir nur aussagen, daß sie sicher wenig durchdringlich sind, indem sie von sehr geringen Aluminiumschichten bereits absorbiert erscheinen.

Durch Erhitzen bis zur Dunkelrotglut (dasselbe ist bei Präparat 1, Tabelle 1, zur Zeit zwischen 20·1 und 20·8 Tagen markiert durch *) und nochmals bis zur Hellrotglut (markiert

durch **) konnte eine wesentliche Beeinflussung der Aktivität und des weiteren Abfalles nicht festgestellt werden. Das Produkt verdampft demnach vermutlich erst über der Temperatur der hellen Rotglut.

Versuche an einer längere Zeit in unmittelbarer Nähe des untersuchten Präparates gebrachten Messingplatte eine induzierte Aktivität nachzuweisen, ergaben trotz Anwendung einer Untersuchungsmethode von bedeutend vergrößerter Empfindlichkeit (Quadrantelektrometer, das noch eine Aktivität von 0·004 Volt/Minuten in dem in den Tabellen angegebenen Maße hätte erkennen lassen) ein durchaus negatives Resultat.

Es ist daraus zu schließen, daß eine induzierende Emanation von der untersuchten Substanz nicht abgegeben wird.

Berechnet man mit Hilfe der Halbierungskonstante $HC = 36$ Minuten die Aktivität J von AcB im Momente des Abhebens des induzierten Bleches vom induzierenden Aktiniumpräparat und vergleicht damit den Restwert R nach etwa 24 Stunden, so ergibt sich für die verschiedenen Präparate, die durch eine Zeit Z der Aktivierung ausgesetzt gewesen waren:

	Z Tage	J Volt/Minuten	R Volt/Minuten
1. Platinblech	102	50000	6·8
2. Kupferblech	22	43000	2·8
3. Kupferblech	22	1200	0·2
4. Aluminiumblech .	27	1000	0·2
5. Kupferblech	27	250	0·08
6. Platinblech	202	52000	2·3

Zur Deutung der beschriebenen Erscheinungen lassen sich die folgenden Hypothesen aufstellen:

1. Es wäre die Möglichkeit vorhanden, daß eines der Produkte Aktinium, Radioaktinium oder Aktinium X verdampfe und sich auf dem Deckelblech zugleich mit der induzierten Aktivität niederschlage; dann könnte es entweder (für Ac) in der Weise, wie dies Voller für Radium gefunden hat, allmählich durch Sublimation oder (für RaAc und AcX) außerdem noch durch den radioaktiven Zerfall verschwinden.

Abgesehen davon, daß über eine Flüchtigkeit der genannten Substanzen bei Zimmertemperatur bisher nichts bekannt ist, spricht gegen eine solche Annahme die oben erwähnte Einfluß-

losigkeit des Glühens sowie der Umstand, daß Induktionswirkungen nicht erhalten werden konnten (vergl. p. 320).

2. Eine andere mögliche Annahme ist diejenige, daß hier ein weiteres Zerfallsprodukt des Aktiniums vorliege, also Ac C, eventuell Ac C + Ac D mit Rücksicht darauf, daß auch das Produkt mit der Halbierungskonstante von rund 12 Tagen nicht restlos verschwindet.

Doch ist bei dieser Annahme noch die Voraussetzung hinzuzunehmen, daß das Produkt keine α-Partikel von ähnlicher Geschwindigkeit aussende, wie sie Ac B besitzt. Dies ist gefordert durch das beobachtete Verhältnis von R zu J. Bei gleicher ionisierender Wirkung müßte nach sehr langer Expositionsdauer (also für $HC =$ 12 Tage, bei $Z =$ 102 oder 202 Tage praktisch erreicht) die Aktivität R gleich der Aktivität J sein, bei der kürzeren Expositionszeit $Z =$ 22 bis 27 Tage R ungefähr $^3/_4$ J betragen. Tatsächlich ist das Verhältnis aber von der Größenordnung 10^{-4}. Nimmt man aber an, daß diese Substanz bei ihrem Zerfall sehr langsame α-Strahlen, deren Geschwindigkeit knapp über der Grenzgeschwindigkeit ionisierender Wirkung liegt, oder sehr weiche β-Stahlen aussendet, so stünde obige Hypothese mit den Tatsachen nicht in Widerspruch.

Die Annahme, daß der untersuchte Rest aus der induzierenden Aktiniumemanation entstanden ist, führt zu der folgenden Konsequenz. Berechnet man mittels der Halbierungskonstante $HC =$ 12 Tage aus dem gefundenen Wert R nach der Expositionszeit Z den Wert R_∞, den man nach der Expositionszeit $Z = \infty$ erhalten hätte, so muß $\frac{R_\infty}{J}$ konstant sein. Tatsächlich findet man:

	$R_\infty : J$
1. Platinblech	$1 \cdot 4 \cdot 10^{-4}$
2. Kupferblech	$0 \cdot 9 \cdot 10^{-4}$
3. Kupferblech	$2 \cdot 2 \cdot 10^{-4}$
4. Aluminiumblech	$2 \cdot 4 \cdot 10^{-4}$
5. Kupferblech	$4 \cdot 0 \cdot 10^{-4}$
6. Platinblech	$0 \cdot 44 \cdot 10^{-4}$

Daß hier keine bessere Übereinstimmung vorliegt, mag, abgesehen von der Kleinheit der Wirkung und der darin begründeten Ungenauigkeit der Bestimmung, auf den Umstand

zurückgeführt werden, daß der Absorptionskoeffizient und somit die Abgabe der kurzlebigen Aktiniumemanation aus den Aktiniumpräparaten außerordentlich stark von der Konsistenz, der Temperatur und der Feuchtigkeit des Präparates abzuhängen scheint und sonach während der langen Expositionszeit der Emanationsgehalt in der Umgebung des zu induzierenden Bleches variieren kann.

3. Es ist naturgemäß nicht ausgeschlossen, daß das bisher dargestellte Aktinium begleitet ist von einem noch unbekannten Radioelemente.[1] Die von verschiedenen Beobachtern festgestellten relativ starken Schwankungen der Abfallskonstanten von AcA — AcB könnten als Hinweis dafür gelten.

Die von uns als Restaktivitäten des Aktiniums bezeichneten Produkte könnten dann Zerfallsprodukte eines solchen Begleiters des Aktiniums sein.

4. Ob nun die Annahmen 2 oder 3 zutreffend sind, jedenfalls kann man aussagen, daß die beschriebenen radioaktiven Substanzen nicht unmittelbar der Radiumfamilie angehören, eine Annahme, die durch die Untersuchungen Boltwood's und Rutherford's,[2] welche Radiumemanation aus Aktinium in mit der Zeit steigender Menge aufgefunden haben, als möglich zu gelten hätte.

Wäre das beschriebene, aus dem Aktinium erzeugte Produkt Radium selbst, so müßte sich eine induzierende Wirkung zeigen, die wir nicht finden konnten.

Die von Rutherford l. c. ausgesprochene Vermutung, daß Radium ein Zerfallsprodukt des Aktiniums oder eines Begleiters desselben sei, aber erst nach der Einschaltung von Zwischenprodukten, wird dadurch natürlich nicht tangiert.

Genauere Angaben über die Natur der aufgefundenen Produkte und ihrer Strahlung waren uns bisher wegen der Geringfügigkeit der Wirkungen noch nicht möglich und müssen einer Zeit vorbehalten bleiben, in der größere Mengen reineren Aktiniums zur Verfügung stehen.

---

[1] Vergl. hiezu auch E. Rutherford, Nature, *75*, 270 (1907).

[2] B. Boltwood, Nature, *75*, 54 (1906); — E. Rutherford, Phil. trans. A. S., 169 (1904); — E. Rutherford, Nature, *75*, 270 (1907).

Über die Verschiebung der Spektrallinien

von

Prof. **Fr. Exner**, w. M. k. Akad., und Dr. **Ed. Haschek.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 7. März 1907.)

Zur Frage der Linienverschiebungen in den Bogen- und Funkenspektren sind in der letzten Zeit einige Arbeiten erschienen, die indes die wünschenswerte Klärung nicht gebracht haben. Während N. Kent[1] und F. Exner und E. Haschek[2] Verschiebungen an einer Reihe von Linien verschiedener Elemente finden und Bedingungen nachweisen, unter denen die Variabilität der Wellenlängen auftritt, ergibt sich als Resultat einer Untersuchung von Chr. Keller[3] die völlige Konstanz der Wellenlänge. Dieser Gegensatz in den Ergebnissen der verschiedenen Untersuchungen ist gewiß ein sehr auffälliger. Zweck der vorliegenden Arbeit wird es sein, die Ursachen hiefür aufzudecken und einen Versuch zur Klärung der ganzen Frage zu bringen. Dabei wäre es natürlich aussichtslos, neuerdings in derselben Art, wie es bisher geschah, die Wellenlängen von verschiebungsverdächtigen Linien unter verschiedenen Umständen im Bogen oder Funken mit tunlichster Genauigkeit zu bestimmen oder direkt Verschiebungen messen zu wollen. Es müssen vielmehr Methoden gewählt werden, die von den bisher angewendeten völlig verschieden sind und daher auch mindestens eine Anzahl von Fehlerquellen vermeiden. Solche sind vor allem anderen geringe Ungenauigkeiten in der Justierung der Gitter, die nötige lange Expositions-

[1] Astroph. Journ. (1905).

[2] Diese Sitzungsber., Bd. 115, Abt. IIa (1906).

[3] Zeitschr. f. wiss. Photogr. etc., Bd. 4 (1906).

zeit bei der photographischen Aufnahme, die uns nur Zeitmittel des Aussehens der Linien gibt, sowie die Unsicherheit einer Bestimmung des Intensitätsmaximums. Wir haben zwei der möglichen Wege beschritten. Der eine ist ein Vergleich von Messungen verschiedener Autoren, die unter tunlichst gleichen Umständen mit gleicher indizierter Genauigkeit dasselbe Spektrum maßen. Die zweite besteht in einem Studium des Aufbaues der Linien im Stufengitter. Über die Resultate dieser beiden Versuche soll im folgenden referiert werden.

I.

Für die erste Untersuchung lagen uns zunächst die Messungen des Lanthanspektrums vor, die von den Herren J. Kellner[1] und E. Wolf[2] an reinen Lanthanpräparaten mit Hilfe des großen Gitterapparates in Bonn gemacht wurden. Ferner die Tabelle jener Lanthanlinien, die M. Bertram[3] in den Spektren von Neodym und Praseodym nachweisen konnte. Diese drei Reihen sind unter möglichst gleichen äußeren Bedingungen auf drei Dezimalen der Angström'schen Einheit durchgeführt.

In den Bonner Arbeiten über das Lanthanspektrum wird für die in den Tabellen angeführten Linien angegeben, daß die Wellenlängen, die übrigens Mittelwerte aus mindestens acht Einstellungen unter dem Komparator sind, auf 0·005 bis höchstens 0·010 A. E. zuverlässig sind. Dabei ist natürlich klar, daß die Wiederholung der Messungen, welche von Wolf durchgeführt wurde, genauere Zahlen liefern mußte, da ja die Möglichkeit vorlag, die Resultate zu vergleichen und Abweichungen zu kontrollieren. Wir haben nun versucht, uns etwas genauer über die Präzision dieser Zahlenreihen Aufschluß zu verschaffen, als es die in den drei angeführten Arbeiten mitgeteilten Kolonnen der Einzelmessungen ermöglichen. Wir suchten zu diesem Zwecke die mittlere Abweichung $\bar{\Delta}$ der einzelnen gemeinsamen Wellenlängenangaben zu bilden. In den Tabellen von Kellner und Wolf sind

[1] Diss. Bonn (1904).

[2] Zeitschr. f. wiss. Photogr. etc., Bd. III (1905).

[3] Diss. Bonn (1905).

228 Linien identisch (zwei Zahlen bei Kellner sind offenbar durch Druckfehler entstellt). Bildet man da die Differenzen ohne Rücksicht auf das Vorzeichen, so erhält man den Wert $\overline{\Delta} = 0{\cdot}0145$ A. E. Zu erwarten wäre gemäß der angegebenen Genauigkeit höchstens ein Wert $\overline{\Delta} = 0{\cdot}010$ A. E., das Doppelte des mittleren Fehlers der Messung.

Bertram gibt in seiner Arbeit über die Spektren von Neodym und Praseodym eine Tabelle jener Lanthanlinien an, welche als Verunreinigung auftraten. Vergleicht man auch hier wieder die Zahlen mit jenen Kellner's, respektive Wolf's, so ergeben sich die bezüglichen mittleren Abweichungen $\overline{\Delta} = 0{\cdot}0179$ A. E. für die Vergleichung Kellner-Bertram (109 Linien) und $\overline{\Delta} = 0{\cdot}0136$ A. E. für die Zahlen Wolf-Bertram (112 Linien).

Aus diesen Zahlen glauben wir übrigens wieder den Schluß ziehen zu dürfen, daß die Angabe der dritten Dezimale der Angström'schen Einheit für Identifikationszwecke wertlos und daher gar nicht anzustreben ist. Daß eine entsprechende Genauigkeit auch in den vorliegenden Messungen nicht erreicht wurde, scheint zur Genüge aus diesen Angaben hervorzugehen. Nur in Ausnahmsfällen, zum Studium des Verhaltens einzelner Linien, wird sich eine Präzision in der Wellenlängenangabe von einigen Tausendsteln erreichen lassen, allgemein gewiß nicht.

Es scheint uns dies übrigens auch aus den Angaben hervorzugehen, die J. Kellner über die Dispersion seines Gitters macht. Demgemäß kamen bei seinen und wohl auch bei allen anderen hier zunächst in Frage stehenden Aufnahmen auf 1 *mm* ungefähr 2·4 A. E. Das besagt aber, daß 1 A. E. Wellenlängenunterschied ein linearer Abstand auf der Platte von etwa 0·417 *mm* entspricht, und soll eine Wellenlänge auf 0·005 A. E. bestimmt werden, so muß das Fadenkreuz des Mikroskopes auf 0·002 *mm* genau eingestellt werden. Das ist wohl für die scharf begrenzten Striche eines Maßstabes möglich; es scheint uns aber zweifelhaft, ob es bei der Einstellung auf Linien erreichbar ist, die wie die Lanthanlinien eine durchschnittliche Breite von 0·2 bis 0·3 A. E., also rund das 50fache der verlangten Einstellungsweite, haben.

Daß aber doch vielleicht nicht so sehr eine ungenaue Messung der gegebenen Platten diese großen Werte der Abweichungen hervorbrachte, sondern daß mindestens teilweise reell variierende Stellungen der Linien gegen die Standards, also Linienverschiebungen zur Erklärung heranzuziehen sind, dürfte aus den nachfolgenden Zusammenstellungen der beobachteten Differenzen hervorgehen. Die weiter oben gegebenen Werte für $\overline{\Delta}$ sind so bestimmt, daß die einzelnen Differenzen in Tausendsteln der Angström'schen Einheit addiert und die Summen durch die Zahlen der gemeinsamen Linien dividiert wurden. Kürzt man nun der leichteren Übersichtlichkeit halber die Einzelwerte der Differenzen auf Hundertel der Angström'schen Einheit ab, so kann man eine Tabelle zusammenstellen, welche die Häufigkeit der einzelnen Abweichungen darstellt. Es ist dies in der folgenden Übersicht geschehen. Darin sind unter A. E. die vorkommenden Differenzen, in den weiteren Kolonnen ihre Anzahl für die gemeinsamen Linien in den Arbeiten von Kellner (*Ke*), Wolf (*Wo*) und Bertram (*Be*) angegeben.

A. E.	*Ke-Wo*	*Ke-Be*	*Wo-Be*
0·00.....	46	16	32
0·01.....	95	32	31
0·02.....	51	34	32
0·03.....	25	15	10
0·04.....	10	9	6
0·05.....	1	2	1
0·06.....	2	1	0
Linienzahl ..	228	109	112
$\overline{\Delta}$	0·0145	0·0179	0·0136

Man sieht, daß Differenzen, welche die angegebene Meßgenauigkeit übertreffen, so oft vorkommen, daß sie nicht bloß als zufällige Fehler betrachtet werden können, um so mehr, als Wolf und Bertram alle auffälligen Differenzen wohl

kontrolliert haben dürften und daher gerade für die größeren Differenzen die Werte der bezüglichen Wellenlängen sicherer bestimmt sein dürften.

Außer in den Messungen des Lanthanspektrums liegen uns in der Arbeit von Bertram über die Bogenspektra von Neodym und Praseodym Zahlen vor, die zum Vergleiche herangezogen werden können. Herr Bertram gibt nämlich die Verunreinigungen im Spektrum so an, daß er neben die betreffende Wellenlänge die Zahl für die koinzidierende Linie und den Autor angibt. Wir zogen von allen diesen nur jene von Bertram selbst gemessenen zum Vergleiche heran und bildeten in derselben Weise wie früher das $\bar{\Delta}$ und die Verteilung der Abweichungen. Es ergab sich folgende Tabelle:

Differenz	0·00	0·01	0·02	0·03	0·04	0·05 A. E.
Zahl der Fälle	34	71	24	3	4	0

Gesamtzahl der Linien 136, $\bar{\Delta} = 0{\cdot}0105$ A. E.

Man sieht, daß diese Zahlen wesentlich genauer sein dürften als die Lanthanmessungen. Doch scheint auch hier der Umstand, daß große Differenzen noch recht häufig auftreten, für das Vorhandensein von Verschiebungen zu sprechen.

Es läßt sich dies noch auf andere Weise erhärten. Würden die Fehler rein zufällige sein, so müßten ebenso oft positive wie negative Abweichungen vorkommen und ihre Gesamtsumme, mit dem Vorzeichen gerechnet, müßte Null ergeben. Von den Verschiebungen ist nun bekannt, daß sie stets in dem Sinne gehen, daß die Linie, welche höherer Dampfdichte entspricht und daher größere Intensität hat, auch die größere Wellenlänge aufweist. Dabei ist es gleichgültig, ob wir Bogen- oder Funkenspektren betrachten, da in beiden solche Verschiebungen auftreten. Damit ist allerdings nicht gesagt, daß sich alle Linien verschieben, respektive daß für alle Linien die Verschiebung meßbare Werte erreicht. Bilden wir nun die Differenzen und rechnen jene als positiv, welche dem Falle entsprechen, daß die stärkere Linie die größere Wellenlänge aufweist, so werden wir auf das Vorhandensein von Verschiebungen schließen dürfen, sobald die Summe der positiven

Abweichungen jene der negativen übertrifft und sobald auch ihre Zahl größer ist.

Zu diesem Zwecke können wir wieder zunächst die Lanthanmessungen heranziehen. Da wir aber früher schließen mußten, daß die Messungen Wolf's die genaueren sind, so wird der etwaige Schluß auf Verschiebungen zwingender werden, wenn wir bloß diese mit den Zahlen Bertram's vergleichen. Dabei rechnen wir gemäß dem früheren Ansatze die Abweichung positiv, wenn Wolf, der das Spektrum reinen Lanthans, also bei höherer Dampfdichte stärkere Linien mißt, die höhere Wellenlänge angibt. Wir erhalten so 58 positive Differenzen mit der Gesamtsumme von 0·880, gegen 54 negative, deren Summe 0·648 beträgt. Wir dürfen also gewiß den Schluß ziehen, daß auch nach den Messungen Wolf's und Bertram's Verschiebungen mindestens im Lanthanspektrum nachweisbar sein müssen. Noch zwingender wird der Schluß, wenn wir gemäß der indizierten Meßgenauigkeit nur jene Differenzen als reell rechnen, welche nach der Abkürzung auf zwei Dezimalen größer sind als 0·01 A. E., also alle von 0·015 A. E. an. Dann ergibt sich die Summe der positiven Abweichungen zu 0·744 in 33 Fällen, die Summe der negativen aber zu 0·419 in 20 Fällen. Ähnliches ergibt sich, wenn man die sicheren wechselweisen Verunreinigungen im Nd und Pr nach den Messungen Bertram's benützt. Wir bekommen da als Summe der positiven Abweichungen 0·229 aus 19 Linien, als Summe der negativen nur 0·119 aus 13 Linien. Dabei ist aber zu berücksichtigen, daß gemäß dem allgemeinen Verhalten beim Neodymspektrum entsprechend seiner großen Linienzahl durchschnittlich kleinere Verschiebungen und diese seltener, zu erwarten sein werden.

Aus dieser statistischen Untersuchung ergibt sich also, daß auch nach den Messungen der Spektren von Neodym und Lanthan, die von Kellner, Wolf und Bertram in Bonn ausgeführt wurden, Verschiebungen in der von uns angegebenen Art existieren, daß also die Differenzen in den Wellenlängen, welche wir in den Bogen- und Funkenspektren konstatieren konnten, nicht bloß auf Meßfehler oder auf die Wahl einer zu ungenauen Meßmethode zurückzuführen sind. Übrigens zeigt

ein Blick auf die für unsere Messungen seinerzeit gegebene Tabelle[1] der $\overline{\Delta}$, daß die Bonner Messungen, obwohl sie Mittelwerte sind, die unserigen an Genauigkeit nicht wesentlich übertreffen.

Man sieht aus diesen Zahlen, daß auch bei den unter möglichst identischen Verhältnissen vorgenommenen Messungen in Bonn sich Diskrepanzen ergeben, die, wenn die angegebene Meßgenauigkeit der Wirklichkeit entspricht, sich nicht durch Zufälligkeiten erklären lassen; dieselben scheinen uns vielmehr deutlich auf das Vorhandensein von Linienverschiebungen hinzuweisen. Wir haben schon früher[2] Gelegenheit gehabt, auf ganz ähnliche Umstände in den Messungen Rowland's hinzuweisen, wo z. B. in Bezug auf 46 Linien des Lanthans in der Sonne und im Bogen sich Abweichungen im mittleren Betrage $\overline{\Delta} = 0{\cdot}020$ A. E. ergeben, was weit außerhalb der möglichen Meßfehler bei Rowland liegt.

So sind wir denn vor die Alternative gestellt, entweder anzunehmen, daß selbst bei gut definierten Linien, wie sie den obigen Bonner Messungen zu Grunde lagen, die Meßgenauigkeit nicht über eine mittlere Abweichung von zirka 0·010 bis 0·015 A. E. hinausgeht, wobei Differenzen von 0·03 bis 0·04 A. E. in den Einzelbestimmungen gar nicht selten vorkommen[3], oder die Ursachen dieser Differenzen tatsächlich in einem verschiedenen Werte der Wellenlänge derselben Linien je nach den Bedingungen der Aufnahme suchen zu müssen. Wie im folgenden gezeigt werden soll, hat die letztere Annahme alle Wahrscheinlichkeit für sich und es erklären sich durch sie auch die auseinander gehenden Ansichten verschiedener Beobachter über die Existenz der Linienverschiebungen auf das einfachste.

II.

Es sind in der letzten Zeit von verschiedenen Forschern Untersuchungen mit stark dispergierenden Apparaten an-

[1] Exner und Haschek, Bogenspektren der Elemente, I.

[2] Diese Sitzungsberichte, Bd. 115, Abt. IIa (1906).

[3] Vergl. übrigens auch die Messungen von H. Kayser und H. A. Rowland an den Platinmetallen, deren Linien zu den bestdefinierten gehören.

gestellt worden, die lehrten, daß die Spektrallinien, die wir mit Prismen oder Gittern beobachten, häufig nicht einfach sind, sondern sich noch weiter in komplizierte Spektren auflösen lassen. Dabei zeigen sich aber recht bedeutende Abweichungen in den Angaben verschiedener Beobachter über die Struktur gleicher Linien; es schien uns daher möglich, daß wir auf diesem Wege Aufschluß über den Mechanismus der Linienverschiebungen erhalten könnten. Mag auch ein Teil dieser abweichenden Beobachtungen erklärbar sein durch Einflüsse der verwendeten Apparate, so sind doch die Diskrepanzen in den Beobachtungen zu groß, als daß sie bloß dadurch hervorgerufen sein könnten. Es weist auch L. Janicki[1] gelegentlich darauf hin, daß er in den relativen Intensitäten der Komponenten öfter Änderungen bemerkte, die bei nicht genügend auflösenden Apparaten Linienverschiebungen vortäuschen konnten. Auch aus den Angaben von P. G. Nutting[2] geht hervor, daß das Aussehen der Linien mit den variablen Bedingungen des Leuchtens veränderlich ist. Nähere Daten aber konnten wir nirgends finden, namentlich darüber nicht, ob die Variationen sich vorzugsweise oder ausschließlich auf gewisse Gruppen der Trabanten beschränken, in welcher Weise sie mit den Bedingungen in der Strombahn zusammenzuhängen scheinen u. a. m.

Wir unternahmen es also, uns selbst darüber durch eine Untersuchung Klarheit zu verschaffen. Leider stand uns zu diesem Zwecke kein größeres Stufengitter zur Verfügung, als eines mit 14 Platten, das wir seinerzeit von Hilger bezogen hatten. Es war uns daher nicht in allen Fällen möglich, trennbare Komponenten auch wirklich aufzulösen. Doch glauben wir, daß dieser Mangel keinerlei Einfluß auf die Resultate haben kann, soweit sie zur Deutung der Linienverschiebungen herangezogen werden können. Die Aufstellung des Apparates war die gewöhnliche. Ein Spektroskop mit konstanter Ablenkung entwarf ein reelles Bild der Linie auf den Spalt des Sekundärkollimators, der auf Unendlich eingestellt paralleles

[1] Feinere Zerlegung der Spektrallinien etc. Inaug.-Diss. Halle (1905).
[2] Line Structure, I. Astroph. Journ., XXIII (1906).

Licht durch das Stufengitter sendet. Die Interferenzerscheinung wurde im Fernrohr beobachtet und das Gitter so gestellt, daß der Beugungswinkel ein Minimum, also fast die ganze Helligkeit in ein Spektrum konzentriert war. Als Lichtquelle diente uns der Bogen, den wir zwischen Metallstäben oder zwischen Kohlenstiften erzeugten, die mit dem fraglichen Material beschickt wurden. Die Stromstärke war zwischen etwa 2 und 20 Ampère variierbar. Unter diesen Umständen erhielten wir immer genügend definierte Linien, wenn nur die Dampfmenge im Bogen unter ein gewisses Maß herabsank. Die Funkenlinien sind leider zu unscharf, um brauchbare Beobachtungen mit dem Stufengitter zu ermöglichen. Doch werden wir wohl voraussetzen dürfen, daß sie im ganzen und großen ein analoges Verhalten zeigen werden wie die Bogenlinien und daß wir die für diese abgeleiteten Regeln mit einiger Vorsicht auch auf die Funkenlinien werden anwenden dürfen.

Wir haben unsere Beobachtungen vorzugsweise an solchen linienarmen Elementen angestellt, bei denen wir schon früher Verschiebungen konstatiert hatten. Es schien uns diese Wahl auch deshalb nützlich, da bei der geringen Dispersion des Primärspektroskopes eine sichere Orientierung in linienreichen Elementen schwer gewesen wäre. Übrigens lehrt auch eine Durchsicht der Angaben Nutting's, daß gerade bei den linienarmen Elementen Variationen am ehesten zu erwarten sind. Erwähnt sei hier bereits die auch von anderer Seite registrierte Erfahrung, daß die Spektrallinien am schärfsten von der Kathode emittiert werden und daß sie im kurzen Bogen unscharf erscheinen. Das im folgenden öfter erwähnte Flackern oder Spritzen des Bogens ist stets von einer momentanen Erhöhung der Stromstärke begleitet und dürfte davon herrühren, daß der Bogen von einem reduzierten Metallkörnchen abgeht, das für kurze Zeit eine größere Menge Dampf in den Bogen liefert.

Wir wollen im folgenden unsere Beobachtungen wiedergeben, wobei die untersuchten Elemente nach steigendem Atomgewichte geordnet sind.

Lithium.

Untersucht wurden nur die roten Linien; bei λ 6103 sind an der Kathode bei größerer Dampfdichte und daher großer Helligkeit 7 gleich starke Linien sichtbar, die sich bei geringen, nicht definierbaren Änderungen im Bogen auf 3, 4, 5 und 6 Linien reduzieren. Dabei sind die Linien manchmal ziemlich gleich stark, manchmal überwiegen die kleineren Wellenlängen in der Intensität. An der Anode ist bloß ein kontinuierlicher Hintergrund sichtbar; veränderte man bei geringerer Dampfdichte, so daß 6 Linien sichtbar waren, die Stromstärke im Bogen von 2 auf 5 und 12 Ampère, so änderte sich die relative Helligkeitsverteilung der Linien so, daß bei 2 Ampère von Violett her gerechnet die zweite und dritte Linie am stärksten erschien, während bei 5 und 12 Ampère die zweite Linie verschwand und die dritte und fünfte am intensivsten war. Es wanderte also der Schwerpunkt der Intensität dabei gegen Rot.

Ein komplizierteres Verhalten zeigte die Linie λ 6708. Hier ist bei sehr dichtem Dampf bloß eine ziemlich breite Umkehrung zu sehen, bei dünnerem Dampf erscheint die schmale scharfe Umkehrung auf der Seite der größeren Wellenlängen von einer hellen Linie begleitet, deren Intensität sehr zunimmt, sobald der Bogen zischt. Dabei treten beiderseits der Hauptlinie, aber intensiver auf der roten Seite, noch 3 bis 5 weitere Linien auf. Nimmt die Dampfdichte noch weiter ab, so daß die Bogenfarbe vom Lithiumgehalt nichts mehr erkennen läßt, so bleibt im Spektrum bloß eine helle Linie übrig, die schmal und scharf bei langem Bogen, sehr breit und verwaschen bei kurzem Bogen erscheint. Verstärkten wir jetzt den Strom von 2 auf 5 Ampère, so waren 2 starke Linien zu sehen. Dabei war die Linie mit der größeren Wellenlänge schwächer; zwischen diesen Linien war eine schwache sichtbar. Wurde jetzt der Bogen verkürzt, so veränderte sich das Bild so, daß statt der Emissionslinien zwei Umkehrungen auftraten, von denen jene auf der roten Seite die intensivere war. Beim Zischen des Bogens traten statt dessen etwa 5 ziemlich gleich intensive helle Linien auf.

Calcium.

Bei der Linie λ 4527 trat bei dichtem Dampf eine Umkehrung auf, bei dünnerem erschien sie doppelt. Wir konnten nicht entscheiden, ob auch da die Umkehrung noch bestand, da manchmal auch bloß eine einfache Linie sichtbar war. Beim Flackern des Bogens trat mitunter für Augenblicke auf der roten Seite der Linie ein Trabant auf. Die Linie λ 4578 erschien stets einfach, meistens scharf begrenzt, manchmal auch verwaschen. Auch λ 4586 erwies sich als einfach, verbreiterte sich aber gemäß dem Fluktuieren des Dampfes im Bogen manchmal deutlich nach Rot. Die Linien λ 4878 und λ 5349 sahen wir einfach und unveränderlich mit den variierenden Bedingungen des Leuchtens. Die Linie λ 5270 erschien dreifach, und zwar war bei schwachem Strom die mittlere die hellste, während bei stärkerem Strom die beiden nach Rot stehenden Linien gleich intensiv und viel stärker als die brechbarere waren.

Kupfer.

Die Kupferlinie λ 5218 ist bei dichtem Dampf sehr diffus und läßt Einzelheiten nur schwer erkennen. Bei geringer Dampfdichte sieht man an der roten Seite der verwaschenen Linie einen Begleiter absplittern, dessen Intensität mit der Stromstärke deutlich rascher wächst als die Helligkeit der Hauptlinie. Bei sehr geringer Menge von Kupferdampf im Bogen ist λ 5218 scharf und erscheint als Triplet, die Hauptlinie ist von einem näher stehenden violetten und dem etwas weiter abstehenden roten Trabanten begleitet. Die relative Helligkeit der Begleiter wächst mit Steigerung der Stromstärke und jedem Zischen des Bogens. Die Linien λ 5253 und λ 5292 sahen wir stets einfach, ohne Trabanten, λ 5780 und λ 5782 scharf doppelt, ohne entscheiden zu können, ob es sich um Duplets oder Umkehrungen handelt.

Zink.

Die violette Zinklinie λ 4680 zeigte mit den Variationen im Bogen, also Flackern und Erhöhung der Stromstärke, eine deutliche Verbreiterung nach Rot; dabei trat gleichzeitig auf

dieser Seite auch ein Begleiter auf. Die beiden Linien λ 4722 und λ 4810 zeigten einen solchen Begleiter nicht, hingegen sehr deutlich die unsymmetrische Verbreiterung, und zwar λ 4722 in geringerem Grade. Die Struktur in den Umkehrungen, die Nutting sah, konnten wir wohl deshalb nicht konstatieren, weil unser Stufengitter bedeutend geringere auflösende Kraft besaß.

Strontium.

Die Linie λ 4872 sahen wir doppelt, eine Umkehrung an der violetten Seite, einen hellen Trabanten an der roten. Bei starkem Strom und viel Dampf fließt der Begleiter mit der Linie zusammen, die Umkehrung bleibt dabei erhalten.

Silber.

Von Silberlinien fanden wir λ 4476 und λ 4668 von den Variationen im Bogen unabhängig und stets als einfache Linien. Das grüne Paar bei λ 5209 und 5465 war breit und unscharf. Beim Flackern des Bogens spalteten sich manchmal beiderseits Begleiter ab, aber stets leichter und deutlicher auf der roten Seite.

Cadmium.

Die Linie λ 4413 ist eine helle, scharfe Linie mit einem näher stehenden violetten und einem weiter abstehenden roten Begleiter. Beim Zischen des Bogens werden die Trabanten fast ebenso hell wie die Hauptlinie. λ 4678 ist für gewöhnlich bei schwachem Strom einfach, bei starkem Strom und beim Flackern des Bogens tritt auf der roten Seite ein Begleiter auf.

Zinn.

Die Linie λ 4524 sahen wir stets einfach hell oder umgekehrt, λ 5631 manchmal einfach umgekehrt, manchmal auch drei getrennte Umkehrungen. Der Absorptionsstreifen war breit oder schmal und schien gleichsam zu atmen mit den leichten Veränderungen im Bogen. Öfter trat auch nach Rot vom Hauptstreifen eine Umkehrung hervor.

Baryum.

Die Linie λ 4432 sahen wir stets einfach, variabel war bloß die Linienbreite. λ 4554 ist scharf oder verwaschen, hell oder umgekehrt, die Umkehrung ist schmal und scharf oder breit diffus, stets aber ist die Linie symmetrisch und frei von Begleitern. Ebenso zeigten sich als einfach die Linien λ 4934 und λ 5519, welch letztere auch als Umkehrung frei von Trabanten blieb. λ 5535 erschien bei geringer Dampfdichte als Duplet oder Triplet, wobei die dritte Linie bei Erhöhung der Stromstärke auf der violetten Seite auftrat. Bei dichtem Dampf sahen wir fünf äquidistante Linien; jene mit der größten Wellenlänge war am schwächsten und wuchs in der Helligkeit rascher als die übrigen, sobald der Bogen zischte. Die Linie λ 5853 ist bei dichtem Dampf einfach umgekehrt, doch ist die rote Komponente der Umkehrung heller und verbreitert sich stärker als die violette. Bei dünnem Dampf treten zwei Umkehrungen auf, deren rote länger persistierte. Manchmal treten beiderseits der Linie zwei bis drei Trabanten auf, stets leichter und heller auf der Seite der größeren Wellenlängen. Bei extrem dichtem Dampf erhellt sich der ganze Hintergrund und zeigt fünf ziemlich gleichmäßige Maxima. Die Linie λ 5907 sahen wir als Umkehrung mit je einem Begleiter auf der roten und violetten Seite. Beim Zischen des Bogens oder bei Verstärkung des Stromes traten auf der roten Seite noch zwei bis drei Trabanten auf. Die Linie λ 6142 ist eine einfache helle Linie, die sich beim Zischen des Bogens umkehrt und dabei nach Violett einen nahen, nach Rot einen weiter abstehenden Begleiter zeigt. Die Linie λ 6497 zeigt sich als Triplet, eine helle oder umgekehrte Hauptlinie mit zwei gleichen und äquidistanten Begleitern zu beiden Seiten. Der rote Trabant überwiegt bei Verstärkung des Stromes oder beim Zischen des Bogens, gleichzeitig taucht zwischen ihm und der Hauptlinie noch ein zweiter Trabant auf und ebenso erhellt sich hier der Hintergrund.

Wismuth.

Zur Beobachtung gelangten die Linien λ 4722 und λ 4733. Beide sind umgekehrt und verändern sich nicht mit den

Variationen im Stromkreise; λ 4722 ist ein Duplet, λ 4733 einfach.

Außerdem beobachteten wir eine Reihe heller Linien in den Spektren von Cr, Fe, Ti. Außer Umkehrungserscheinungen oder Änderungen der Linienbreite mit der Intensität konnten wir keinerlei auffällige Erscheinungen sehen, die nicht schon von Nutting beschrieben wären. Namentlich sahen wir keinerlei einseitige Intensitätsänderungen und kein einseitiges Auftauchen von Trabanten.

III.

Eine Durchsicht der Beobachtungsergebnisse lehrt nun, daß in allen jenen Fällen, wo Trabanten mit variabler Intensität oder in wechselnder Anzahl neben der Hauptlinie beobachtet werden konnten, stets die rote Seite bevorzugt war. Da nun die allgemein benutzten Rowland'schen Gitter das Auflösungsvermögen selbst unseres kleinen Stufengitters nicht erreichen und vor allem anderen nie so scharf definierte Linien wie dieses zu liefern im stande sind, so muß sich eine Veränderlichkeit ergeben, die stets die rote Seite der Linie bevorzugt. Wir überblicken heute in den violetten und ultravioletten Bogen- und Funkenspektren ein Material von rund 80.000 Linien. Unter allen diesen wird man fast nur die Angabe einer Unsymmetrie der Linie nach Rot finden, da in kaum zehn Fällen eine einseitige Abschattierung nach Violett konstatiert werden konnte. Die Erklärung für diese Erscheinung ist nach unseren Beobachtungen eine sehr einfache; denn da die Linienverschiebungen vorwiegend an Linien auftraten, die einseitig, und zwar nach Rot verbreitert sind, so wird der Einfluß der Bevorzugung der rotwärts stehenden Trabanten aus folgendem klar. Das Rowland'sche Gitter liefert für eine homogene Linie ein Beugungsmaximum von einer bestimmten Breite und Intensitätsverteilung. Die Kurve hiefür ist eine vollkommen symmetrische, ihre Basisbreite aber bedeutend größer als dem reellen Wellenlängenunterschiede der Ränder entsprechen würde. Beobachtet man doch an halbwegs kräftigen Linien kaum je eine geringere Breite als etwa 0·2 A. E. Nun gibt aber Nutting durchschnitt-

lich Linienbreiten von 0·02 A. E. an und kaum einmal dürfte 0·1 A. E. erreicht werden. Treten nun neben der Hauptlinie noch Trabanten auf, so liefert jeder für sich auch beim Rowland'schen Gitter sein Beugungsmaximum. Doch müssen sich selbst für den Fall, daß die Trabanten gemäß dem Auflösungsvermögen noch trennbar wären, die Intensitätskurven mindestens teilweise überlagern und für die visuelle oder photographische Beobachtung eine resultierende Intensitätsverteilung liefern. Daß dabei, sobald, wie aus unseren Beobachtungen folgt, die roten Trabanten in der Summation überwiegen, eine Unsymmetrie sich ergeben muß, ist sofort klar. Aber ebenso leuchtet ein, daß der Fall vorkommen muß, daß das Maximum der resultierenden Intensitätskurve sich verschiebt, sobald einerseits die Helligkeit der Trabanten rascher ansteigt. Es folgt also aus unseren Beobachtungen, daß die Linienverschiebungen tatsächlich vorhanden sind, sobald man mit Apparaten von mäßigem Auflösungsvermögen arbeitet, und daß sie allen jenen Umständen parallel gehen, welche die Dampfdichte verändern, da mit dieser die rotseits stehenden Trabanten vorzugsweise variieren.[1]

Aus unseren Beobachtungen folgt aber auch die Erklärung, warum Eder und Valenta[2] und Keller keine Linienverschiebungen konstatieren konnten. Eder und Valenta gingen bei ihrer Untersuchung von der Annahme aus, daß die Inkonstanz der Stellung der Linien vielleicht durch zu lange Exposition der Platten, vielleicht auch durch fehlerhafte Entwicklung hervorgerufen sein könnte. Sie exponierten daher möglichst kurz, um nur das Intensitätsmaximum zu erhalten und konnten dann Verschiebungen nicht konstatieren. Das ist aber selbstverständlich, da bei der geringen Belichtungszeit eben nur die Hauptlinie zur Geltung kommt, die Trabanten aber nicht. Aus demselben Grund konnte auch Keller die Linienverschiebungen nicht beobachten, da er die Linien nach

[1] Aus der Tatsache dieser Verschiebungen folgt aber keineswegs, und darauf wollen wir noch besonders aufmerksam machen, eine Veränderlichkeit der Wellenlängen der einzelnen Strahlungen. Eine solche ergibt sich bloß für das Intensitätsmaximum des nicht aufgelösten Linienkomplexes.

[2] Diese Sitzungsberichte, Bd. 112, Abt. II a (1903).

den durch den Astigmatismus erzeugten Spitzen bestimmt. Diese entsprechen der Lage der Hauptlinie, der Linie maximaler Intensität, aber nicht dem Intensitätsmaximum des Konglomerates, das wir im Rowland'schen Gitter als Linie beobachten und messen müssen.

Ob wir mit der vorstehenden Erklärung der Linienverschiebungen das Richtige getroffen haben, ließe sich am einfachsten entscheiden, wenn man die in unseren früheren Spektraluntersuchungen als verschoben oder unverschoben bezeichneten Linien auf ihr Verhalten im Stufengitter prüfen würde. Da sich unsere früheren Messungen nur auf einen kleinen Bezirk im sichtbaren Teil des Spektrums erstreckten, die Beobachtungen im Stufengitter aber wegen des momentanen Wechsels im Aussehen der Trabanten subjektiv gemacht werden müssen, so ist die Anzahl der zum Vergleiche heranzuziehenden Linien nur eine sehr geringe. Wir haben in dem für beide Messungsreihen sich deckenden Bereich nur zwei von uns früher als unverschoben bezeichnete Linien: Ba λ 4432 und λ 4554. Beide Linien zeigten sich in unserem Stufengitter einfach und symmetrisch. Linien, die wir seinerzeit als verschoben oder stark nach Rot verbreitert angegeben haben, sind nebst ihrem Verhalten im Stufengitter in der folgenden kleinen Tabelle zusammengestellt.

Element	λ	Verschiebung	Verhalten im Stufengitter
Ca	4527	Verwaschen nach Rot	Beim Flackern des Bogens roter Trabant.
Ca	4578	0·10 A. E.	Einfach, manchmal verwaschen.
Ca	4586	0·09 A. E.	Verbreitert sich nach Rot.
Zn	4680	Verwaschen nach Rot 0·07 A. E.	Verwaschen nach Rot, manchmal roter Begleiter.
Zn	4722	Umgekehrt, 0·07 A. E.	Unsymmetrisch nach Rot verbreitert.
Zn	4810	Verwaschen nach Rot 0·08 A. E.	Sehr unsymmetrisch nach Rot verbreitert.

Über weitere fünf Linien des Cd, Ag und Sn, die beiden Untersuchungen gemeinsam sind, läßt sich nichts aussagen, da

unsere früheren Messungen bezüglich einer Verschiebung keine Angaben enthalten. Soweit sich aus den wenigen vorstehenden Daten etwas entnehmen läßt, widersprechen dieselben jedenfalls nicht der von uns geäußerten Ansicht, scheinen sie vielmehr zu bestätigen. Sehr dankenswert wäre es, wenn vielleicht von anderer Seite mit Hilfe eines wesentlich größeren Stufengitters ein derartiger Vergleich zwischen Komplexität und Verschiebung der Linien durchgeführt würde.

Von verschiedenen Beobachtern sind schon ähnliche Untersuchungen wie die vorstehende, doch mit Hilfe größerer Dispersionen ausgeführt worden. Alle beweisen die Existenz teils einfacher unveränderlicher, teils sehr komplexer und veränderlicher Linien. So fand R. A. Houstoun[1] die Zusammensetzung der Spektrallinien sehr variabel mit der Art des Brennens des Bogens, und J. Barnes[2] kam zu denselben Resultaten bezüglich der Spektren des Bogens, von Flammen und Vakuumröhren; er kommt zu dem Schlusse, daß bei so hoher Auflösung die Linien nur für ganz spezielle Verhältnisse des Brennens definiert sind. Bestätigt werden diese Ergebnisse von Chr. Fabry[3] gelegentlich einer Untersuchung des Cadmiumspektrums, der unter anderem bei der Linie λ 5086 je nach der Art der Entladung im Vakuumrohr einen roten Satelliten auftreten und verschwinden sah. L. Janicki[4] fand bei seinen ausführlichen Untersuchungen mit dem Stufengitter zwar niemals eine Veränderung der Wellenlänge der Satelliten durch die Bedingungen des Leuchtens, wohl aber häufig Veränderungen ihrer relativen Helligkeit und erwähnt schon, daß durch diesen Umstand bei nicht genügender Dispersion Linienverschiebungen beobachtet werden können. Die ausführlichsten Untersuchungen über diese Frage liegen von P. G. Nutting[5] vor. Er findet eine große Variabilität im Aufbau der Linien und behauptet nicht nur Veränderungen in der relativen Helligkeit, sondern auch in der relativen Lage je nach dem Brennen des

[1] Phil. Mag., VII (1904).
[2] Astroph. Journ., *19* (1904).
[3] C. r., *138* (1904).
[4] Diss. Halle (1905).
[5] Astroph. Journ., *23* (1906).

Bogens an Satelliten beobachtet zu haben. Leider findet sich bei all diesen Beobachtungen kaum einmal eine Angabe, auf welcher Seite der Hauptlinie die Veränderungen besonders sichtbar werden.

Direkte Beobachtungen an Funkenspektren mit stark dispergierenden Apparaten liegen nicht vor, da für diese die Funkenlinien mit zu großer Breite auftreten. Doch ist wohl zu vermuten, daß bezüglich einer Zusammensetzung der Linien und namentlich des Verhaltens der Trabanten, abgesehen von dem voraussichtlichen Ineinanderfließen derselben, das gleiche gelten wird wie beim Bogen.

Ob die starken Verschiebungen bei hohem äußeren Druck, die W. B. Anderson[1] bei umgekehrten Linien und G. Hale und N. A. Kent[2] bei Eisenlinien bis zu 0·22 A. E. gefunden haben, auch nur bei komplexen Linien auftreten, können wir nicht entscheiden; es ist aber wohl anzunehmen, daß durch hohen äußeren Druck die Emission des Funkens ähnlich beeinflußt wird wie durch Änderung der Stromstärke, Kapazität etc., so daß komplexe Linien auch hier bei einer eventuellen Bevorzugung der rotseitigen Trabanten eine Verschiebung des resultierenden Intensitätsmaximums nach größeren Wellenlängen erkennen lassen müssen.

Wenn unsere im vorhergehenden geäußerte Anschauung richtig ist, so wäre es müßig, darüber zu streiten, ob die Verschiebungen reell sind oder nicht; ist die Dispersion keine genügende, so daß eine komplexe und variable Linie einheitlich erscheint, so wird ihr Intensitätsmaximum je nach den Versuchsbedingungen mit verschiedener Wellenlänge bestimmt werden. Und in diesem Sinne sind die Verschiebungen, wie wir und andere Beobachter sie gefunden haben, reell. Dabei ist es aber doch möglich, daß jede einzelne Komponente der Strahlung eine invariable Wellenlänge besitzt und insofern sind die Verschiebungen unreell. Wenn es sich aber um spektralanalytische Untersuchungen handelt, die mit Apparaten ausgeführt werden mit nicht größerer Dispersion als sie Gittern gewöhnlich zu-

---

[1] Astroph. Journal, *24* (1906).

[2] Ebenda, *17* (1903).

kommt, wird man immer mit diesen Verschiebungen zu rechnen haben; in noch höherem Maße natürlich bei Anwendung von Prismenapparaten, wie sie bei astrophysikalischen Untersuchungen benützt werden. Wir haben schon bei einer früheren Gelegenheit darauf hingewiesen und wollen es hier nochmals tun, daß bei Anwendung des Doppler'schen Prinzipes zur Bestimmung von Sterngeschwindigkeiten diese Verschiebungen eine sehr unangenehme Rolle spielen müssen. Es ist gar nicht zu verwundern, daß bei Bestimmung dieser Geschwindigkeiten aus verschiedenen Linien sich eben infolge der Verschiebungen Differenzen ergeben, die die Meßfehler übersteigen. Wir verweisen diesbezüglich auf eine Untersuchung von A. Bélopolsky,[1] aus der das eben Gesagte deutlich hervorgeht. Die Geschwindigkeiten desselben Objektes, wie sie aus verschiedenen Linien berechnet werden, differieren untereinander regellos um Beträge von solcher Größenordnung, wie sie den von uns beobachteten Verschiebungen unter den verschiedenen Bedingungen des Leuchtens entsprechen. Eine richtige Bestimmung der Geschwindigkeit würde nur aus der Beobachtung solcher Linien zu folgern sein, die auch bei der stärksten Auflösung sich als einfach erweisen.

[1] Astroph. Journ., *19* (1904).

Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Klasse erscheinen vom Jahre 1888 (Band XCVII) an in folgenden vier gesonderten **Abteilungen**, welche auch einzeln bezogen werden können:

Abteilung I. Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Kristallographie, Botanik, Physiologie der Pflanzen, Zoologie, Paläontologie, Geologie, Physischen Geographie und Reisen.

Abteilung II a. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und Mechanik.

Abteilung II b. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Chemie.

Abteilung III. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Anatomie und Physiologie des Menschen und der Tiere sowie aus jenem der theoretischen Medizin.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichnisse ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung Alfred Hölder, k. u. k. Hof- und Universitätsbuchhändler (Wien, I., Rothenthurmstraße 13), zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Teile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden auch in besonderen Heften unter dem Titel: »Monatshefte für Chemie und verwandte Teile anderer Wissenschaften« herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 14 K — 14 M.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Originalauszüge oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird wie bisher acht Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 5 K — 5 M.

132

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE.

CXVI. BAND. III. HEFT.

JAHRGANG 1907. — MÄRZ.

ABTEILUNG II a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

(MIT 4 TAFELN UND 7 TEXTFIGUREN.)

WIEN, 1907.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN KOMMISSION BEI ALFRED HÖLDER.

K. U. K. HOF- UND UNIVERSITÄTSBUCHHÄNDLER,
BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

A

INHALT

des 3. Heftes, März 1907, des CXVI. Bandes, Abteilung IIa, der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Klasse.

Seite

Weiss E., Über die Berechnung einer Ellipse aus zwei Radien und dem eingeschlossenen Winkel. [Preis: 70 h — 70 pf] 345

Stücker N., Über die Unterschiedsempfindlichkeit für Tonhöhen in verschiedenen Tonregionen. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 75 h — 75 pf] . . 367

Jaumann G., Strahlungen in starken elektromagnetischen Feldern. [Preis: 3 K 10 h — 3 M 10 pf] 389

Girtler R., Über das Potential der Spannungskräfte in elastischen Körpern als Maß der Bruchgefahr. (Mit 2 Tafeln und 2 Textfiguren.) [Preis: 2 K 40 h — 2 M 40 pf] 509

Przibram K., Büschel- und oszillierende Spitzenentladung in Helium, Argon und anderen Gasen. (Mit 5 Textfiguren.) [Preis: 50 h — 50 pf] 557

Krčmář J. und **Schneider R.**, Absolute Messungen der nächtlichen Ausstrahlung in Wien. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 95 h — 95 pf] 571

Hahn H., Über die nichtarchimedischen Größensysteme. [Preis: 1 K 35 h 1 M 35 pf] 601

Preis des ganzen Heftes: 7 K 20 h — 7 M 20 pf.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE.

CXVI. BAND. III. HEFT.

ABTEILUNG II a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

Über die Berechnung einer Ellipse aus zwei Radien und dem eingeschlossenen Winkel

von

Prof. E. Weiss,

w. M. k. Akad.

(Vorgelegt in der Sitzung am 14. März 1907.)

Bei der Berechnung der Bahn eines Asteroiden geht man bekanntlich so vor, daß man sich mit Hilfe der Keppler'schen Gesetze Näherungswerte für die Dreiecksflächen zwischen dem ersten und zweiten, dem ersten und dritten und dem zweiten und dritten Orte bildet. Damit ist man in der Lage, einen Näherungswert für den mittleren Radius r_2 und aus diesem die geozentrischen Entfernungen ρ_1 und ρ_3 bei der ersten und dritten Beobachtung zu ermitteln. Aus ρ_1 und ρ_3 und den beobachteten geozentrischen Positionen ergeben sich nach bekannten Formeln leicht die heliozentrischen Koordinaten und aus diesen die Bahnlage (Ω und i) und die Argumente der Breiten, womit auch der zurückgelegte heliozentrische Bogen ($v_3 - v_1$) bekannt wird.

Es tritt nun die Aufgabe heran, aus den Stücken r_1, r_3 und $v_3 - v_1$ den Kegelschnitt zu berechnen, den der Himmelskörper beschreibt.

Gauss[1] löst dieses Problem durch Einführen des Verhältnisses y des vom Himmelskörper beschriebenen Sektors zum Dreiecke. Der Weg, zu dem man auf die Gleichungen kommt, von denen Gauss ausgeht, ist, in allgemeinen Umrissen skizziert, der folgende:

---

[1] C. F. Gauss, Theoria motus corporum coelestium, §§ 88—93.

Werden die Gleichungen der Planetentheorie:

$$\sqrt{r}\,\sin\frac{v}{2} = \sqrt{a(1+e)}\,\sin\frac{E}{2}$$

$$\sqrt{r}\,\cos\frac{v}{2} = \sqrt{a(1-e)}\,\cos\frac{E}{2}$$

$$r = a(1-e\cos E)$$

$$\frac{p}{r} = 1+e\cos v$$

$$M = M_0 + \frac{k(t-t_0)}{a^{\frac{3}{2}}} = E - \sin E$$

für den ersten (t_1, r_1, v_1, E_1) und dritten Ort (t_3, r_3, v_3, E_3) in Anspruch genommen und durch eine leicht ersichtliche Kombination der so entstandenen Gleichungen die Relationen für

$$\sqrt{r_1 r_3}\cos\frac{1}{2}(v_3-v_1),\quad \sqrt{r_1 r_3}\cos\frac{1}{2}(v_3+v_1),\quad r_1+r_3,$$

$$\frac{r_1+r_3}{r_1 r_3}p \quad \text{und} \quad k(t_3-t_1)$$

gebildet, so gewinnt man die folgenden Ausdrücke:

$$\sqrt{r_1 r_3}\cos f = a(\cos g - e\cos G) \qquad 1)$$

$$\sqrt{r_1 r_3}\cos F = a(\cos G - e\cos g) \qquad 2)$$

$$r_1+r_3 = 2a(1-e\cos g\cos G) \qquad 3)$$

$$\frac{r_1+r_3}{r_1 r_3}p = 2(1+e\cos f\cos F) \qquad 4)$$

$$\frac{\theta}{a^{\frac{3}{2}}} = 2(g-e\sin g\cos G). \qquad 5)$$

In denselben bedeutet k die Charakteristik des Sonnensystems ($\log k = 8{\cdot}2355814$), p den Parameter der Bahn $[p = a(1-e^2) = q(1+e)]$ und

$$2f = v_3 - v_1 \qquad 2g = E_3 - E_1$$

$$2F = v_3 + v_1 \qquad 2G = E_3 + E_1$$

$$\theta = k(t_3 - t_1).$$

Löst man 1) und 2) nach $\cos G$ und $\cos F$ auf, setzt man die so erhaltenen Werte in die übrigen Gleichungen ein und schreibt man zur weiteren Abkürzung unter einem:

$$N = r_1 + r_3 - 2\sqrt{r_1 r_3}\cos g \cos f =$$

$$= \sqrt{r_1 r_3}\left[\left(\frac{\sqrt{r_1}-\sqrt{r_3}}{\sqrt[4]{r_1 r_3}}\right)^2 + 4\sin^2\frac{1}{2}f + 4\cos f \sin^2\frac{1}{2}g\right], \quad 6)$$

so erhält man:

$$N = 2a\sin^2 g \qquad 7)$$

$$Np = 2r_1 r_3 \sin^2 f \qquad 8)$$

$$\frac{\theta}{a^{\frac{3}{2}}} = 2g - \sin 2g + \frac{2\sqrt{r_1 r_3}\sin g \cos f}{a} \qquad 9)$$

Vernachlässigt man die Masse des Planeten der Sonnenmasse gegenüber, so ist die Fläche F des von ihm beschriebenen Sektors

$$F = \frac{1}{2}k(t_3 - t_1)\sqrt{p} = \frac{1}{2}\theta\sqrt{p}$$

und wenn mit y sein Verhältnis zur Dreiecksfläche $\left(\frac{1}{2}r_1 r_3 \sin 2f\right)$ bezeichnet wird:

$$\theta\sqrt{p} = y.r_1 r_3 \sin 2f. \qquad 10)$$

Durch Elimination von N aus 7) und 8) und Eintragen des so erhaltenen Wertes von p in 10) entsteht:

$$\frac{1}{a} = \frac{4r_1 r_3 \cos^2 f \cos^2 g}{\theta^2}\cdot y^2. \qquad 11)$$

Setzt man diesen Wert von a in 9) ein und außerdem in 8) den aus 10) folgenden von p, so gelangt man zu den beiden Grundgleichungen:

$$y^2 = \frac{\theta^2}{2r_1 r_3 N \cos^2 f} \qquad 12)$$

$$y^2(y-1) = \frac{\theta^2}{(2\cos f\sqrt{r_1 r_3})^3} \cdot \frac{2g-\sin 2g}{\sin g^3}. \qquad 13)$$

Es erübrigt uns nun noch, einen bequemen Rechnungsmechanismus zur Ermittlung der beiden Unbekannten g und y aus diesen Gleichungen zu finden. Zu diesem Zwecke führen wir folgende Hilfsgrößen und Bezeichnungen ein:

$$\operatorname{tg}(45+w) = \sqrt[4]{\frac{r_1}{r_3}} \qquad [\sqrt{r_1}-\sqrt{r_3} = 2\sqrt[4]{r_1 r_3}\operatorname{tg} 2w] \qquad I)$$

$$m = \frac{\theta^2}{(2\sqrt{r_1 r_3}\cos f)^3}\ ^1 \qquad II)$$

$$l = \left[\operatorname{tg}^2 2w + \sin^2\frac{1}{2}f\right]\sec f \qquad III)$$

$$x = \sin^2\frac{1}{2}g. \qquad IV)$$

Damit wird (Gleichung 6):

$$N = 4\sqrt{r_1 r_3}\cos f(l+x) \qquad V)$$

und die Grundgleichungen 12) und 13) gewinnen die Form

$$y^2 = \frac{m}{l+x} \qquad A)$$

$$y^2(y-1) = m\cdot\frac{2g-\sin 2g}{\sin g^3}. \qquad B)$$

Zunächst wird nun (Theoria motus, § 90)

$$X = \frac{2g-\sin 2g}{\sin g^3} \qquad 14)$$

---

[1] Gauss setzt: $m = \dfrac{\theta}{(2\sqrt{r_1 r_3}\cos f)^{\frac{3}{2}}}$; ich habe aber vorgezogen, das Quadrat dieser Größe mit m zu bezeichnen, damit man die drei Quantitäten: m, l und x als der gleichen Größenordnung angehörend ansehen kann.

in die nach steigenden Potenzen von $x = \sin^2 \frac{1}{2} g$ fortschreitende Reihe

$$X = \frac{4}{3} + \frac{4.6}{3.5} x + \frac{4.6.8}{3.5.7} x^2 + \frac{4.6.8.10}{3.5.7.9} x^3 + \ldots \quad 14^*)$$

entwickelt und weiter angenommen:

$$X = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{6}{5}(x - \xi)}$$

$$\xi = \frac{10}{9X}\left(1 - \frac{3}{4} X + \frac{9}{10} xX\right) =$$

$$= \frac{2}{35} x^2 \left(1 + \frac{26}{45} x + \frac{692}{1925} x^2 + \frac{29544}{125125} x^3 \ldots\right). \quad 15)$$

Wird nun noch

$$h = \frac{m}{\frac{5}{6} + l + \xi} \qquad C)$$

geschrieben, so geht aus der Verbindung von A und B mit Berücksichtigung der Gleichung $C)$ hervor:

$$h = \frac{y^2(y-1)}{y + \frac{1}{9}}. \qquad D)$$

Man hat also y mittels der Gleichung dritten Grades $D)$ aus h zu suchen und dann x aus $A)$. Die Rechnung ist zwar eine indirekte, da h unter seinen Bestandteilen in ξ schon eine Funktion von x enthält, die aber nicht nur $\frac{5}{6}$, sondern auch l gegenüber einer höheren Ordnung angehört, wie 15) erkennen läßt. Man vernachlässigt daher anfänglich ξ entweder ganz oder, was vorteilhafter ist, setzt als Näherungswert (nach 15) für dasselbe $\frac{2}{35} \sin^2 \frac{1}{2} f$ ein, da bei mäßigen Exzentrizitäten und mäßigen heliozentrischen Bewegungen g und f nur wenig

voneinander abweichen. Mit dem so erhaltenen y bekommt man schon einen sehr genäherten Wert von x, aus dem man nach einem bekannten Verfahren sukzessive den strengen erreicht.

Da die Gleichung 15) für ξ nur den Parameter x und die für y nur h enthält, hat Gauss zur Erleichterung der Rechnung zwei Tafeln entworfen: die eine, welche ξ mit dem Argumente x, und die andere, welche $\log y^2$ mit dem Argumente h liefert. Damit ist die Auflösung der Aufgabe auf die Entnahme der Größen ξ und y aus zwei Hilfstafeln reduziert, die Auflösung aber häufig eine indirekte.

Ich benütze diese Gelegenheit, um ein anderes sehr einfaches Verfahren bekanntzumachen, nach welchem man, wie mir scheint, erheblich einfacher zum Ziele gelangt.

Schreibt man:

$$X = \frac{2g - \sin 2g}{\sin g^3} = \frac{4}{3} X_1$$

$$y = \frac{2\sqrt{m X_1}}{z},$$

so verwandeln sich die Grundgleichungen A und B in

$$l + x = \frac{1}{4 X_1} z^3 \qquad A_1)$$

$$z + \frac{1}{3} z^3 = 2\sqrt{m X_1}. \qquad B_1)$$

X_1 als bekannt vorausgesetzt, läßt sich die letzte Gleichung mit Hilfe der Barker'schen Tafel berechnen, worauf man aus der ersten sofort x erhält.

Bei einer Berechnung nach dieser Methode ist aber die für X_1 von Gauss gewählte Reihenform wegen ihrer sehr geringen Konvergenz für größere Werte von x nicht bequem. Eine weit rascher konvergierende Reihe, welche wenigstens in den ersten Gliedern, auf die allein es ja ankommt, wohl überhaupt die rascheste Konvergenz aufweisen dürfte, die erreichbar ist, erhält man, wenn man nach steigenden Potenzen von $\zeta = \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} g$ entwickelt.

In diesem Falle wird:

$$\sin^2\frac{1}{2}g = \frac{\zeta}{1+\zeta} \qquad d\zeta = \operatorname{tg}\frac{g}{2}\sec^2\frac{g}{2}dg$$

$$\cos^2\frac{1}{2}g = \frac{1}{1+\zeta} \qquad \sin g\, d\zeta = 2\zeta\, dg$$

und man erhält damit durch Differentiation der Gleichung

$$2g - \sin 2g = X \sin g^3$$

nach einigen einfachen Reduktionen:

$$4(1+\zeta) = 3(1-\zeta)X + 2\zeta(1+\zeta)\frac{dX}{d\zeta}.$$

Nimmt man nun für X als Reihenform an:

$$X = \alpha_0 + \alpha_1\zeta + \alpha_2\zeta^2 + \ldots \alpha_{n-1}\zeta^{n-1} + \alpha_n\zeta^n + \ldots,$$

so gewinnt man zur Bestimmung der Koeffizienten

$$4(1+\zeta) = 3\alpha_0 + (5\alpha_1 - 3\alpha_0)\zeta + (7\alpha_2 - \alpha_1)\zeta^2 + \ldots$$
$$\ldots + [(2n+3)\alpha_n + (2n-5)\alpha_{n-1}]\zeta^n + \ldots$$

Daraus ergibt sich:

$$\alpha_0 = +\frac{4}{3} \qquad \alpha_1 = +\frac{8}{5} \qquad \alpha_2 = +\frac{8}{5\cdot 7}$$

und von $n = 3$ an:

$$\alpha_n = -\frac{2n-5}{2n+3}\alpha_{n-1} = (-1)^n \frac{1.3.5\ldots(2n-5)}{9.11.13\ldots(2n+3)} \cdot \frac{8}{35}.$$

Es ist also:

$$X_1 = 1 + \frac{6}{5}\zeta + \frac{6}{35}\zeta^2 - \frac{2}{105}\zeta^3 + \frac{2}{385}\zeta^4 - \frac{2}{1001}\zeta^5 \ldots \qquad 14a)$$

Geht man zur Berechnung von X_1 von dem Näherungswerte $\zeta_0 = \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} f$ aus, so wird man zum Erreichen des strengen Wertes von x wohl kaum je nötig haben, die Gleichungen $A_1)$ und $B_1)$ mehrmals durchzurechnen.

An dem Algorithmus von Gauss sind im Laufe der Jahre mehrfach Vereinfachungen angebracht worden; die erheblichste davon aber von Hansen.[1] Hansen geht ebenfalls von den Gleichungen *A)* und *B)* aus, eliminiert aber x mittels A aus B und erhält so zunächst:

$$y^2(y-1) = \left(\frac{4}{3}m - \frac{8}{5}ml + \frac{64}{35}ml^2 \ldots\right) + \\ + \frac{8}{5} \cdot \frac{m^2}{y^2}\left(1 - \frac{16}{7}l \ldots\right) + \frac{64}{35} \cdot \frac{m^3}{y^4}(1 \ldots) + \ldots \quad 16)$$

Indem er nun für y die Reihenform stipuliert:

$$y = (1 + \alpha m + \beta m^2 + \gamma m_3 \ldots) + ml(\beta' + \gamma' m \ldots) + \\ + ml^2(\gamma'' + \ldots) + \ldots$$

und die Größen $\alpha, \beta, \gamma \ldots, \beta' \ldots$ nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten ermittelt, erhält er

$$y = \left(1 + \frac{4}{3}m - \frac{88}{45}m^2 + \frac{5312}{945}m^3 \ldots\right) - \\ - \frac{8}{5}ml\left(1 - \frac{64}{21}m \ldots\right) + \frac{64}{35}ml^2(1 \ldots) + \ldots \quad 16^*)$$

Um die Glieder m^2 und ml wegzuschaffen und die Koeffizienten der übrigen herabzumindern, wird statt m die Größe λ substituiert mittels der Relation

$$\lambda\left(1 + \frac{11}{9}\lambda\right) = \frac{m}{\frac{5}{6} + l} = h_0. \quad 17)$$

---

[1] P. A. Hansen, Über die Bestimmung der Bahn eines Himmelskörpers aus drei Beobachtungen. Ber. d. kgl. sächs. Gesellsch. d. Wiss. math.-phys. Klasse, 1863, p. 83.

Daraus geht hervor

$$y = 1 + \frac{10}{9}\lambda - \left(\frac{340}{5103}\lambda^3 - \frac{8}{63}\lambda^2 l + \frac{8}{105}\lambda l^2\right) +$$
$$+ \left(\frac{8830}{45927}\lambda^4 - \frac{16}{63}\lambda^3 l - \frac{16}{945}\lambda^2 l^2 + \frac{128}{945}\lambda l^3\right) -$$
$$- \left(\frac{2339900}{4546773}\lambda^5 - \frac{20480}{56133}\lambda^4 l - \frac{1168}{31185}\lambda^3 l^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{8576}{93555}\lambda^2 l^3 + \frac{128}{693}\lambda l^4\right) + \ldots \quad 16^*)$$

Die Koeffizienten der Glieder höherer Ordnung sind sämtlich so klein, daß es in den weitaus meisten Fällen hinreicht, anzunehmen:

$$y = 1 + \frac{10}{9}\lambda. \qquad 18)$$

Man erhält also jetzt λ aus der quadratischen Gleichung 17) und damit y aus 18) und hierauf x aus *A)*.

Die Auflösung der Gleichung 17) läßt sich leicht trigonometrisch oder noch etwas einfacher mittels des Kettenbruches:

$$\lambda = \cfrac{h_0}{1 + \cfrac{\frac{11}{9}h_0}{1 + \cfrac{\frac{11}{9}h_0}{1 + \ldots}}} \qquad 19)$$

bewerkstelligen. Ferner möge noch darauf hingewiesen werden, daß mit h_0 (17) die von Gauss eingeführte Größe h (*C*) für $\xi = 0$ bezeichnet wurde.

Die Vereinfachung besteht also darin, daß man zur Berechnung von y keine Hilfstafel und auch keine zweite zur Entnahme von Korrektionsgrößen bedarf.

Auf einem einfacheren Wege gelangte Tietjen[1] zu demselben Resultate, indem er in die Gleichung *D)* direkt substituiert:

$$y = 1+z. \qquad 20)$$

Damit verwandelt sie sich in:

$$(1+0\cdot 9z)h = 0\cdot 9z(1+z)^2 =$$
$$= 0\cdot 9z[(1+0\cdot 9z)(1+1\cdot 1z)+0\cdot 01z^2]$$

oder mit Vernachlässigung von $0\cdot 01\,z^3$ in die Gleichung:

$$z(1+1\cdot 1z) = \frac{10}{9}h, \qquad 21)$$

welche unmittelbar auf den Hansen'schen Kettenbruch hinführt.

In meiner Abhandlung über Bahnbestimmung eines Himmelskörpers[2] habe ich in § 8, dem Gedankengange Hansen's folgend, durch Einführung von

$$m' = \frac{\theta^2}{6(\sqrt{r_1 r_3}\cos f)^3} \qquad 22)$$

statt $m = \frac{\theta^2}{(2\sqrt{r_1 r_3}\cos f)^3}$, $\left(m' = \frac{4}{3}m\right)$ und Annahme von:

$$\varkappa(1+1\cdot 1\varkappa) = \frac{m'}{1+1\cdot 2\,l} = h' \qquad 23)$$

y reduziert auf:

$$y = 1+\varkappa. \qquad 24)$$

Die Berechnung nach diesem Schema gestaltet sich in mehrfacher Beziehung etwas bequemer, weil die hiebei auftretenden Koeffizienten einfacher sind, namentlich dann, wenn

---

[1] Tietjen, Zusammenstellung aller für die Berechnung einer Planetenbahn aus drei vollständigen Beobachtungen erforderlichen Formeln, nebst Rechnungsschema. Berl. Jahrb., 1879, Zusatz p. 20.

[2] E. Weiss, Über die Bestimmung einer Bahn aus drei Beobachtungen. Denkschr. der kaiserl. Akad. der Wissensch., LX, p. 345—394.

man die Berechnung von $\varkappa$ (23) vornimmt, durch den Kettenbruch:

$$\varkappa = \cfrac{h'}{1+\cfrac{1\cdot 1\, h'}{1+\cfrac{1\cdot 1\, h'}{1+\ldots}}} \qquad 25)$$

Übrigens sind begreiflicherweise die Formeln von Hansen, Tietjen und mir nicht wesentlich voneinander verschieden. So erhält man insbesondere aus meinen Ausdrücken sofort die von Tietjen und Hansen, wenn man h' durch $\frac{10}{9}h$ ersetzt.

Encke[1] hat den von Hansen eingeschlagenen Weg schon einige Jahre früher betreten, blieb aber bei der Gleichung 16) stehen, kehrte die Reihe um und entwickelte schließlich $\log y$ in eine Reihe, in welcher er durch Einführung des Hilfswinkels γ durch:

$$\cos\gamma = \frac{2\cos f\sqrt{r_1 r_3}}{r_1+r_3} \qquad \text{VI)}$$

einige die Berechnung von m und l und der Reihenglieder erleichternde Modifikationen anbrachte. In dieser Reihe sind aber die Koeffizienten so beträchtlich, daß sie nur bei kurzen Zwischenzeiten mit Vorteil verwendet werden kann.

Alle diese Methoden haben das gemeinsam, daß man zur Ermittlung der Größe $x = \sin^2\frac{1}{2}g$, die man sucht, zuerst das Verhältnis y des Sektors zum Dreiecke berechnet und erst mit Hilfe dessen auf x übergeht. Da man aber y zu weiter nichts benötigt, ist dies ein Umweg, den man ersparen kann.

Gehen wir auf die Gleichungen *V)*, 7) und 9) zurück und setzen wir N aus V):

$$N = 4\sqrt{r_1 r_3}\cos f(l+x)$$

ein in die Gleichung:

$$N = 2a\sin^2 g, \qquad 7)$$

[1] Encke, Über die Bestimmung einer elliptischen Bahn aus drei vollständigen Beobachtungen. Berl. Jahrb., 1854, § 17.

so erhalten wir:

$$\frac{1}{a} = \frac{\sin^2 g}{2\sqrt{r_1 r_3}\cos f(l+x)}. \qquad 7^*)$$

Dies liefert, eingetragen in:

$$\frac{\theta}{a^{\frac{3}{2}}} = 2g - \sin 2g + \frac{2\sqrt{r_1 r_3}\sin g \cos f}{a}, \qquad 9)$$

sofort die gewünschte Gleichung für $(l+x)$, welche, entsprechend geordnet, lautet:

$$\frac{\theta}{(2\sqrt{r_1 r_3}\cos f)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{l+x}} = 1 + \frac{2g - \sin 2g}{\sin g^3}(l+x). \qquad 9^*)$$

Quadriert man sie, ersetzt man unter einem: $\frac{2g - \sin 2g}{\sin g^3}$ durch die Reihe 14*) und nennt man abkürzungsweise:

$$m' = \frac{\theta^2}{6(\sqrt{r_1 r_3}\cos f)^{\frac{3}{2}}}, \qquad 22)$$

so ergibt sich:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{m'}{l+x} = 1 + \frac{8}{3}(l+x)\left(1 + \frac{6}{5}x + \frac{48}{35}x^2 + \frac{32}{21}x^3 \ldots\right) + \\ + \frac{16}{9}(l+x)^2\left(1 + \frac{12}{5}x + \frac{732}{175}x^2 \ldots\right)$$

oder geordnet nach Potenzen von:

$$z = l+x \qquad 26)$$

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{m'}{z} = 1 + \frac{8}{3}z\left(1 - \frac{6}{5}l + \frac{48}{35}l^2 - \frac{32}{21}l^3 \ldots\right) + \\ + z^2\left(\frac{224}{45} - \frac{1216}{105}l + \frac{1472}{75}l^2 \ldots\right) + \\ + z^3\left(\frac{832}{105} - \frac{4736}{175}l \ldots\right) + z^4\left(\frac{18112}{1575} \ldots\right) + \ldots \qquad 27)$$

Um die späteren Operationen zu erleichtern und die Koeffizienten der verschiedenen Potenzen von l herabzumindern, substituieren wir:

$$m_1 = \frac{m'}{1+1\cdot 2\,l} \qquad 28)$$

$$z = z_1(1+1\cdot 2\,l) \qquad 29)$$

und erhalten dann:

$$\frac{3}{4}m_1 = z_1 + \left(\frac{8}{3} - \frac{32}{175}l^2 + \frac{512}{1575}l^3\ldots\right)z_1^2 + \\ + \left(\frac{224}{45} + \frac{64}{175}l - \frac{2624}{2625}l^2\ldots\right)z_1^3 + \\ + \left(\frac{832}{105} + \frac{256}{175}l\ldots\right)z_1^4 + \left(\frac{18112}{1575}\ldots\right)z_1^5. \qquad 27^*)$$

Durch Umkehrung dieser Reihe folgt für die gesuchte Größe z_1:

$$z_1 = \frac{3}{4}m_1\left[1 - \left(2 - \frac{24}{175}l^2 + \frac{128}{525}l^3\ldots\right)m_1 + \right. \\ + \left(\frac{26}{5} - \frac{36}{175}l - \frac{468}{875}l^2\ldots\right)m_1^2 - \\ \left. - \left(\frac{537}{35} - \frac{36}{25}l\ldots\right)m_1^3 + \left(\frac{34157}{700} - \ldots\right)m_1^4\ldots\right]. \qquad 30)$$

In dieser Gleichung bleiben die Koeffizienten aller Glieder, die Potenzen von l enthalten, mit Ausnahme des Koeffizienten des Gliedes $m_1^3 l$, der auf nicht ganz 1·5 ansteigt, weit unter der Einheit, sind also so klein, daß sie die Konvergenz der Reihe nicht beeinträchtigen können. Mit den Koeffizienten der verschiedenen Potenzen von m_1 ist dies jedoch nicht der Fall; sie wachsen bei den höheren Potenzen sehr rasch und in progressivem Maße. Diesem Übelstande kann man aber auf sehr verschiedene Art abhelfen.

Das Zweckmäßigste ist es jedenfalls, die Glieder der niedrigsten Ordnung, nämlich innerhalb der Klammer: $-2m_1$

und $+\frac{26}{5}m_1^2$ ganz wegzuschaffen, was erreicht wird durch die Substitution:

$$m_1 = \frac{m_2}{1-2m_2+1\cdot 2\,m_2^2}. \qquad 31)$$

Es resultiert dann:

$$z_1 = \frac{3}{4}m_2 + \left(\frac{18}{175}l^2 - \frac{27}{175}lm_2 - \frac{1}{7}m_2^2\right)m_2^2 -$$

$$-\left(\frac{32}{175}l^3 - \frac{9}{875}l^2m_2 - \frac{27}{175}lm_2^2 + \frac{19}{2800}m_2^3\right)m_2^2 + \ldots \qquad 32)$$

Die Koeffizienten der verschiedenen Potenzen von m_2 sind jetzt ebenfalls sehr klein und es wurden nebstbei auch die größten Koeffizienten der Potenzen von l noch wesentlich herabgedrückt, so daß jetzt keiner der vorhandenen Koeffizienten der Glieder höherer Ordnung den Wert 0·2 erreicht.

Die Größen m', l und x und damit natürlich auch m_1, m_2, z und z_1 werden gewöhnlich als Größen zweiter Ordnung betrachtet; es steigt daher in allen Formeln jede spätere Gliedergruppe gleich um zwei Ordnungen an, so daß die Gleichung 32) bis auf Glieder 11. Ordnung einschließlich streng richtig ist. In den Entwicklungen bis dahin zu gehen, wäre offenbar nicht nötig gewesen, ich habe dieselben aber so weit fortgeführt, um die Überzeugung zu gewinnen, daß auch die Koeffizienten der Glieder 10. Ordnung noch klein bleiben.

Werden in der Gleichung 32) alle Glieder außer dem ersten vernachlässigt, bleibt man also einfach stehen bei

$$z_1 = \frac{3}{4}m_2, \qquad 32^*)$$

so begeht man einen Fehler 8. Ordnung. Wir wollen uns daher zunächst über die Bedeutung einer solchen Vernachlässigung orientieren.

Heutzutage wird man wohl eine erste Bahnbestimmung nie mehr erst dann vornehmen, wenn die äußeren Beobachtungen schon mehr als 40 Tage auseinanderliegen. Nehmen

wir daher für $t_3 - t_1 = 40$ Tage an und suchen wir unter dieser Voraussetzung Grenzwerte für f, $r_3 - r_1$, l und m_2.

Die Winkelbewegung: $\frac{dv}{dt} = \frac{k\sqrt{p}}{r^2}$ eines Planeten um die Sonne beläuft sich im Perihel $\left[r = \frac{p}{1+e} = a(1-e)\right]$, wo sie am raschesten erfolgt, auf:

$$\left(\frac{dv}{dt}\right) = \frac{k\sqrt{1+e}}{a^{\frac{1}{2}}(1-e)^{\frac{3}{2}}} = \frac{k\sqrt{1+e}}{q^{\frac{3}{2}}}.$$

Setzen wir nun voraus, der Planet hätte sich die ganze Zwischenzeit $t_3 - t_1$ hindurch mit dieser Geschwindigkeit fortbewegt, so wäre:

$$v_3 - v_1 = 2f = k(t_3 - t_1)\sqrt{1+e}.q^{-\frac{3}{2}} = \theta\sqrt{1+e}q^{-\frac{3}{2}}. \qquad 33)$$

Von Eros abgesehen, besitzt unter den Asteroiden Brucia die kleinste Periheldistanz $q = 1 \cdot 56$. Ferner finden sich unter den 602 im Berliner Jahrbuch für 1909 veröffentlichten elliptischen Bahnen der Planeten dieser Gruppe nur 8 oder $1 \cdot 3\%$, deren Exzentrizität $\frac{1}{3}$ um ein geringes übersteigt, wobei zu bemerken kommt, daß einige dieser Exzentrizitäten noch sehr unsicher sind. Setzen wir daher wie oben $t_3 - t_1 = 40$ Tage, $q = 1 \cdot 56$ und $e = \frac{1}{3}$ ein, so wird der für $2f$ erhaltene Wert nur ganz ausnahmsweise als zu klein sich herausstellen. Er lautet:

$$2f = 23°4 \qquad f = 11°7 \qquad \frac{1}{2}f = 5°9.$$

Für eine Überschlagsrechnung können wir daher $\sin\frac{1}{2}f$ mit dem Bogen vertauschen und nach 33) als Grenzwert für $\sin^2\frac{1}{2}f$ betrachten:

$$\sin^2\frac{1}{2}f = \frac{1}{16}(1+e)\theta^2 q^{-3}. \qquad 34)$$

Der zweite Bestandteil: $\left(\frac{\sqrt{r_1}-\sqrt{r_3}}{\sqrt[4]{r_1 r_3}}\right)^2$ von l (6, I, III) läßt sich, wie ich in meiner Abhandlung über Bahnbestimmung aus drei Beobachtungen in § 8[1] gezeigt habe, mit einer für unsere Zwecke mehr als hinreichenden Genauigkeit durch $\frac{1}{4}\cdot\frac{(r_3-r_1)^2}{r_1 r_3}$ wiedergeben. Durch Einführen dieses Wertes wird l umgeformt in:

$$l=\left[\frac{1}{16}\cdot\frac{(r_1-r_3)^2}{r_1 r_3}+\sin^2\frac{1}{2}f\right]\sec f. \qquad \text{III*)}$$

Die rascheste Änderung des Radiusvektors tritt vermöge der Differentialformel $\frac{dr}{dt}=\frac{ke\sin v}{\sqrt{p}}$ für $v=90°$ ein. Setzen wir nun wieder den ungünstigsten Fall voraus, daß die wahre Anomalie $v=90°$ auf die Mitte der Zwischenzeit t_3-t_1 gefallen wäre und daß $v_1=90-\varphi$ und $v_3=90+\varphi$ war, so wird:

$$\frac{(r_1-r_3)^2}{r_1 r_3}=\frac{e^2(\cos v_3-\cos v_1)^2}{(1+e\cos v_1)(1+e\cos v_3)}=$$

$$=\frac{4e^2\sin^2\varphi}{1-e^2\sin^2\varphi}\doteq 4e^2\sin^2\varphi. \qquad 35)$$

Um einen Näherungswert für φ zu erhalten, wenden wir uns an die Reihe, welche die mittlere Anomalie durch die wahre ausdrückt, nämlich:

$$M=v-2e\sin v+\frac{3}{4}e^2\left(1+\frac{e^2}{6}\ldots\right)\sin 2v-$$

$$-\frac{1}{3}e^3\left(1+\frac{3}{8}e^2\ldots\right)\sin 3v+\frac{5}{32}e^4(1\ldots)\sin 4v+\ldots$$

Nehmen wir sie einmal für $v_3=90+\varphi$ und dann für $v_1=90-\varphi$ in Anspruch und ziehen wir beide so erhaltenen Reihen voneinander ab, so resultiert:

---

[1] Denkschriften der kaiserl. Akad. der Wissensch., LX, p. 373.

$$M_3 - M_1 = \frac{k(t_3 - t_1)}{a^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= 2\varphi - \frac{3}{2} e^2 \left(1 + \frac{e^2}{6} \ldots\right) \sin 2\varphi + \frac{5}{16} e^4 (1 \ldots) \sin 4\varphi. \quad 36)$$

Da φ jedenfalls erheblich kleiner als f ist, kann man die Sinus mit dem Bogen vertauschen und erhält:

$$\frac{\theta}{a^{\frac{1}{2}}} = 2\left(1 - \frac{3}{2} e^2 + \frac{3}{8} e^4 \ldots\right)\varphi.$$

Das Glied mit e^4 als belanglos weglassend, das übrigens φ verkleinern würde, haben wir:

$$\varphi = \frac{\theta}{2\left(1 - \frac{3}{2} e^2\right) a^{\frac{1}{2}}} \quad 37)$$

in unsere Gleichung 35) einzusetzen und erhalten

$$\frac{(r_1 - r_3)^2}{r_1 r_3} = \frac{e^2 \theta^2}{\left(1 - \frac{3}{2} e^2\right)^2 a^3}. \quad 35^*)$$

Damit wird, $\cos f = 1$ angenommen,

$$l = \frac{1}{16}\left[\frac{e^2}{\left(1 - \frac{3}{2} e^2\right)^2} + \frac{1+e}{(1-e)^3}\right]\frac{\theta^2}{a^3}. \quad 36)$$

Die Größe $m' = \frac{\theta^2}{6(\sqrt{r_1 r_3} \cos f)^3}$ erreicht ihr Maximum, wenn der Planet möglichst nahe dem Perihel steht. Nehmen wir also für r_1 und r_3 die Periheldistanz: $a(1-e)$ selbst an, so können wir $\cos f$ um so unbedenklicher der Einheit gleichsetzen, als ja der Planet nicht in beiden Beobachtungen sich im Perihel befinden kann. Wir haben dann als Grenzwert für m':

$$m' = \frac{1}{6} \theta^2 q^{-3}. \quad 37)$$

Aus den Formeln 29) und 32) geht hervor, daß m_2 von m_1 und m' nur um Größen zweiter Ordnung abweicht; wir können daher bei dieser Überschlagsrechnung m_2 ohneweiters mit m' identifizieren.

Übersichtlich zusammengestellt, erhielten wir für $\sin^2\frac{1}{2}f$, l und m_2 die nachstehenden Maximalwerte:

$$P = \frac{1}{6}\theta q^{-3}$$

$$\sin^2\frac{1}{2}f = \frac{3}{8}(1+e).P = 0{\cdot}01039 \qquad 34)$$

$$l = \frac{3}{8}\left[1+e+\frac{e^2(1-e)^3}{(1-1{\cdot}5\,e^2)^2}\right]P = 0{\cdot}01076 \qquad 36)$$

$$m_2 = P = 0{\cdot}02079 \qquad 37)$$

Führen wir, um diese Quantitäten auszuwerten, in dieselben die schon einmal besprochenen Werte $q = 1{\cdot}56$ und $e = \frac{1}{3}$ ein, die wenigstens bisher nur in sehr seltenen Fällen und nie gleichzeitig in jener Richtung überschritten worden sind, welche sie vergrößert hätten, so ergeben sich für $t_3 - t_1 =$ $= 40$ Tage, die oben beigeschriebenen Zahlenwerte.

Der größte zu befürchtende Fehler, welcher der Annahme $z_1 = \frac{3}{4}m_2$ (32*) entspringt, setzt sich nach 32) zusammen aus:

$$-\frac{1}{175}(27\,l+25\,m_2)m_2^3 = -(0{\cdot}\overset{7}{0}149+0{\cdot}\overset{7}{0}267) = -0{\cdot}\overset{7}{0}416$$

und

$$+\frac{18}{175}l^2m_2^2 = +0{\cdot}\overset{8}{0}55.$$

Die über der ersten Null nach dem Dezimalpunkte stehende Ziffer zeigt die Anzahl der Nullen an, welche der ersten zählenden Stelle vorangehen.

Reduziert man den Betrag des letzten Gliedes, das den numerischen Wert der Summe der beiden ersten Posten verkleinert auf $0\overset{8}{\cdot}016$, so stellt sich der Fehler auf $0\overset{7}{\cdot}04$, bei einem Werte von $\frac{3}{4}m_2$, der sich auf 0·0156 beläuft. Derselbe kann daher schlimmstenfalls eine Einheit der siebenten Stelle des Logarithmus austragen. Es dürfte also schwerlich je vorkommen, daß durch diese Vernachlässigung ein irgendwie merkbarer Fehler in die Bahnbestimmung hineingetragen werden könnte.

Die Berechnung von m_2 aus 31) führt auf die quadratische Gleichung:

$$m_2^2 = \frac{1+2m_1}{1\cdot 2\,m_1}m_2 + \frac{1}{1\cdot 2} = 0. \qquad 31^*)$$

Dieselbe kann wohl leicht genug trigonometrisch oder mittels des Kettenbruches:

$$m_2 = \cfrac{m_1}{1+2m_1-\cfrac{1\cdot 2\,m_1^2}{1+2m_1-\cfrac{1\cdot 2\,m_1^2}{1+2m_1-\cfrac{1\cdot 2\,m_1^2}{1+2m_1\ldots}}}}$$

aufgelöst werden, bequemer aber noch auf folgende Art:

Von den beiden Wurzeln der Gleichung ist für unser Problem nur die eine brauchbar, nämlich:

$$m_2 = \frac{1+2m_1-\sqrt{(1+2m_1)^2-4\cdot 8\,m_1^2}}{2\cdot 4\,m_1} =$$

$$= \frac{1+2m_1}{2\cdot 4\,m_1}\left[1-\sqrt{1-\frac{4\cdot 8\,m_1^2}{(1+2m_1)^2}}\right] =$$

$$= \frac{m_1}{1+2m_1} + 1\cdot 2\left(\frac{m_1}{1+2m_1}\right)^3 + 2\cdot 88\left(\frac{m_1}{1+2m_1}\right)^5 +$$

$$+ 8\cdot 64\left(\frac{m_1}{1+2m_1}\right)^7 + \ldots$$

Bereits das zweite Reihenglied, das genähert $1{\cdot}2\,m_2^3$ gesetzt werden kann, erreicht bei $m_2 = 0{\cdot}02$ knapp den Betrag von $0{\cdot}0\overset{5}{0}1$ und das dritte kaum noch $0{\cdot}0\overset{8}{0}1$. Der nach dem ersten Gliede zurückbleibende Rest kann daher, wenn es erforderlich ist, leicht in Rechnung gezogen oder einer kleinen Tafel mit dem Argumente:

$$m_2' = \frac{m_1}{1+2m_1} = \frac{m'}{1+1{\cdot}2\,l+2m'}$$

entnommen werden. Eine solche Tafel ist der Abhandlung beigegeben.

Es erübrigt uns jetzt noch, aus den vorstehenden Entwicklungen die Formeln zusammenzustellen, welche durchzurechnen sind, wenn man nach dieser Methode $x = \sin^2\frac{1}{2}g$ sucht. Es sind die nachstehenden:

$$\theta = k(t_3-t_1) = \overline{8{\cdot}2355814}\,(t_3-t_1) \qquad 2f = v_3-v_1$$

$$\operatorname{tg}(45+\omega) = \sqrt[4]{\frac{r_1}{r_3}} \qquad \text{I)}$$

$$l = \left(\sin^2\frac{1}{2}f+\operatorname{tg}^2 2\,\omega\right)\sec f \qquad \text{III)}$$

$$m' = \frac{\theta^2}{6\,(\sqrt{r_1 r_3}\cos f)^{\frac{1}{2}}} \qquad 22)$$

$$m_2' = \frac{m'}{1+1{\cdot}2\,l+2m'} \qquad 28),\ 39)$$

$$m_2 = m_2'+\mu \qquad 39)$$

$$l+x = \frac{3}{4}(1+1{\cdot}2\,l)m_2. \qquad 27),\ 29),\ 32^*)$$

Die Berechnung von l läßt sich durch Einführen des Hilfswinkels γ (VI) etwas vereinfachen, nämlich

$$\cos\gamma = \frac{2\cos f.\sqrt{r_1 r_3}}{r_1+r_3}$$

$$l = \sin^2\frac{1}{2}\gamma\,\sec\gamma.$$

Die Korrektionsgröße:

$$\mu = 1{\cdot}2\, m_2'^3 + 2{\cdot}88\, m_2'^5 + \ldots$$

kann man der der Abhandlung beigegebenen Tafel entlehnen, aus der man auch auf den ersten Blick übersieht, ob das Anbringen derselben der Mühe lohnt.

Bei der Vergleichung der oben zusammengestellten Formeln mit den von Hansen, Tietjen und mir in meiner schon mehrmals angezogenen Abhandlung entwickelten erkennt man unschwer, daß sie in mancher Beziehung einfacher, bequemer und rascher sich berechnen lassen. Wesentlich kürzer aber sind sie als die von Gauss, selbst abgesehen davon, daß die letzteren schon bei relativ kurzen Zwischenzeiten eine indirekte Rechnung erfordern, da (nach 15) die Korrektionsgröße ξ nur um zwei Ordnungen höher ist als x. Die erstgenannten Methoden liefern allerdings nur einen Näherungswert von x, während die von Gauss durch sukzessive Näherungen stets dessen genauen Wert zu ermitteln gestattet, so lange noch die Größe $X = (2g - \sin 2g) . \sin g^{-3}$ sich mit Vorteil in Reihen entwickeln läßt. Dieser Vorzug hat indes seit der letzten Hälfte des vorigen Jahrhundertes nur noch eine theoretische Bedeutung. Ehe nämlich in der Mitte desselben die Asteroidenentdeckungen sich häuften, verschob man die Bahnberechnungen nicht selten monatelang und benützte schon vorhandene nur zur Bildung von Normalorten, aus denen dann die Elemente so berechnet wurden, als ob sie noch ganz unbekannt wären. Da hätte es allerdings zuweilen vorkommen können, daß selbst bei meiner Methode, obwohl sie erst Größen achter Ordnung vernachlässigt, die Annäherung noch nicht weit genug getrieben ist, was aber heute, wie nachgewiesen wurde, wohl nie mehr vorkommen dürfte. Sollte es übrigens eintreten, so würde man mit ihr jedenfalls einen so genäherten Wert für x erhalten, daß dessen Einsetzen in die von mir für X_1 (14 a) entwickelte Reihe und Modifikation des Verfahrens von Gauss (Gleichung A_1 und B_1) sofort den genauen Wert von x liefern würde.

Tafel für μ.

m_0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	m_0
0·001	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	0·001
2	10	11	13	15	17	19	21	24	27	30	2
3	33	36	40	43	47	51	56	61	66	71	3
4	77	83	89	95	102	109	117	125	133	141	4
5	150	159	168	178	188	199	210	222	234	246	5
6	259	272	285	299	313	328	344	350	377	394	6
7	411	429	447	466	485	505	526	547	569	591	7
8	614	637	661	686	711	737	763	790	818	846	8
0·009	875	904	934	965	997	1029	1062	1096	1130	1165	9
0·010	1201	1237	1274	1312	1350	1389	1429	1470	1512	1555	10
11	1598	1642	1686	1732	1778	1825	1873	1922	1972	2023	11
12	2074	2126	2179	2233	2188	2244	2301	2359	2417	2477	12
13	2637	2699	2761	2824	2888	2953	3019	3086	3154	3224	13
14	3294	3366	3438	3511	3585	3661	3737	3815	3893	3972	14
15	4052	4134	4216	4300	4385	4472	4559	4647	4736	4827	15
16	4918	5011	5105	5200	5296	5394	5493	5593	5694	5797	16
17	5900	6004	6110	6218	6327	6437	6547	6659	6773	6887	17
18	7003	7121	7240	7360	7481	7604	7729	7854	7981	8009	18
19	8238	8369	8501	8635	8770	8907	9044	9183	9324	9466	19
0·020	9609										

Die Zahlen der Tafel sind in Einheiten der neunten Dezimale zu verstehen.

Über die Unterschiedsempfindlichkeit für Tonhöhen in verschiedenen Tonregionen

von

Dr. **Norbert Stücker.**

Aus dem II. physikalischen Institute der Universität Wien.

(Mit 1 Tafel.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 7. März 1907.)

Mit dem kleinsten eben noch wahrnehmbaren Unterschiede zweier nacheinander erklingender Töne haben sich die Physiker im allgemeinen noch sehr wenig beschäftigt.

Die Arbeiten von Delezenne,[1] Wilhelm Weber,[2] Sauveur[3] und A. Seebeck[4] erstrecken sich sämtlich nur über einen einzigen Ton; Delezenne und Sauveur arbeiteten mit Monochordsaiten und berichteten nur, um welches Stück sie eine der beiden Saiten verkürzen mußten, um gerade noch einen Unterschied in der Tonhöhe wahrnehmen zu können, ohne zu bedenken, daß damit die Schwingungszahlen noch nicht gegeben waren. Seebeck gab an, auf 1000 Schwingungen eine noch wahrzunehmen, ohne jedoch mitzuteilen, in welcher Tonregion die Versuche angestellt wurden. Nur Weber schreibt deutlich, bei einem Tone von 200 Schwingungen in der Sekunde noch eine Schwingung unterscheiden zu können. Der erste Physiker, welcher den Gegenstand einer genaueren Prüfung unterzog, war Preyer;[5] derselbe benützte einen sogenannten

---

[1] Recueil des travaux de la Société des Sciences de Lille, 1826 bis 1827, p. 1 f.

[2] Pogg. Annalen, *14*, 398 (1828).

[3] L. c. Mémoires, p. 395.

[4] Pogg. Annalen, *144*, 462 (1846).

[5] Grenzen der Tonwahrnehmung, p. 26 ff. Jena 1876.

Tondifferenzapparat und bestimmte mit diesem sowohl die relative als auch die absolute Unterschiedsempfindlichkeit von Tönen mit zirka 500, 1000, 1024, 2048 und 4096 Schwingungen in der Sekunde; nach ihm bleibt die letztere in den mittleren Regionen der musikalisch gebrauchten Töne nahezu gleich, während die erstere mit der Tonhöhe zunimmt. Im übrigen muß auf die Originalarbeit verwiesen werden.

L. W. Stern[1] verwendete als Tonerreger eine angeblasene Flasche ohne Boden, die in Wasser tauchte, dessen Niveau verändert werden konnte; er untersuchte, wie weit man einen kontinuierlichen Ton allmählich verändern kann, bis ein Unterschied wahrgenommen wurde, und gelangte zu dem Resultat, daß die Wahrnehmbarkeit allmählicher Veränderungen um so feiner sei, je langsamer dieselben erfolgen.

Von M. Mayer[2] stammen Beobachtungen über die Töne von 400, 600 und 1200 Schwingungen, welche an Herrn Prof. Stumpf als Versuchsperson angestellt wurden.

E. Luft[3] untersuchte Töne mit einer Schwingungszahl von 64 bis 1024 in der Sekunde; seine Werte dürften wohl die genauesten sein, da er sowohl die eine der beiden Gabeln, vom Einklang ausgehend, allmählich verstimmte, als auch, von einer Differenz ausgehend, sie langsam zur Konsonanz brachte, ferner die verstimmbare Gabel abwechselnd höher und tiefer als die andere stimmte und endlich auch bald die eine, bald die andere Gabel zuerst anschlug; hiedurch ergaben sich für jeden Ton acht Beobachtungsreihen. Die relative Unterschiedsempfindlichkeit wird auch bei Luft mit der Tonhöhe größer.

Cornu und Mercadier,[4] Preyer,[5] Schischmanow[6] und Stumpf[7] befaßten sich mit der Empfindlichkeit des Intervallensinnes; geradeso wie zwei wenig voneinander verstimmte

---

[1] Zeitschrift für Psychol. und Physiol. der Sinnesorgane, *11*, 1 (1891).

[2] Wundt, Philos. Studien, *4*, 511 ff. (1888).

[3] Id., *16*, 352 ff. (1898).

[4] Compt. rend., *68*, 301 f., 424 f. (1869).

[5] Grenzen der Tonwahrnehmung, p. 38 ff.

[6] Wundt, Philos. Studien, *5*, 558 f. (1889).

[7] Zeitschrift für Psychol. und Physiol. der Sinnesorgane, *18*, 373 (1898).

Töne werden auch Intervalle besser beurteilt, wenn die Töne aufeinanderfolgen.

Da wir im folgenden einige Beziehungen zwischen der Unterschiedsempfindlichkeit und der absoluten Hörschärfe treffen werden, so will ich kurz die Arbeiten von Helmholtz[1] sowie von Quix und Minkema[2] erwähnen; der erstere entdeckte ein Maximum der Hörschärfe im Umkreis des viergestrichenen *g*, während die letzteren die Beobachtung machten, daß dieselbe innerhalb einer Oktave Veränderungen unterworfen ist, welche in jeder folgenden Oktave periodisch wiederkehren, eine Erscheinung, auf die wir später noch zu sprechen kommen.

Meine Beobachtungen erstrecken sich bezüglich der gebrauchten Töne innerhalb des Intervalles von 72 und 35000 Schwingungen in der Sekunde, also auf fast 9 Oktaven; während ich in der eingestrichenen Oktave für jeden Ton der *C*-dur-Skala eine Stimmgabel vorrätig hatte, stand mir jedoch in den tieferen Regionen nur eine Gabel für jede Oktave zur Verfügung. Folgende Töne (nach der Bezeichnung von Sondhauß) kamen bei meinen Untersuchungen in Verwendung: d^{-1}, c^0, c^1, alle Töne der *C*-dur-Skala bis c^2, ferner a^2, a^3, g^4 (von hier forlaufend bis c^6), endlich g^6, c^7, g^7 und c^8. Bis inklusive c^2 wurden die Töne mit Stimmgabeln erzeugt, für a^2 und a^3 verwendete ich Monochordsaiten und für die übrigen Töne die Galtonpfeife. Die Gabeln a^1 und c^2 verstimmte ich mittels Klebwachses, die übrigen durch Befestigen von Laufgewichten; bei den Saiten wurde der Ton durch Verrückung des Steges abgeändert. Bei jeder Versuchsreihe stellte ich zuerst eine große Differenz in der Schwingungszahl der beiden Gabeln her, die ich sodann allmählich kleiner werden ließ; ferner wiederholte ich jeden einzelnen Versuch einige Male, wobei die Töne in wechselnder Reihenfolge erzeugt wurden, bis ich die Grenze der Unterscheidbarkeit genau bestimmt hatte. Das Zeitintervall, welches zwischen dem Erklingen der beiden Töne verstrich, betrug bei allen Versuchen ungefähr eine Sekunde. Die Gabeln mußte ich während des Anschlagens stets einen Augenblick

---

[1] Lehre von den Tonempfindungen, p. 176.

[2] Archiv für (Anat. und) Physiol., 1905, Suppl. 305 bis 319.

am unteren Ende der Zinken berühren, um das Mitschwingen von Obertönen zu verhindern.

Das Hervorbringen der Töne der achtgestrichenen Oktave ist auf zweifache Art ausführbar. Entweder kann man die Pfeife nach der von Edelmann berechneten Tabelle auf den gewünschten Ton selbst einstellen oder man kann denselben unter gewissen Umständen als harmonischen Oberton eines tieferen Tones erhalten. Das letztere ist nur auf folgende Weise gelungen: Die Erzeugung der einzelnen Töne der Galtonpfeife hängt bekanntlich von zwei Größen ab: von der Pfeifenlänge und von der sogenannten Maulweite; die erstere bedingt die Höhe, die letztere die Reinheit des Tones, jeder Pfeifenlänge entspricht aber eine bestimmte Maulweite, bei welcher der Ton am besten anspricht. Wenn wir nun auf die Pfeifenlänge irgend eines Tones der fünfgestrichenen Oktave einstellen, die Maulweite aber möglichst klein machen, so wird bei vorsichtigem Drücken des Gummiballes statt des erwarteten Tones ein um drei Oktaven höherer, also ein in der achtgestrichenen Oktave liegender Ton erklingen. Die auf diese Art erzeugten Töne haben den Vorzug, daß sie infolge ihrer großen Intensität viel leichter noch gehört werden können; doch ergaben sich bei der Messung der Hörgrenze keine nennenswerten Unterschiede.

Im folgenden bringe ich nun eine Übersicht über die an 50 Personen gemessene Unterschiedsempfindlichkeit in verschiedenen Tonregionen; dieselbe ist in Tabelle I und II in Schwingungen (absolute Unterschiedsempfindlichkeit), in Tabelle III und IV in Prozenten der Schwingungszahl des tieferen Tones (relative Unterschiedsempfindlichkeit) und in Tabelle V in Bruchteilen eines ganzen Tones der gleichschwebend temperierten Skala angegeben. In Tabelle I ist außerdem die Hörgrenze erwähnt. Zum Schlusse folgt eine graphische Darstellung der typischen Empfindlichkeitskurven für die relative Unterschiedsempfindlichkeit (siehe die nächstfolgenden Seiten).

Tabelle I.

Eben noch unterscheidbare Differenz, in Schwingungen gemessen.

(Die im folgenden genannten Töne waren durchwegs die tieferen.)

Tonhöhe	d^{-1}	c^0	c^1	a^1	c^2	a^2	a^3	g^4	c^5	g^5	c^6	g^6	c^7	g^7	c^8	Grenze der Hörbarkeit
Schwingungszahl	73·4	130·5	261	435	522	870	1740	3100	4176	6200	8352	12400	16704	24800	33408	
Verfasser	0·07	0·5	0·5	0·3	—	0·7	1·7	4	6	14	17	124	124	545	1040	67000
Dr. V. H.	0·9	1·8	1.3	0·9	—	2·6	6·0	13	10	56	184	1796	2120	∞		50000
Herr A. K.	0·2	0·8	3·0	2·8	—	6·0	14·0	31	34	142	328	2560	3840	∞		33000
Dr. K. S.	0·7	0·9	0·5	0·3	—	1·2	5·1	22	26	85	157	727	1290	7110	∞	43000
Dr. E. H.	0·4	1·0	2·0	2·3	—	5·0	12·0	33	63	260	438	1434	3610	33800	∞	50000
Dr. K. B.	0·2	1·3	1·6	1·2	—	2·4	—	12	18	79	273	1113	2327	8500	∞	45000
Herr F. K.	0·2	1·2	2·0	1·3	—	2·0	4·1	9	12	218	636	5264	∞			48000
Frau M. V.	0·2	1·0	1·7	1·1	—	3·9	16·0	71	103	470	∞					38000
Herr A. Sch.	0·3	0·5	0·7	1·1	—	3·0	10·6	74	103	589	3844	∞				40000
Prof. Bdf.	0·47	1·2	1·9	1·2	—	2·2	6·1	20	32	302	438	1664	2609	7100	26500	55000
Dr. J. R.	0·5	0·8	1·5	2·4	—	5·0	10·4	23	30	189	273	1861	∞			44000
OLR. St.	0·08	—	—	0·1	—	0·5	2·8	12	71	351	438	1368	2146	6380	25000	45000
Frau A. St.	0·08	0·1	0·15	0·2	—	0·7	3·2	19	42	201	308	1050	2327	6860	∞	45000
Herr A. L.	0·18	0·2	—	0·3	—	0·9	4·0	23	34	175	166	494	727	1000	1430	38000

Tonhöhe	d^{-1}	c^0	c^1	a^1	c^2	a^2	a^3	g^4	c^5	g^5	c^6	g^6	c^7	g^7	c^8	Grenze der Hörbarkeit
Schwingungszahl	73·4	130·5	261	435	522	870	1740	3100	4176	6200	8352	12400	16704	24800	33408	
Ing. H. L.	0·11	0·2	0·7	2·0	—	4·6	17·0	38	48	400	753	5922	∞			42000
Frau N. L.	0·10	0·2	0·6	1·7	—	4·0	10·0	21	71	501	932	∞				45000
Dr. L. R.	1·2	2·4	3·1	2·3	—	4·0	8·9	18	16	39	69	333	402	1040	2840	>60000
Dr. F. Ai.	0·16	0·3	0·3	0·2	—	0·4	1·0	3	4	28	60	437	692	1890	4300	>60000
Hofrat W.	0·57	1·5	1·4	1·3	—	1·9	2·7	4	8	50	148	947	∞			45000
Frau L. W.	0·57	1·6	1·4	1·2	—	3·4	8·4	20	36	540	1000	∞				39000
Herr G. K.	0·6	0·9	1·5	—	1·0	2·2	7·5	48	125	1016	∞					43000
Herr W. Sp.	1·53	2·2	1·0	—	0·6	1·7	5·6	25	26	162	390	4576	∞			43000
Dr. G. Hb.	1·27	1·9	1·8	0·7	—	1·1	2·9	13	8	167	383	1260	∞			53000
Dr. J. N.	0·60	0·8	1·2	1·5	—	3·8	10·2	30	38	248	832	6630	∞			55000
OLR. K.	0·65	1·4	1·8	1·2	—	1·5	3·1	9	8	73	104	456	660	2650	4100	53000
Prof. F. E.	2·17	1·8	0·6	0·4	—	1·0	4·0	13	14	92	237	786	∞			43000
Herr B. B.	1·13	1·0	1·1	1·5	—	3·3	7·8	21	24	∞						50000
Dr. O. St.	4·00	3·2	2·2	1·7	—	2·8	6·2	29	168	875	1569	∞				38000
Herr H. Sch.	0·90	1·1	1·7	2·7	—	5·2	10·9	23	76	200	569	∞				45000
Hofrat Sk.	1·07	0·28	0·1	0·1	—	1·0	3·5	39	36	308	560	2158	∞			31000
Frau H. Sch.	1·3	1·4	1·6	1·9	—	3·3	7·0	31	264	∞						40000
Dr. O. v. St.	1·2	1·4	1·9	2·7	—	4·2	8·6	18	18	83	131	362	660	1860	3740	>58000

Frau H. H.	3·2	2·6	2·2	2·0	—	6·7	30·0	81	558	2390	∞					33000
Baron W. E.	1·4	1·7	2·2	2·5	—	2·8	4·7	10	16	47	87	351	1290	4150	11200	45000
Baron E. E.	1·5	2·1	3·2	4·1	—	5·0	11·3	25	32	167	193	746	1040	3590	7050	45000
Fräulein Ph.	1·5	—	—	3·9	—	3·0	2·0	3	8	39	52	160	500	3240	∞	50000
Herr J. Ey.	0·5	0·6	0·8	1·1	—	1·8	3·3	7	28	142	1034	∞				45000
Dr. A. Gst.	0·03	0·06	—	0·3	—	0·9	3·0	12	30	471	∞					38000
Frau M. Gst.	0·45	0·8	—	2·2	—	1·3	1·9	3	4	11	19	38	97	270	840	>60000
Fräulein Th.	0·3	0·5	0·7	1·0	—	2·0	4·0	9	12	230	400	∞				55000
Fräulein Db.	0·3	0·5	0·7	1·0	—	2·3	6·1	13	20	201	273	2050	∞			55000
Fräulein Kl.	0·03	0·1	0·4	1·6	—	6·3	29·8	157	240	988	∞					58000
Prof. v. Schw.	0·08	0·2	0·4	—	1·1	4·0	14·5	65	143	376	704	1676	3470	12000	∞	37000
Dr. O. v. A.	0·27	0·7	0·6	—	0·9	1·9	8·4	56	125	482	939	∞				50000
Herr J. Sk.	0·11	0·18	0·29	4·2	—	1·8	6·3	23	32	120	233	727	1040	5000	9510	50000
Dr. E. v. H.	0·2	0·8	0·9	1·2	—	2·5	6·0	16	55	1310	∞					50000
Herr H. G.	0·1	0·3	0·6	0·9	—	2·0	4·8	17	108	671	∞					53000
Dr. R. Pf.	0·9	1·0	1·2	1·6	—	3·6	9·1	22	42	∞						56000
Herr M. Pf.	0·54	0·7	1·3	2·6	—	5·9	14·8	38	45	290	280	1590	∞			47000
Dr. F. Eh.	1·50	0·45	0·28	<0·05	—	1·6	7·0	52	100	540	1344	∞				37000

Tabelle II.

Eben noch merkliche Differenz, in Schwingungen gemessen.

a) Für die eingestrichene Oktave.

Tonhöhe	c^1	d^1	e^1	f^1	g^1	a^1	h^1	c^2
$n =$	261	294	329	348	388	435	489	522
Dr. K. S.	0·5	0·7	0·7	0·6	0·3	0·3	0·4	0·2
Dr. E. H.	2·0	2·4	2·4	2·5	2·2	2·3	2·5	1·8
Hofrat W.	1·4	1·6	1·5	1·5	1·3	1·3	1·4	1·1
Frau L. W.	1·4	1·75	1·6	1·6	1·2	1·2	1·4	1·0
OLR. K.	1·8	1·7	1·5	1·5	1·3	1·2	1·6	1·0
Dr. J. N.	1·2	1·6	1·6	1·6	1·4	1·5	1·8	1·4
Prof. F. E.	0·6	0·7	0·7	0·6	0·3	0·4	0·5	0·3

b) Für g^4 bis h^4 und die fünfgestrichene Oktave.

Tonhöhe	g^4	a^4	h^4	c^5	d^5	e^5	f^5	g^5	a^5	h^5	c^6
$n =$	3100	3480	3915	4176	4698	5220	5568	6200	6960	7830	8352
Verfasser	4	4	7	6	11	16	18	14	—	—	17
Dr. V. H.....	13	13	19	10	24	35	—	56	82	136	184
Herr A. K.....	31	34	44	34	68	91	125	142	195	285	328
Dr. E. H.....	33	38	52	63	105	127	189	260	350	596	438
Herr F. K.....	9	9	21	12	27	39	75	218	335	468	636
Herr A. Sch.....	74	83	133	103	180	261	369	589	962	2775	3844
Dr. J. R.	23	29	38	30	61	91	139	189	271	380	273
Dr. F. Ai.....	3	—	—	4	9	16	26	28	39	56	60
Frau L. W.....	20	24	41	36	118	290	—	540	—	—	1000
Dr. G. Hb.	13	—	17	8	29	57	134	167	242	521	383
Dr. J. N.....	30	39	57	38	109	169	232	248	411	674	832
OLR. K.	9	9	17	8	29	51	75	73	125	175	104
Prof. F. E.....	13	15	21	14	42	59	80	92	151	268	237
Herr B. B..... .	21	28	39	24	39	120	170	∞			
Baron E. E.....	25	28	44	32	74	104	180	167	238	393	193
Herr F. L.....	10	9	12	10	17	27	39	39	—	—	60
Fräule n Ph.....	3	4	8	8	16	27	38	39	—	—	52
Dr. A. Gst.	12	20	32	30	67	246	—	471	∞		
Frau M. Gst.....	3	4	5	4	5	6	9	11	—	—	19
Fräulein H. Th.....	9	11	14	12	33	91	166	230	—	—	400

Tabelle III.

Eben merklicher Unterschied, in Prozenten der Schwingungszahl gegeben.

	d^{-1}	c^0	c^1	a^1	c^2	a^2	a^3	g^4	c^5	g^5	c^6	g^6	c^7	g^7	c^8
Verfasser	0·09	0·38	0·19	0·07	—	0·08	0·10	0·13	0·13	0·23	0·20	1·00	0·74	2·3	3·1
Dr. V. H.....	1·23	1·38	0.50	0·21	—	0.30	0·35	0·42	0·24	0·90	2·20	14·46	12·70	∞	
Herr A. K.....	0·28	0·62	1·53	0·65	—	0·69	0·81	1·00	0·81	2·29	3·93	20·65	23·00	∞	
Dr. K. S.	0·94	0·69	0·19	0·07	—	0·14	0·29	0·71	0·62	1·37	1·76	5·85	7·72	28·8	∞
Dr. E. H.....	0·56	0·76	0·76	0·53	—	0·58	0·69	1·07	1·51	4·19	5·26	11·57	21·62	136·3	∞
Dr. K. B.....	0·28	1·00	0·61	0·28	—	0·28	—	0·40	0·43	1·27	3·27	8·97	13·94	34·3	∞
Herr F. K.....	0·28	0·92	0·77	0·30	—	0·23	0·23	0·29	0·26	3·52	7·16	42·45	∞		
Frau M. V.	0·28	0·76	0·65	0·25	—	0·44	0·92	2·29	2·47	7·58	∞				
Herr A. Sch....	0·41	0·38	0·27	0·25	—	0·34	0·61	2·39	2·47	9·50	46·03	∞			
Prof. Bdf.	0·64	0·92	0·73	0·28	—	0·25	0·35	0·65	0·42	4·87	5·26	13·42	15·63	28·8	79·3
Dr. J. R.	0·68	0·62	0·58	0·55	—	0·58	0·60	0·74	0·72	3·05	3·27	15·01	∞		
OLR. St.	0·11	—	—	0·02	—	0·06	0·16	0·39	1·70	5·66	5·26	11·03	12·85	25·6	74·8
Frau A. St.	0·11	0·08	0·04	0·05	—	0·08	0·18	0·61	0·96	3·24	3·69	8·47	13·94	27·7	∞
Herr A. L.....	0·25	0·15	—	0·07	—	0·10	0·23	0·74	0·81	2·82	1·99	3·98	4·35	4·0	4·3
Ing. H. L.	0·15	0·15	0·27	0·46	—	0·53	0·98	1·23	1·15	6·45	9·02	47·76	∞		
Frau N. L.....	0·14	0·15	0·23	0·39	—	0·46	0·58	0·68	1·70	8·08	11·15	∞			

Dr. L. R.	1·64	1·85	1·19	0·05	—	0·46	0·51	0·58	0·38	0·63	0·83	2·69	2·41	4·2	8·3
Dr. F. Ai.	0·21	0·23	0·11	0·05	—	0·05	0·06	0·10	0·10	0·45	0·72	3·52	4·14	7·6	12·9
Hofrat W.	0·78	1·17	0·54	0·30	—	0·22	0·15	0·13	0·19	0·81	1·77	7·64	∞		
Frau L. W.	0·78	1·24	0·54	0·28	—	0·39	0·48	0·65	0·86	8·71	11·97	∞			
Herr G. K.	0·84	0·69	0·59	—	0·23	0·25	0·43	1·53	2·99	16·39	∞				
Herr W. Sp. ..	2·08	1·69	0·39	—	0·14	0·20	0·32	0·81	0·62	2·45	4·67	36·90	∞		
Dr. G. Hb.	1·73	1·46	0·69	0·16	—	0·13	0·17	0·42	0·19	2·69	4·59	10·16	∞		
Dr. J. N.	0·84	0·62	0·46	0·35	—	0·44	0·58	0·97	0·91	4·00	9·96	53·46	∞		
OLR. K.	0·89	1·06	0·69	0·28	—	0·17	0·18	0·30	0·19	1·18	1·25	3·68	3·95	10·7	12·3
Prof. F. E.	2·96	1·38	0·23	0·09	—	0·12	0·24	0·42	0·32	1·48	2·84	6·34	∞		
Herr B. B.	1·71	0·76	0·42	0·34	—	0·38	0·45	0·97	0·57	∞					
Dr. O. St.	5·45	2·45	0·84	0·39	—	0·32	0·36	0·68	4·02	14·12	18·80	∞			
Herr H. Sch. ...	1·23	0·85	0·65	0·62	—	0·60	0·63	0·74	1·82	3·23	6.82	∞			
Frau H. Sch. ...	1·77	1·08	0·61	0·48	—	0·38	0·40	1·00	6·32	∞					
Dr. O. v. St. ...	1·64	1·08	0·73	0·62	—	0·48	0·50	0·58	0·43	1·34	1·57	2·92	3·95	7·5	11·2
Frau H. H.	4·36	2·00	0·68	0·46	—	0·75	1·72	2·61	13·36	∞					
Hofrat Sk.	1·46	0·22	0·04	0·02	—	0·11	0·21	1·26	0·86	4·97	6·70	17·43	∞		
Baron W. E. ...	1·88	1·30	0·84	0·58	—	0·32	0·27	0·32	0·38	0·76	1·10	2·83	7·72	16·7	33·5
Baron E. E.	2·05	1·62	1·23	0·94	—	0·56	0·65	0·81	0·77	2·69	2·31	6·02	8·40	14·6	21·1
Fräulein Ph. ...	2·05	—	—	0·90	—	0·34	0·12	0·10	0·19	0·63	0·62	1·29	3·00	13·1	∞
Herr J. Ey.	0·68	0·46	0·31	0·25	—	0·21	0·19	0·32	0·67	2·29	12·38	∞			

	d^{-1}	c^0	c^1	a^1	c^2	a^2	a^3	g^4	c^5	g^5	c^6	g^6	c^7	g^7	c^8
Dr. A. Gst.	0·04	0·05	—	0·07	—	0·10	0·17	0·40	0·72	7·60	∞				
Frau M. Gst....	0·61	0·61	—	0·50	—	0·15	0·11	0·10	0·10	0·18	0·23	0·31	0·58	1·1	2·5
Fräulein Th. ...	0·41	0·38	0·27	0·23	—	0·23	0·24	0·30	0·29	3·71	4·79	∞			
Fräulein Db. ...	0·41	0·38	0·27	0·23	—	0·26	0·35	0·42	0·48	3·23	3·27	16·53	∞		
Fräulein Kl. ...	0·04	0·08	0·15	0·37	—	0·73	1·71	5·07	5·74	15·94	∞				
Prof. v. Schw. .	0·11	0·15	0·15	—	0·25	0·46	0·83	2·10	3·42	6·06	8·43	13·52	20·77	48·4	∞
Dr. O. v. A.....	0·37	0·54	0·23	—	0·21	0·22	0·48	1·81	2·99	7·78	11·26	∞			
Herr J. Sk.	0·15	0·14	0·11	0·97	—	0·21	0·37	0·74	0·77	1·94	2·79	5·89	8·40	20·2	28·5
Dr. E. v. H.....	0·29	0·62	0·35	0·28	—	0·29	0·35	0·52	1·32	21·13	∞				
Hr. H. G.....	0·14	0·23	0·23	0·21	—	0·23	0·28	0·55	2·61	10·82	∞				
Dr. R. Pf.....	1·23	0·77	0·46	0·37	—	0·39	0·52	0·71	1·00	∞					
Hr. M. Pf.	0·74	0·54	0·50	0·50	—	0·68	0·58	1·23	1·08	4·68	3·36	12·83	∞		
Dr. F. Eh.	2·04	0·35	0·11	<0.01	—	0·18	0·40	1·68	2·40	8·71	16·10	∞			

Tabelle IV.

Eben merkliche Differenz, in Prozenten der Schwingungszahl angegeben.

1. Für die eingestrichene Oktave.

	c^1	d^1	e^1	f^1	g^1	a^1	h^1	c^2
Dr. K. S.	0·19	0·24	0·22	0·17	0·08	0·07	0·08	0·04
Dr. E. H.	0·77	0·82	0·80	0·72	0·59	0·53	0·51	0·34
Hofrat W.	0·54	0·54	0·46	0·43	0·34	0·30	0·29	0·21
Frau L. W.	0·54	0·60	0·54	0·46	0·31	0·28	0·29	0·20
OLR. K.	0·69	0·58	0·46	0·43	0·34	0·28	0·33	0·20
Dr. J. N.	0·46	0·54	0·54	0·46	0·36	0·35	0·37	0·27
Prof. F. E.	0·23	0·24	0·22	0·17	0·08	0·09	0·10	0·06

2. Für g^4 bis h^4 und die fünfgestrichene Oktave.

	g^4	a^4	h^4	c^5	d^5	e^5	f^5	g^5	a^5	h^5	c^6
Herr A. K.	1·00	0·98	1·12	0·81	1·45	1·74	2·24	2·29	2·80	3·64	3·93
Dr. E. H.	1·07	1·09	1·33	1·51	2·23	2·43	3·39	4·19	5·03	7·61	5·26
Dr. J. R.	0·74	0·84	0·97	0·72	1·30	1·74	2·51	3·05	3·90	4·85	3·27
Dr. G. H.	0·42	—	0·43	0·19	0·62	1·09	2·42	2·69	3·48	6·65	4·59
Dr. J. N.	0·97	1·12	1·45	0·91	2·32	3·24	4·16	4·00	5·90	8·61	9·96
OLR. K.	0·30	0·26	0·43	0·19	0·62	0·98	1·34	1·18	1·79	2·23	1·25
Prof. F. E.	0·42	0·43	0·52	0·32	0·90	1·13	1·44	1·48	2·17	3·42	2·84
Baron E. E.	0·81	0·80	1·12	0·77	1·57	2·00	3·44	2·69	3·42	5·02	2·31

Tabelle V.

Eben merklicher Unterschied zweier Töne, in Bruchteilen eines ganzen Tones der gleichschwebend temperierten Skala gegeben.

	d^{-1}	c^0	c^1	a^1	c^2	a^2	a^3	g^4	c^5	g^5	c^6	g^6	c^7	g^7	c^8
Verfasser.....	1/127	1/32	1/68	1/180	1/211	1/154	1/127	1/95	1/84	1/54	1/60	1/12	1/16	1/6	1/4
Frau M. Gst....	1/20	1/20	—	1/24	—	1/88	1/116	1/127	1/129	1/69	1/58	1/40	1/21	1/16	1/5
Frau H. H.	1/3	1/6	1/14	1/27	—	1/16	1/7	1/5	1	6	∞				
Dr. E. H.....	1/22	1/16	1/16	1/23	—	1/22	1/18	1/12	1/8	1/3	1/2	1	1 4/7	11 1/8	∞
Dr. J. R.	1/18	1/20	1/21	1/22	—	1/22	1/21	1/17	1/17	1/4	1/4	1 1/5	∞		
Fräulein Db....	1/30	1/32	1/45	1/54	—	1/47	1/35	1/29	1/25	1/4	1/4	1 1/4	∞		
Dr. F. St.....	1/111	—	—	1/316	—	1/216	1/77	1/32	1/7	1/2	1/2	1	1 1/17	2 1/10	6
Frau A. St.	1/111	1/158	1/211	1/269	—	1/154	1/68	1/20	1/12	1/4	1/3	2/3	1	2 1/4	∞
Dr. A. Gst.	1/296	1/264	—	1/180	—	1/120	1/72	1/32	1/17	4/7	∞				

Fräulein Kl. ...	1/296	1/158	1/79	1/88	—	1/17	1/7	1/2	1/2	1	∞				
Prof. v. Schw. .	1/111	1/79	1/79	—	1/57	1/27	1/15	1/6	2/7	1/2	3/4	1	16/7	4	∞
Dr. L. R.	1/7	1/7	1/10	1/28	—	1/27	1/24	1/21	1/32	1/20	1/16	1/5	1/5	1/3	13/7
Prof. F. E.....	1/4	1/9	1/53	1/185	—	1/108	1/54	1/29	1/36	1/8	1/4	1/2	∞		
Dr. O. v. St....	1/7	1/11	1/16	1/20	—	1/26	1/24	1/12	1/28	1/9	1/8	1/4	1/3	3/5	1
Baron W. E....	1/6	1/9	1/14	1/22	—	1/36	1/46	1/38	1/32	1/16	1/10	1/4	3/5	11/3	23/4
Fräulein Ph. ...	1/6	—	—	1/14	—	1/36	1/108	1/127	1/68	1/19	1/20	1/10	1/4	1	∞
Dr. V. H.....	1/10	1/9	1/24	1/60	—	1/42	1/36	1/29	1/51	1/14	1/5	11/5	1	∞	
Dr. J. N.	1/15	1/20	1/26	1/36	—	1/26	1/21	1/18	1/15	1/3	5/6	4	∞		
Herr Ey.....	1/18	1/26	1/40	1/49	—	1/60	1/65	1/54	1/18	1/5	1	∞			
Herr F. L.....	1/6	—.	—	1/18	—	—	—	1/38	1/51	1/19	1/17	∞			
Herr J. Sk.	1/81	1/89	1/109	1/18	—	1/60	1/34	1/17	1/16	1/6	1/4	1/2	1/2	12/3	21/3
Hofrat Sk.	1/9	1/57	1/316	1/540	—	1/108	1/62	1/10	1/14	2/5	1/2	3/4	∞		

Betrachten wir die in den Tabellen I bis V enthaltenen Resultate, so ergeben sich folgende Gesetzmäßigkeiten:

1. Weder die absolute noch die relative Unterschiedsempfindlichkeit zweier Töne bleibt in verschiedenen Tonregionen konstant.

2. Die relative Unterschiedsempfindlichkeit ist im allgemeinen in der ein- und zweigestrichenen Oktave am größten; in manchen Fällen liegt jedoch das Maximum derselben in der drei- und viergestrichenen Oktave.

3. Bei einem Drittel sämtlicher Versuchspersonen ist die relative Unterschiedsempfindlichkeit in der zweiten Hälfte der eingestrichenen Oktave nahezu gleich (nämlich 0·20 bis 0·30); vergleicht man von diesen die einzelnen Empfindlichkeitskurven, so liegen die Maxima der Empfindlichkeit bei musikalischen Individuen oberhalb dieser Tonregion, während sie bei Unmusikalischen im allgemeinen unterhalb derselben liegen.

4. Die Empfindlichkeit ist innerhalb einer Oktave Schwankungen unterworfen, die sich in jeder Oktave in demselben Verhältnis wiederholen; sie ist für *c* am größten, hierauf folgt *g* und zum Schlusse *f* und *h*. Die Gründe hiefür werde ich versuchen, im folgenden auseinanderzusetzen.

5. Eine Anzahl Personen weisen in der großen Oktave ein sekundäres Maximum der Empfindlichkeit auf.

6. Eine ungewöhnlich große Empfindlichkeit in hohen Tonregionen ist für musikalische Personen charakteristisch.

Ehe ich auf die einzelnen Empfindlichkeitskurven näher eingehen will, möchte ich die Gründe für die Schwankungen innerhalb einer Oktave kurz besprechen. Helmholtz entdeckte gelegentlich einer Untersuchung über die Perzeptionsfähigkeit des menschlichen Ohres, daß die Intensitätsschwelle eines Tones, um als solcher gehört zu werden, für g^4 und die benachbarten Tonregionen am kleinsten ist, und erklärte diese Erscheinung damit, daß g^4 ein Eigenton des menschlichen Ohres sei und daß somit durch die Resonanz, welche beim Erklingen des Tones g^4 im Ohre eintritt, der Ton so verstärkt

wird, daß eine geringere Intensität schon genügt, um denselben über die Merklichkeitsschwelle zu bringen. Quix und Minkema stellten genaue Versuche über die Hörschärfe in verschiedenen Regionen an, wobei sich zeigte, daß die Empfindlichkeit für alle *c* stets größer sei als für die *g*. Es mußte mich nun mit Recht interessieren, daß ich bei der Bestimmung der Unterschiedsempfindlichkeit ähnliche Erscheinungen beobachtete. Ausgehen will ich von dem von Musikern allzeit anerkannten, sogenannten absoluten Klangcharakter jeder Tonart. Die Physiker lassen denselben nicht ohneweiters gelten, indem sie die hellen Klänge der Kreuztonarten bei den Streichinstrumenten auf die häufige Verwendung der leeren Saiten und beim Klavier auf die der Untertasten zurückführen, da nach Helmholtz die Obertasten infolge ihrer kürzeren Tastenlänge Töne mit anderer Klangfarbe geben müßten. Nun weiß ich aus eigener Erfahrung, daß dies nicht der Fall ist. Wenn ich z. B. auf einem Klavier, das um mehr als einen Viertelton zu hoch oder zu tief in Bezug auf die mittlere Stimmung der meisten Klaviere gestimmt ist, ein Stück in *C*-dur spiele, so habe ich sofort den ganz bestimmten Eindruck, in *Des*-dur, beziehungsweise in *H*-dur zu spielen. Jeder Musikbetreibende weiß nun, daß *C*-dur eine der härtesten und am grellsten klingenden Tonarten ist, während das benachbarte *Des*-dur wiederum eine der weichsten, wenn nicht vielleicht die weichste Tonart ist. Ein ähnliches Verhältnis, nur gemildert, besteht zwischen *G*-dur und *As*-dur. Wenn ich z. B. jetzt einen Ton *c* nehme und denselben gegen *des* verändere, so wird sich entsprechend der großen Verschiedenheit des absoluten Klangcharakters der beiden Töne auch der absolute Charakter eines Tones, der allmählich von *c* nach *des* gestimmt wird, schneller ändern als z. B. von *h* nach *c*, da diese beiden Töne einen ziemlich ähnlichen Klangcharakter haben. Mit dieser Erklärung stimmen meine Beobachtungen überein; wenn ich einen Ton *c* und einen etwas höheren erklingen ließ, so bedurfte es aus den erwähnten Gründen einer viel kleineren Schwingungsdifferenz, um einen Unterschied wahrzunehmen, als bei anderen Tönen. Hiemit wird die Beobachtung erklärt, daß die Empfindlichkeit für *c* bedeutend vermindert wurde,

wenn man den zweiten Ton in der Richtung gegen *h* verstimmte. Es könnte nun freilich jemand einwenden, die Normalstimmung sei etwas Konventionelles, so daß die besprochenen Erscheinungen keine Erklärung fänden, wenn man eine andere Stimmung einführen würde. Dieser Behauptung gegenüber läßt sich jedoch entgegnen, daß seit der Zeit, als der absolute Klangcharakter der Tonarten bei der Wahl derselben in der Musik eine Rolle zu spielen begann (also ungefähr seit Mitte des XVIII. Jahrhunderts), die verschiedenen Stimmungen überhaupt nur um weniges voneinander abweichen und daß das Ohr die Fähigkeit zu besitzen scheint, den absoluten Klangcharakter eines Tones, z. B. *c*, nach mehrmaligem Hören unbewußt im Gedächtnisse festzuhalten und von diesem *c* aus — da ich zu Beginn jeder Versuchsreihe die eine Gabel fast einen halben Ton höher stimmte, war ja der Klangfarbenunterschied der beiden Gabeln leichter zu erkennen — die anderen Töne zu beurteilen. Hiefür spricht die Tatsache, daß diese Erscheinung um so deutlicher hervortrat, je öfter man die Versuche wiederholte.

Nun will ich zu der Besprechung der einzelnen Kurven übergehen (siehe die Tafel). Aus den erwähnten Gründen habe ich bei denselben die Werte für c^5, c^6, c^7 und c^8 nicht berücksichtigt.

Da die Kurven für Dr. J. R. (Nr. 1), Fräulein Db. und Dr. E. H. die einzigen sind, die miteinander einige Ähnlichkeit zeigen, und dieselben außerdem ungefähr die Mittelwerte aller gegebenen Kurven bilden, so will ich mit diesen beginnen. Bei den beiden ersteren steigt die Empfindlichkeit von der großen Oktave langsam, um gegen das Ende der eingestrichenen Oktave das Maximum zu erreichen und zuerst langsam, von der fünfgestrichenen Oktave an aber rasch abzunehmen und nach c^7 überhaupt unmeßbar zu werden. Dr. E. H. zeigt außerdem ein sekundäres Maximum in der großen Oktave; diese Erscheinung wurde außerdem beim Verfasser, bei Dr. V. H. und einigen anderen Personen beobachtet (Nr. 2).

Wenden wir uns nun zu den Kurven von Frau Gst. und Frau H. H., welche die Extreme in der Unterschiedsempfindlichkeit bilden, so finden wir bei ersterer (Nr. 3) das Maximum

erst bei c^5; innerhalb der vier Oktaven von a^2 bis g^6 nähert sich die Kurve einer Geraden, während sich in tieferen Regionen wie bei den meisten fein Hörenden keine abnorme Empfindlichkeit vorfindet. Bei Frau H. H. (Nr. 4), deren minimum perceptibile sehr groß ist, zeigt sich ein deutliches Maximum in der eingestrichenen Oktave, dagegen nimmt die Empfindlichkeit nach beiden Richtungen rasch ab. Wie verschieden die Empfindlichkeit des menschlichen Ohres für Tonunterschiede sein kann, erhellt am besten aus den Werten von Tabelle V für g^5, wo sich die Empfindlichkeit der obgenannten Versuchspersonen wie 410:1 erhält. Beim Verfasser bleibt die Empfindlichkeit mit Ausnahme des erwähnten Minimums in der kleinen Oktave in allen Tonregionen bis c^6 nahezu die gleiche.

Ein deutliches Beispiel für den Unterschied zwischen Musikalischen und Unmusikalischen geben die Kurven von Fräulein Ph. (Nr. 5) und Fräulein Kl. (Nr. 6). Bei ersterer, welche musikalisch ist, ist die Empfindlichkeit in der Tiefe ziemlich gering, während sie bei c^5 ein hohes Maximum zeigt; bei letzterer scheint das Maximum jenseits der großen Oktave zu liegen, da die Empfindlichkeit stets abnimmt und in der dreigestrichenen Oktave sehr kleine Werte besitzt. Die gleiche Eigentümlichkeit weisen die Kurven für Prof. E. und Prof. v. Schw. auf (ersterer ist musikalisch, letzterer nicht). Es muß wohl bemerkt werden, daß ich genug Fälle beobachtete, in denen musikalisch Begabte auch in tiefen Oktaven eine große Unterschiedsempfindlichkeit an den Tag legten; dagegen konnte man mit Sicherheit darauf rechnen, daß Personen, deren Gehör in der Höhe sehr ausgebildet ist, musikalisch waren.

Bei manchen Personen, und zwar hauptsächlich bei solchen, die etwas schwerhörig sind, zeigt die Kurve in den höheren Oktaven plötzlich eine starke Abbiegung nach oben. Als typisches Beispiel seien hier Frau Sch. und Herr F. L. erwähnt (Tab. III und V); letzterer ist ohrenleidend, hat aber innerhalb der angegebenen Grenzen ein sehr feines Unterscheidungsvermögen für qualitative Unterschiede.

Eine eigentümliche Anomalie zeigt Herr Sk. Seine Unterschiedsempfindlichkeit bleibt von d^{-1} bis g^3 nahezu gleich, nur für a^1 ist sie auffallend klein; dadurch, daß ich auch die Werte

für g^1 und h^1 bestimmt habe, die sich den übrigen Werten vollkommen anpaßten, ist also erwiesen, daß diese Anomalie, infolge welcher die Empfindlichkeit für den Ton a^1 achtmal geringer ist, als sie berechnet wurde, nur für diesen Ton allein gilt.

Hofrat Sk. zeigt in der eingestrichenen Oktave eine ganz besondere Unterschiedsempfindlichkeit, indem er sowohl für c^1 als auch für a^1 0·1 Schwingungsdifferenz noch erkennt; dies gibt die enormen Werte von rund $^1/_{320}$, beziehungsweise $^1/_{540}$ eines ganzen Tones der temperierten Skala; nach beiden Richtungen nimmt die Empfindlichkeit jedoch rasch ab und bewegt sich in der großen sowie außerhalb der viergestrichenen Oktave unter dem Mittel.

Betrachtet man in Tabelle III die Werte des Barons E. E., so sieht man deutlich, daß die Unterschiedsempfindlichkeit für alle c relativ größer als für alle g ist; diese Eigentümlichkeit wurde nahezu bei allen Versuchspersonen, in so auffallender Weise aber nur bei musikalisch Gebildeten beobachtet. Besonders hervortretend ist der Unterschied in den hohen Oktaven, wahrscheinlich aus dem Grunde, daß im Gegensatz zu den c die g schon für manche Ohren zu schwach sind, um noch genau beurteilt werden zu können. Doch ist das Beobachtungsmaterial zu gering, um hierüber allgemein gültige Gesetze aufzustellen.

Anschließend bringe ich die Mittelwerte für die Empfindlichkeit zwischen d^{-1} und g^5:

Tonhöhe	d^{-1}	c^0	c^1	a^1	a^2	a^3	g^4	g^5
Wahrnehmbare Differenz	0·94,	0·74,	0·49,	0·32,	0·30,	0·44,	0·86,	4·91

Man sieht, daß das Maximum der relativen Unterschiedsempfindlichkeit zwischen a^1 und a^2, also in der zweigestrichenen Oktave, ungefähr bei e^2 liegen muß. Aus diesen Mittelwerten sind natürlich die Beobachtungen ausgeschaltet, bei denen sich irgend welche Anomalien ergaben, sowie diejenigen, welche in der sechs- und siebengestrichene Oktaven angestellt wurden, da bei vielen Personen die Unterschiedsempfindlichkeit schon unmeßbar klein wird, so daß man keine Mittelwerte mehr berechnen kann.

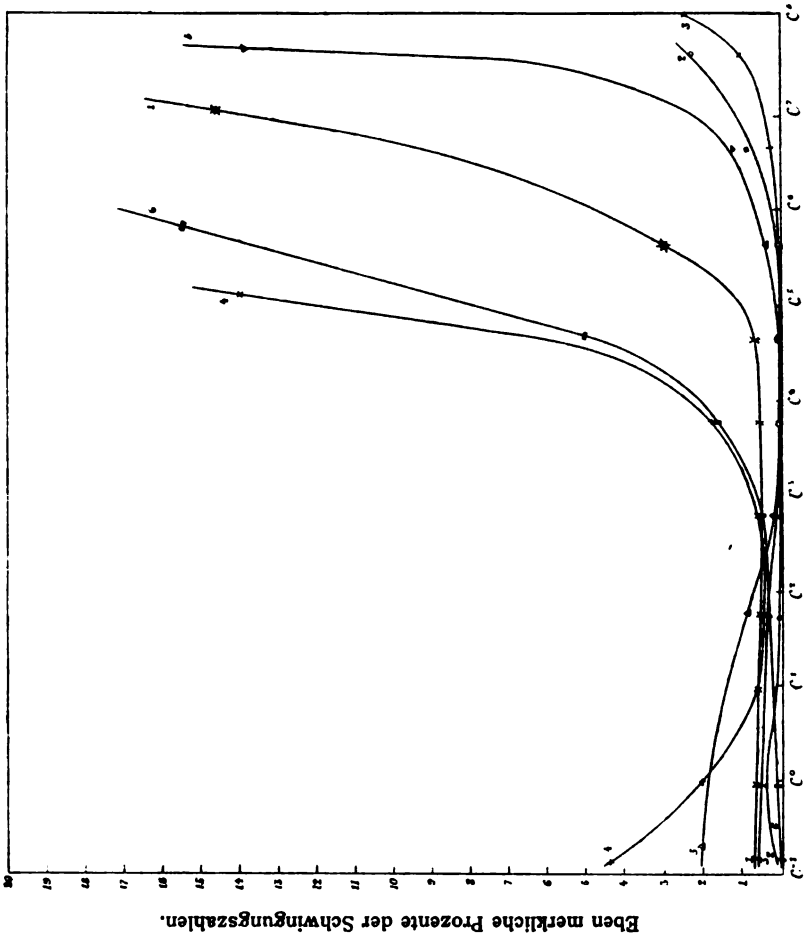
Übrigens spielt die Übung bei der Unterscheidung von Tonhöhen eine große Rolle. Während beim Verfasser selbst sich

die Empfindlichkeit im Laufe der Arbeit um das Vierfache steigerte, so zeigt sich dies bei Dr. F. Eh. noch viel deutlicher; obwohl seine Unterschiedsempfindlichkeit in der großen und von der viergestrichenen Oktave an unter dem Mittel liegt, so ist sie offenbar infolge des Umstandes, daß sich Dr. F. Eh. viel mit der Eichung von Normalgabeln beschäftigt, in der eingestrichenen Oktave so groß, daß derselbe von zwei A-Gabeln noch die höhere erkennt, wenn sie in ihrer Höhe um 0·05 Schwingungen pro Sekunde oder $\frac{1}{1100}$ eines ganzen Tones von einander verschieden sind.

Endlich will ich noch erwähnen, daß ich großes Augenmerk auf die Reihenfolge legen mußte, in welcher die beiden Töne erklangen; während es z. B. für a^2 ganz gleichgültig war, welchen Ton man zuerst hörte, wurden die Unterschiede in tieferen Regionen weitaus richtiger beurteilt, wenn der zweite Ton der tiefere war, während in höheren Regionen das Gegenteil der Fall war; es scheint daher, als ob die Beobachtung erleichtert würde, wenn sich die Töne von der am häufigsten gehörten Tonregion der ein- und zweigestrichenen Oktave entfernen, als wenn sie sich derselben nähern. Bei etlichen Personen wiederholte ich die Versuche an verschiedenen Tagen. Merkwürdigerweise lieferten Unmusikalische stets fast die gleichen Resultate, während bei musikalisch Gebildeten die Unterschiedsempfindlichkeit großen Schwankungen unterworfen war.

Auch in Betreff der Hörgrenze haben sich einige Gesetzmäßigkeiten ergeben. Sie lag bei musikalischen, sowie bei den meisten etwas nervösen Individuen sehr hoch; ferner scheint der Umfang des Hörvermögens mit zunehmendem Alter der Versuchspersonen nach der Tiefe wenig, nach der Höhe zu aber stark abzunehmen.

Graphische Darstellung
der Änderung der relativen Unterschiedsempfindlichkeit mit der Tonhöhe.



Strahlungen in starken elektromagnetischen Feldern

von

G. Jaumann,

k. M. k. Akad.

(Vorgelegt in der Sitzung am 28. Februar 1907.)

Der erste Teil der elektromagnetischen Theorie des Verfassers behandelt die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Medien.[1] Die diesem Teile der Theorie zu Grunde liegende Idee ist, daß die Bewegung keinen direkten Einfluß auf elektromagnetische Vorgänge hat, sondern daß nur die durch die Bewegung bewirkte Deformation des Mediums elektromagnetische Wirkungen hat.

Die vorliegende Mitteilung behandelt die Strahlungen in Medien allgemeinen Verhaltens. Die diesem Teile der Theorie zu Grunde liegende Idee ist, daß alle elektromagnetischen Strahlen von chemischen Schwingungen begleitet werden, d. h. daß die stofflichen Eigenschaften des Mediums, insbesondere der dielektrische Koeffizient und die Leitfähigkeit desselben, in einem durchstrahlten Medium sehr kleine, aber rasche periodische Änderungen erfahren.

Der Verfasser hat sich bemüht, seine Theorie in nüchterner Art auf ein System sehr einfacher Differentialgleichungen zu gründen und hält sie dadurch der Lorentz'schen Theorie für überlegen, um so mehr als seine Theorie eine weit größere Zahl fundamentaler Beobachtungen ungezwungen darstellt.

---

[1] Vorläufige Mitteilung: Diese Sitzungsber., Bd. CXIV, p. 1635 (Dezember 1905); ausführliche II. Mitteilung: Diese Sitzungsber., Bd. CXV, p. 337 (März 1906); gekürzte Mitteilung: Ann. d. Phys., Bd. 19, p. 881 (Jänner 1906).

Als ein Experiment, welches geeignet ist, zwischen beiden Theorien zu entscheiden, führt der Verfasser seine grundlegenden Versuche über die elektrostatische Ablenkung der Kathodenstrahlen an und fordert zur unbefangenen Würdigung dieser Versuche auf.

1. Einleitung.

1. Das entferntere Ziel, welchem meine sämtlichen theoretischen Arbeiten zustreben, ist, eine auf dem Minimum willkürlicher Vorstellungen beruhende Theorie der chemischen Vorgänge und der Wärmeleitung zu schaffen. Es ist mir gelungen, auf diesem Wege die Theorie der mit diesen Vorgängen zusammenhängenden elektromagnetischen Erscheinungen nicht unwesentlich zu fördern.

Mein erster Versuch einer chemischen Theorie auf vergleichend-physikalischer Grundlage[1] ist verfrüht und hat wenig mehr als Kuriositätswert. Das Ziel desselben, das stöchiometrische Gesetz als das Eliminationsresultat aus zwei Gesetzen ganz anderen Inhaltes darzustellen, ist an sich sehr erstrebenswert, aber noch unerreichbar. Dennoch hat diese Arbeit ein nicht unwichtiges Resultat zu Tage gefördert: es zeigte sich, daß, von jeder Theorie abgesehen, die Grundlage des heutigen chemischen Systems nicht mit den Tatsachen übereinstimmt. Die Atomtheorie führt zu einem wahrscheinlich ganz unrichtigen Gasvolumgesetz und die Folge davon ist, daß die Chemiker in fast allen Fällen, in welchen der Druck der Elemente sowohl als ihres Verbindungsproduktes im Dampfzustande oder in verdünnter Lösung gemessen werden kann, genötigt sind, die Fundamentalvorstellungen der Chemie aufzugeben und entweder die Elemente als dimere Verbindungen oder die Verbindungen als vollkommen dissoziiert anzusehen. Ich habe nochmals an anderer Stelle[2] hierauf hingewiesen, ohne Beachtung zu finden.

2. Es ist gegenwärtig deshalb nicht möglich, eine befriedigende Theorie der chemischen Ausgleichsvorgänge zu finden,

---

[1] Diese Sitzungsber., Bd. CI, p. 487 (1892).

[2] Zur Theorie der Lösungen, Ann. d. Phys., Bd. 3, p. 613.

weil man diese Vorgänge nur von einer Seite her kennt oder untersucht hat. Der Ausgleich der Ladungen zweier Konduktoren ist ebenfalls lange irrtümlich für einen einfachen Vorgang angesehen worden und erst als man die oszillatorische Natur dieses Vorganges erkannte und die simultanen magnetischen Vorgänge beachtete, konnte die Theorie wesentlich fortschreiten.

Nun kennt man wohl die Elektrolyse, den Peltier- und Thomsoneffekt, welche die bei allen Wärmeleitungs- und chemischen Vorgängen wesentlich mitspielenden elektromagnetischen Vorgänge erkennen lassen. Doch sind solche stationär ablaufende Prozesse wenig geeignet, das Gesetz des zeitlichen Ablaufes dieser Wirkungen erkennen zu lassen.

Diesem Zwecke können wohl nur oszillatorisch ablaufende Vorgänge dienen, denn solche lassen das ihnen zu Grunde liegende Differential- und Nahewirkungsgesetz stets unmittelbar erkennen. Aber wo gibt es chemische Oszillationen?

3. Hier förderte mich der Vorschlag einer chemischen Lichttheorie von E. Mach in seinen »Beiträgen zur Analyse der Sinnesempfindungen«.[1] Die photochemischen Wirkungen legen die Vermutung, daß die Lichtschwingungen chemische Oszillationen sind, ebenso nahe, wie die photoelektrischen Erscheinungen die Vermutung der elektromagnetischen Natur der Lichtschwingungen nahelegen. Mach faßte diese Idee vor dem Bekanntwerden der elektromagnetischen Lichttheorie. Meiner Ansicht nach kann wohl die Mach'sche Theorie die Maxwell'sche Theorie niemals ersetzen, jedoch sind beide Theorien gleichzeitig wahr. Die elektromagnetischen Schwingungen werden in jedem Lichtstrahl im allgemeinen begleitet von chemischen Schwingungen und von Temperaturschwingungen.[2]

Meine Versuche, diese Lichttheorie direkt auszubilden, sind aber zunächst vollkommen gescheitert, wieder deshalb, weil die beobachteten photochemischen Erscheinungen keinen

---

[1] Jena 1886, p. 42.

[2] Diese Sitzungsber., Bd. CIV, p. 795 (1895).

oszillatorischen Charakter haben. Die spektralanalytischen Gesetze waren damals noch nicht bekannt.

4. Doch wurde ich durch Beobachtung des Entladungsvorganges und der Hittorf'schen Strahlen auf den richtigen Weg gewiesen.[1] Schwingungen der elektrischen Kraft, welche unmittelbar an der Kathode und in der Normalrichtung derselben stattfinden, sind eine wesentliche Bedingung des Auftretens der Entladung und der Kathodenstrahlen. Hiedurch wird der Gedanke sehr nahe gelegt, daß die Kathodenstrahlen longitudinale elektrische Wellen sind.

Ferner entdeckte ich[2] die hellen Interferenzflächen im blauen Kathodenlichte, später die dunklen Interferenzflächen und die Wirkung der Phasendifferenz der elektrischen Schwingungen an den beiden die interferierenden Strahlen aussendenden Kathoden.[3] Hienach ist die Schwingungsdauer der Kathodenstrahlen jener der anregenden Drahtwellen gleich, also viel größer als die des Lichtes.

Mich wundert, daß sich die Mehrzahl der Fachgenossen schwer entschließt, die Beweiskraft dieser zahlreichen, nach gleicher Richtung deutenden Tatsachen für meine Theorie und gegen die Elektronentheorie auch nur einigermaßen unbefangen zu würdigen.

5. Bald nach der ersten Untersuchung der Interferenzflächen im blauen Kathodenlicht erkannte ich die Ursache dieser Lumineszenz der verdünnten Luft. Nicht die elektrischen Schwingungen des Kathodenstrahles regen das viel rascher schwingende blaue Licht an. Aus dem Auftreten der Interferenzflächen in der ganzen Erstreckung der Symmetrieebene zwischen den zwei Kathoden erkennt man, daß es sich um die Interferenz zweier skalarer (oder dyadischer) Wellen handelt, das blaue Licht zeigt also nicht die Schwingungen des elektrischen Vektors, sondern die periodischen Schwingungen der skalaren (beziehungsweise dyadischen) Eigenschaften des Mediums, seine chemischen Schwingungen an.

---

[1] Diese Sitzungsber., Bd. XCVII, p. 765.

[2] Wied. Ann., Bd. 57, p. 152.

[3] Diese Sitzungsber., Bd. CVII (1898), und Wied. Ann., Bd. 67, p. 742.

Diese chemischen Schwingungen müssen aber ebenfalls mit der Schwingungsdauer des Kathodenstrahles erfolgen, also viel langsamer als die Schwingungen des blauen Kathodenlichtes. Die langsamen chemischen Schwingungen im Kathodenstrahle regen also nicht jede einzelne Schwingung des blauen Lichtes an, sondern jede einzelne chemische Schwingung des Kathodenstrahles regt einen ganzen Wellenzug rasch abklingenden blauen Lichtes an.

Lommel zuerst, sodann unabhängig von diesem und voneinander auf ganz verschiedenem Wege gleichzeitig Garbasso und ich[1] haben erkannt, daß eine verbreiterte Spektrallinie nicht auf der Emission einer unendlichen Zahl ungedämpfter Lichtwellen verschiedener Schwingungsdauer beruht, sondern auf der Emission einer einzigen Schwingungsdauer, wobei aber diese monochromatische Welle rasch abklingt, von einer stark gedämpften Schwingung des emittierenden Körpers ausgeht.

Ich habe ferner geschlossen: Da die elektromagnetische Schwingung der Körper, welche (durch Lumineszenz oder Glut) verbreiterte Spektrallinien emittieren, rasch abklingt, so muß auch eine Ursache vorhanden sein, welche diese emittierende Schwingung stets von neuem exzitiert. Wenn diese Exzitation streng periodisch ist, dann ist die abklingende, aber stets periodisch exzitierte emittierende Schwingung wieder eine periodische Funktion der Zeit und die emittierte Lichtwelle muß nach dem Fourier'schen Theorem sich in eine große Zahl äquidistanter Spektrallinien zerlegen, wobei die Differenz der Schwingungszahlen zweier aufeinanderfolgender Linien dieser Spektralbande ein ganzzahliges Vielfaches der geringen Schwingungszahl der exzitierenden Schwingung ist. Alle Spektren müssen Banden-(oder Serien-)spektren sein, es dürfte keine wirklich kontinuierlichen Spektren geben.

Diese exzitierende, langsame Schwingung ist wohl die gesuchte chemische Schwingung. Im Kathodenstrahle hat sie die langsame Schwingungsdauer dieses Strahles und ihre

---

[1] Diese Sitzungsber., Bd. CIII (Mai 1904), p. 318; Wied. Ann., Bd. 53, p. 832.

Intensität ist erkenntlich aus der Stärke des blauen Lichtes.

Mit der Auffindung longitudinaler elektrischer Strahlen eröffnete sich ein gangbarer Weg zur Ausbildung der angestrebten elektrochemischen Theorie der Strahlungen. Jede Schwingung oder Welle besteht in periodischen Umsetzungen mindestens zweier verschiedener physikalischer Zustände des Mediums ineinander. Ist die Welle transversal, so sind allerdings diese beiden Zustände vektorisch. Ist aber die Welle longitudinal, so muß der eine Zustand skalar (oder dyadisch) sein. Eine longitudinale Welle des elektrischen Vektors $\mathfrak{e}$ wird von der Welle eines Skalars σ begleitet sein, dessen Fluxion der Divergenz dieses Vektors proportional ist.

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \varphi_0 a \operatorname{div} \mathfrak{e} \quad (\varphi_0 a \text{ konstant}). \tag{1}$$

Und nun ist der Gedanke unabweislich, daß dieser Skalar σ durch die Abweichung des chemischen Zustandes und des Wärmezustandes des Mediums von dem Ruhewert bestimmt ist.

Magnetische Kräfte können in einer solchen longitudinalen elektrischen Welle nicht auftreten, die Maxwell'schen Gleichungen reduzieren sich daher auf:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon \cdot \mathfrak{e}) \stackrel{3}{=} 0, \qquad 0 \stackrel{2}{=} \operatorname{rot} \mathfrak{e}, \tag{2}$$

in welcher ε den dielektrischen Koeffizienten des Mediums bedeutet. Kleine Änderungen desselben können jedenfalls den Änderungen von σ proportional gesetzt werden:

$$d\sigma = \varphi_0 \cdot d\varepsilon \quad (\varphi_0 \text{ konstant}). \tag{3}$$

Hieraus folgt:

$$\varepsilon_0 \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{e} + a \mathfrak{e}_0 \operatorname{div} \mathfrak{e} = 0,$$

worin ε_0 der normale Wert von ε und $\mathfrak{e}_0$ die im Vergleiche zum variablen Vektor der Welle $(\mathfrak{e} - \mathfrak{e}_0)$ große statische Stärke eines

Feldes ist, in welchem dieselbe fortschreitet. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\mathfrak{c}$ der Welle bestimmt sich also durch eine Gleichung ersten Grades:

$$\mathfrak{c} \cdot \frac{1}{\mathfrak{e}_0} = -a\varepsilon_0. \tag{4}$$

Dies ist der erste Erfolg dieser Theorie, denn hiedurch ist die Einseitigkeit der Fortpflanzung der Kathodenstrahlen erklärt, sie können nur von der einen Elektrode ausgehen, da nach (4) ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit in der in Bezug auf $\mathfrak{e}_0$ entgegengesetzten Richtung negativ wäre.

6. Nun förderte mich H. Poincaré durch einen bemerkenswerten Einwand.[1] Aus (1) und (2) folgt:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{a}{\varepsilon} \mathfrak{e} \cdot \nabla \varepsilon = 0.$$

Hieraus schließt Poincaré, daß jeder Wert von ε sich mit der Geschwindigkeit $a\mathfrak{e}/\varepsilon$ im Felde bewegen, also stets in der Richtung der negativen Feldstärke verschieben müßte. Die Kathodenstrahlen müßten also elektrostatisch ablenkbar sein, was damals durch die Versuche von Hertz ganz ausgeschlossen schien.

Ich kann nicht zugeben, daß man durch einen solchen Schluß etwas über die Strahlrichtung erfahren kann, doch schien auch mir sicher, daß der Strahlengang von Wellen, deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit wesentlich von der elektrostatischen Kraft $\mathfrak{e}_0$ des Feldes abhängt, nicht von dieser ganz unabhängig sein kann, daß also die Kathodenstrahlen elektrostatisch ablenkbar sein müssen.

Warum haben aber frühere Beobachter hievon nichts bemerkt und warum verlaufen die Kathodenstrahlen dann überhaupt meist merklich geradlinig? Hieraus muß geschlossen werden, daß das elektrische Feld im Innern des Entladungsrohres stets ein gleichförmiges Feld sein muß, was eine entsprechende Ladung der Grenzfläche des Kathodendunkelraumes, Anhäufung negativer Ladung vor der Anode und Ladung der

[1] H. Poincaré, C. R. *122*, 520 (1896).

Glaswand voraussetzt. Diese muß eine Wirkung der Kathodenstrahlen sein. Je stärker also die Kathodenstrahlen sind, desto rascher müssen dieselben das Feld durch Ladung oder Entladung der Glaswand gleichförmig machen und sonach geradlinig verlaufen und desto weniger müssen sie durch äußere elektrostatische Kräfte ablenkbar sein.

Ich machte sonach den Versuch mit sehr schwachen Kathodenstrahlen und entdeckte die elektrostatische Ablenkung derselben.[1]

Meine Versuche beweisen auch die Tatsache, daß die Kathodenstrahlen durch Änderung der Ladung der Glaswand das Feld gleichmäßig machen und sich strecken. Ein von außen der Entladungsröhre genäherter, negativ geladener Körper zog die Strahlen nur vorübergehend an, sehr bald strecken sich dieselben ungeachtet der dauernden Nähe des ablenkenden Körpers wieder. Ein positiv geladener Körper wirkt umgekehrt. Befinden sich aber die ablenkenden Elektroden im Innern des Entladungsrohres, so sind damit unveränderliche Grenzbedingungen gegeben und die Ablenkung der Strahlen kann eine dauernde sein. Eine Dauerablenkung durch innere Elektroden wurde schon viel früher von Goldstein entdeckt, sie ist aber so viel weniger charakteristisch als meine vorübergehende Ablenkung durch von außen erzeugte elektrostatische Felder, daß niemand früher diese Dauerablenkung durch innere Elektroden für eine elektrostatische Ablenkung hielt.

Im folgenden Jahre wiederholte J. J. Thomson[2] meine Versuche, aber nur mit inneren Elektroden. W. Wien[3] ließ die Strahlen vor der Ablenkung durch ein Lenard'sches Fenster gehen. Er entdeckte ferner die elektrostatische Ablenkung der Kanalstrahlen. Die von diesen Herren beobachteten Ablenkungen hatten den umgekehrten Sinn wie die von mir beobachtete, was weiter unten völlig aufgeklärt werden wird. Zufolge dieses

---

[1] Diese Sitzungsber., Bd. CV, April 1896; Wied. Ann., Bd. 59, p. 252; abgedruckt im »Electrician«, London 1896; Compt. rend. *122* (1896).

[2] J. J. Thomson, Phil. Mag., *5*, 293 (1897).

[3] W. Wien, Verh. d. phys. Ges. zu Berlin, p. 165 (1897); ibid. (1898), p. 10.

zufälligen Umstandes konnte es geschehen, daß meine Entdeckung, die doch einen Erfolg der Undulationstheorie der Kathodenstrahlen bildet, nicht dieser, sondern der Emissionstheorie Ansehen verschaffte.

7. In dieser ihrer ersten Form stellt meine Theorie noch einige weitere Eigentümlichkeiten der Kathodenstrahlen einigermaßen zutreffend dar. Insbesonders dreht nach derselben ein transversal wirkendes magnetisches Feld die Wellenebene dieser elektrischen Longitudinalwellen im richtigen Sinne. Poincaré bestritt aber, daß hier die Strahlrichtung und die Wellenfläche orthogonal seien, und behauptete, daß auch im magnetischen Felde die Strahlrichtung in die Richtung der elektrostatischen Kraft falle.

Mit diesem Einwande traf Poincaré jenen Punkt, in welchem die weitere Spekulation einsetzen mußte. Ich bin aber erst jetzt, nach zehn Jahren, in der Lage, diese Frage mit Sicherheit zu entscheiden.

Eine jede Undulationstheorie kann die Strahlrichtungen nur mit Hilfe des Energieflusses bestimmen. Als elektromagnetischer Energiefluß war nur der Poynting'sche Energiefluß bekannt. Da die elektrischen Longitudinalwellen keine magnetischen Schwingungen mitführen, so hätten sie also überhaupt keinen Energiefluß, keine Strahlrichtung und keine Wärmewirkung. Außerdem bemerkte ich jetzt, daß die Maxwellschen Gleichungen mit dem Energieprinzip überhaupt nicht im Einklange stehen, wenn man die Veränderlichkeit von ε berücksichtigt. Diese Erfahrung lehrte mich für die Folge die richtige Beachtung und Anwendung der physikalischen Prinzipien.

2. Bemerkungen über das Prinzip der Energie, des Energieflusses und der Realität der Dyaden.

8. Die physikalischen Prinzipien sind nicht wie die Nahewirkungsgesetze (Zustandsgleichungen und Differentialgesetze) Gleichungen, welche den Zusammenhang spezieller physikalischer Variablen angeben, sondern sie dürften als Gesetze über die Form der Nahewirkungsgesetze aufzufassen sein, sie sind hienach aus der Form bekannter Nahewirkungsgesetze

abstrahierte Voraussagen über die Form der noch zu suchenden Nahewirkungsgesetze.

Hienach haben also die Prinzipien vornehmlich heuristischen Wert, in ihnen konzentriert sich alle heuristische Erfahrung und sie werden nur mehr historischen Wert haben, wenn alle zwischen den physikalischen Variablen bestehenden Beziehungen, alle Nahewirkungsgleichungen bekannt sein werden.

Von geringerer Wichtigkeit ist die Verwendbarkeit mancher Prinzipien als Ersatz für noch unbekannte Nahewirkungsgleichungen und als Hilfsätze zur Durchführung schwieriger Deduktionen.

9. Das Prinzip der Realität der Dyaden läßt sich in folgender Weise formulieren: Die meisten physikalischen Größen, welche man bisher für Skalare hielt, sind tatsächlich Dyaden und sehr vielen bisher nur in skalarer oder vektorischer Form bekannten Nahewirkungsgesetzen liegen höhere einfachere dyadische Gesetze zu Grunde.

Der mathematische Begriff der Dyaden wurde von Heaviside und Gibbs aus ähnlichen und sogar allgemeineren symbolischen Begriffen seiner physikalischen Anwendbarkeit wegen endgültig hervorgehoben. Doch erkennt Gibbs die physikalische Realität der Dyaden keineswegs. Er sagt:[1]

»The indeterminate product (dyad) is neither vector nor scalar, it is purely symbolic and acquires a determinate physical meaning only when used as an operator«. Er definiert auch die kompletten Dyaden nicht anders als »the symbolic sum of three dyads«.

Im Gegensatze hiezu muß die vollkommen selbständige physikalische Realität vieler Dyaden betont werden. Den physikalischen Inhalt dieses Begriffes kann man durch Anschauung kennen lernen. Ein Beispiel einer physikalischen Dyade ist die Leitfähigkeit eines Kristalls, sie ist weder Vektor noch Skalar, aber doch eine reale physikalische Größe.

Die physikalischen Dyaden sind ferner einheitliche physikalische Zustände. Nicht die neun Koeffizienten oder die

---

[1] Gibbs, Vectoranalysis, New-York und London 1902, p. 272 und 265.

drei Tensoren einer Dyade sind als elementare physikalische Variable anzusehen, sondern die Dyade selbst, gerade so wie nicht den Komponenten eines Vektors, sondern diesem selbst physikalische Realität zugesprochen werden muß.

Damit daß man weiß, daß viele Naturgesetze direkte Beziehungen verschiedener Dyaden zueinander feststellen, ist der Spekulation eine neue und für die nächste Zeit sehr lohnende Richtung gewiesen.

Ich habe[1] betont, daß auch die Spannungsdyaden bei allen Bewegungsvorgängen (ponderomotorischen Wirkungen) durch direkte dyadische Naturgesetze bestimmt sind. Die Kräfte sind nichts anderes als die derivierten Vektoren der unmittelbar gegebenen Spannungsdyaden, alle vektorischen Gesetze, welche sich direkt auf Kräfte beziehen, sind veraltet. Diese Auffassung dürfte noch heuristische Wirkung haben. Sucht man das Gesetz einer beschleunigenden Wirkung, so hat man ein dyadisches Gesetz, welches die Spannungsdyade bestimmt, nicht aber ein vektorisches Gesetz, welches die Kräfte bestimmt, zu suchen.

10. Das Energieprinzip fasse ich zum mindesten auf als eine Voraussage über die Form der skalaren Gleichungen, welche man erhält aus jenen vektorischen Nahewirkungsgesetzen, welche die Fluxion gewisser Vektoren bestimmen. Wahrscheinlich sind dies überhaupt nur drei ganz bestimmte Vektoren: der elektrische Vektor $\mathfrak{e}$, der magnetische Vektor $\mathfrak{m}$ und die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Mediums.

Multipliziert man nach Poynting die elektromagnetischen Gleichungen, welche die Fluxion von $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{m}$ bestimmen, beziehungsweise mit $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{m}$, ferner auch die Bewegungsgleichungen, welche die ponderomotorischen Wirkungen im elektromagnetischen Felde, die elastischen und Zähigkeitsbeschleunigungen, kurz die Fluxion von $\mathfrak{v}$ bestimmen, mit $\mathfrak{v}$ und verbindet die so erhaltenen Gleichungen, falls sie gleichzeitig gelten, so erhält man die Energiegleichung.

Obgleich die vektorischen Gleichungen für die Fluxion von $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{v}$ noch ganz strittig sind, herrscht nur eine

[1] Jaumann, Grundlagen der Bewegungslehre, Leipzig 1905, p. 410.

Meinung über die Form dieser skalaren Energiegleichung, welcher man sogar im thermochemischen Gebiete, wo die Nahewirkungsgleichungen noch unbekannt sind, Geltung zusprechen muß. Die Energiegleichungen haben folgende Form:

$$\frac{\partial}{\partial t} E + Q + \operatorname{div} \mathfrak{s}' = 0. \tag{5}$$

Hierin bedeutet E eine Funktion der Vektoren $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{v}$ sowie der Materialkonstanten, welche man besser chemische Variable nennen kann. Man nennt diese skalare Funktion der Feldvariablen, deren Fluxion in der Energiegleichung vorkommt, den Energieinhalt E pro Volumseinheit des Mediums, derselbe stellt sich außerdem als die Summe einfacherer Werte (der Bewegungsenergie, potentiellen und inneren Energie) dar.

Ferner bedeutet Q eine andere Funktion derselben Variablen, von welcher beobachtungsgemäß nachweisbar sein muß, daß sie die pro Zeit- und Volumseinheit nach außen abgegebene Wärme, also die Divergenz des Wärmestromes darstellt. Endlich wird die Energiegleichung noch die Divergenz eines anderen Vektors $\mathfrak{s}'$ enthalten, der sich hiedurch als Funktion derselben Variablen berechnet und welchen man den Energiefluß nennt. Auch Q und $\mathfrak{s}'$ zerfallen in eine Summe spezieller Funktionen der Feldvariablen.

Damit ist der Inhalt des Energieprinzips so sehr als möglich eingeschränkt und man muß nun auf der genauen Erfüllung desselben bestehen. Dennoch leistet dies, so viel ich sehen kann, keine der früheren elektromagnetischen Theorien, auch die Hertz'sche und Lorentz'sche nicht, mit wirklicher Präzision. Da ich früh genug bemerkt habe, daß auch die erste Form meiner Theorie den gleichen Mangel hat, habe ich mich für die Folge der Führung dieses Prinzips überlassen und wurde durch die heuristische (auswählende) Wirkung dieses Prinzips sehr gefördert.

11. Das Prinzip der Realität des Energieflusses. Ich gestatte mir, jedoch nur einschaltungsweise, hier ein noch nicht allgemein anerkanntes Prinzip zu erörtern. Zunächst verlasse ich den unangreifbaren Standpunkt des § 10 und schließe mich der Annahme an, daß das Energieprinzip nicht

nur eine nach dem Poynting'schen Verfahren zu errechnende Gleichung, sondern ein selbständiges Naturgesetz ist, daß demselben also eine Nahewirkungsgleichung zu Grunde liegt, in welcher sämtliche darin vorkommende Variable selbständige physikalische Bedeutung haben. Dies muß dann aber auch von dem Vektor $\mathfrak{s}$ gelten.

Um nun dieses vermutete Energiegesetz auf die einfachste Form zu bringen, müßte man allerdings zunächst bestreiten, daß die Spezialgesetze der Wärmeproduktion Q, also das Gesetz der Reibungswärme, Joule'schen Wärme, Peltier'schen und Thomson'schen Wärme, der chemischen Wärmetönung etc. selbständige Grundgesetze sind. Statt dessen möchte ich die Realität des Wärmestromes annehmen und diesen als durch unabhängige Nahewirkungsgesetze bestimmt annehmen, von welchen eines weiter unten in Kapitel 4 angegeben wird.

Das Energiegesetz nimmt dann die einfache Form an:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div} \mathfrak{s} = 0. \tag{6}$$

Hierin ist E ein physikalischer Skalar, der so mit den übrigen Feldvariablen zusammenhängt, daß man ihn der Energiedichte meist gleichsetzen darf. Ferner ist $\mathfrak{s}$ ein neuer realer physikalischer Vektor, den ich, allerdings nur ungern, mit dem unpassenden, aber gebräuchlichen Namen des gesamten Energieflusses bezeichne. Der Wärmestrom ist eine Komponente des ganzen Energieflusses. Dieser setzt sich zusammen aus einer Komponente $\mathfrak{s}'$, welche meist richtig nach dem Poynting'schen Verfahren § 10 zu berechnen sein dürfte, also aus der Summe des elektromagnetischen Energieflusses und des Flusses der Bewegungsenergie besteht, und aus dem Wärmestrom $\mathfrak{s}-\mathfrak{s}'$. Alle diese Komponenten des Energieflusses sind durch selbständige Nahewirkungsgesetze mit den Feldvariablen verbunden zu denken.

Poynting spricht davon, daß man sich die Energiedichte als die Dichte eines Fluidums und den Energiefluß als dessen Strömungsgeschwindigkeit vorstellen könnte. Dies ist, selbst wenn man es nur bildlich nehmen wollte, völlig unzulässig.

Wäre es auch nur formal zulässig, so müßte die Energiegleichung die Form der Kontinuitätsgleichung haben:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div} E\mathfrak{s} = 0,$$

was nach (6) keineswegs richtig ist. In der richtigen Energiegleichung (6) kommt die Divergenz des Vektors $\mathfrak{s}$ und nicht des Vektors $E\mathfrak{s}$ vor und deshalb ist der Vergleich, von welchem der Name des Energieflusses herrührt, irreführend. Am deutlichsten erkennt man den Unterschied der Energiegleichung und der Kontinuitätsgleichung, wenn man an ein Medium denkt, in welchem die Energiedichte E einen negativen Wert hat, was bekanntlich nicht ausgeschlossen ist. Dann würde die Kontinuitätsgleichung ein Anwachsen, die Energiegleichung ein Absinken der Energiedichte bestimmen, wenn die Divergenz des Energieflusses in dem betrachteten Punkte positiv ist.

Da man die Nahewirkungsgesetze, welche den Vektor $\mathfrak{s}$ mit den Feldvariablen verbinden, nur unvollkommen kennt, so gibt es gegenwärtig keine selbständige Meßmethode dieses Vektors, keine selbständige Definition und keine selbständige klare Vorstellung desselben. Dies würde bald nachgeholt werden, wenn es sich bestätigen sollte, daß $\mathfrak{s}$ ein realer physikalischer Vektor ist. Man hat auch von anderen physikalischen Vektoren anfänglich nur die Divergenz als physikalisch wichtig erkannt, so wie jetzt allgemein nur anerkannt ist, daß die div $\mathfrak{s}$, d. i. die Fluxion der Energiedichte, hohe Realität hat. Das beste Beispiel ist der elektrische Vektor, dessen Realität Faraday zur Befremdung seiner Zeitgenossen behauptete, da man vorher nur die Divergenz dieses Vektors, d. i. die elektrische Ladung, beachtete und für eine physikalische Realität hielt.

Am anschaulichsten ist die Realität des Vektors $\mathfrak{s}$ bei der Wärmeleitung. Was ist denn der Wärmestrom, wenn nicht ein lange bekannter und doch nicht richtig vorgestellter physikalischer Vektor? Man könnte einwenden, daß der Wärmestrom nichts anderes als das Produkt der Wärmeleitungsfähigkeit und des Temperaturgefälles ist. Dies läuft auf die oft vorkommende Frage hinaus, ob eine Beziehung zwischen physikalischen Variablen als ein Naturgesetz oder als die

Definitionsgleichung für eine derselben aufgefaßt werden darf. Letzteres ist nur gestattet, wenn man diese Beziehung willkürlich allgemein aufrecht erhalten kann. Dies trifft aber im vorliegenden Falle keineswegs zu. Ich erinnere nur an das Kohlrausch'sche Gesetz, daß jeder galvanische Strom von einem proportionalen Wärmestrome begleitet wird. Dieser Wärmestrom hat mit der Verteilung des Temperaturgefälles nichts zu tun.

Ferner ersieht man die Realität des Vektors $\mathfrak{s}$ daraus, daß derselbe die Strahlrichtung bestimmt, welche von der Wellenrichtung und den Differentialgleichungen des Wellenvorganges ganz unabhängig ist, und zwar bestimmt man bei Kenntnis des Energieflusses die Strahlrichtung nicht nur bequemer, sondern auch verläßlicher, als dies eine komplizierte Berechnung der Strahlgrenzen eventuell vermöchte. Es ist hervorzuheben, daß der gesamte Energiefluß mit Einschluß des Wärmestromes, jedoch mit Ausschluß des Flusses der Bewegungsenergie, die Strahlrichtung bestimmt. Man erkennt dies aus der Tatsache, daß ein Strahl an einen Körper, dessen Oberfläche er nur streift, keine andere Energie, auch keine Wärme, wohl aber Bewegungsenergie abgibt, da er einen Zug (eventuell auch einen Druck) auf die von ihm gestreifte Oberfläche ausübt (der Fluß der Bewegungsenergie ist das Produkt der Spannungsdyade und Geschwindigkeit).

Betrachten wir einen ebenen, nahezu ungedämpft fortschreitenden Wellenzug von unregelmäßiger Form, z. B. einen abgebrochenen oder intermittierenden Zug von Sinuswellen oder eine nicht periodische Welle.

Es muß nach der Euler'schen Regel:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \mathfrak{c} \cdot \nabla E = 0,$$

was nichts anderes aussagt, als daß sich der Zustand E unverändert mit der Wellengeschwindigkeit $\mathfrak{c}$ fortpflanzt. Aus der Energiegleichung (6) folgt nun:

$$\operatorname{div} \mathfrak{s} - \mathfrak{c} \cdot \nabla E = 0$$

oder

$$\operatorname{div} (\mathfrak{s} - \mathfrak{c} E) = 0. \qquad (7)$$

Da nach dieser Gleichung die Welle des Vektors $(\mathfrak{H}-\mathfrak{c}E)$ divergenzfrei ist, so ist sie transversal. Hätte dieser Vektor eine longitudinale Komponente, so müßte diese nach (7) konstant sein. Da aber dieser Vektor eine Funktion der Variablen der Welle ist und diese der Annahme nach unregelmäßig ist, so kann dieser Vektor keine von Null verschiedene konstante Komponente haben. Er ist also transversal oder es ist:

$$\mathfrak{u}\cdot(\mathfrak{H}-\mathfrak{c}E)=0,$$

worin $\mathfrak{u}=1/\mathfrak{c}$ die reziproke Wellengeschwindigkeit ist. Hieraus folgt:

$$\mathfrak{u}\cdot\mathfrak{H}=E. \tag{8}$$

Ergibt eine elektromagnetische Theorie Wellen, welche diese Beziehung nicht hinreichend erfüllen, so würde dies auf einen Mangel der Grundgleichungen derselben deuten, und so wirkt auch hier das Prinzip des Energieflusses heuristisch. Keinesfalls dürfte man behaupten, daß Wellen, welche die Gleichung (8) nicht erfüllen, die Ursache von Strahlungen sein können.

Aus Gleichung (8) folgt, daß der Energiefluß mit der Wellengeschwindigkeit immer einen spitzen Winkel einschließt, wenn der Energieinhalt E ein positiver Wert ist.

12. Die Erkenntnis, daß die physikalischen Zustände an einem bestimmten Orte und ihre räumlichen und zeitlichen Derivationen sich gegenseitig völlig bestimmen, ist ebenfalls heuristisch sehr wirksam. Dieses Nahewirkungsprinzip gilt selbstverständlich nur mit einer wichtigen Einschränkung. Die Vorgänge an einem bestimmten Orte oder die sie bestimmenden Nahewirkungsgleichungen sind insoferne nicht ganz unabhängig von der weiteren Umgebung dieses Ortes, weil sich die die Orts-, Richtungs- und Zeitbestimmungen wesentlich auf weit entferntere Zustände und Vorgänge beziehen. Ich habe bei Aufstellung der elektromagnetischen Nahewirkungsgleichungen für bewegte Medien bemerkt, daß die Orts- und Richtungsmessungen in sämtlichen Nahewirkungsgesetzen nicht auf den Fixsternhimmel bezogen werden dürfen. Diese Annahme ist zu speziell und gilt nur für den speziellen Fall der

astronomischen Bewegungsvorgänge. Allgemein muß das Koordinatensystem festgelegt werden in der hinreichend starren, hinreichend indifferenten Grenzschale, welche jeden begrenzten Vorgang abschließen muß und welche für verschiedene Vorgänge ganz verschieden ist.[1]

An sich enthält die Energiegleichung nicht den Satz der Erhaltung der Energie und das Prinzip der Realität der Spannungsdyaden (§ 9) nicht den Satz der Erhaltung der Bewegungsgrößen. Wohl ist dies aber der Fall, wenn man hinzuzieht, daß in der erwähnten Grenzschale der Energiefluß und die Spannungsdyaden Null sein müssen, da diese sonst eben das Feld nicht abschließen würde. Hält man daran fest, daß die Kräfte nicht direkt bestimmt, sondern Derivationen der Spannungsdyaden sind, so muß also das Gegenwirkungsprinzip unbedingt erfüllt sein.

3. Begründung der Theorie.

13. Meine Theorie geht von der Vorstellung aus, daß einige der Materialkonstanten (stofflichen Variablen) in variablen elektromagnetischen Feldern merklich variabel sind und daß die Rückwirkung dieser Variabilität der stofflichen Eigenschaften auf den elektromagnetischen Vorgang das eigentümliche elektromagnetische Verhalten verschiedener Medien bewirkt.

Wenn aber die Materialkonstanten in den Maxwell'schen Gleichungen, insbesondere der dielektrische Koeffizient ε und der diamagnetische Koeffizient μ variabel sind, so widersprechen dieselben dem Energieprinzip. Bildet man nach der Poyntingschen Methode die Energiegleichung, so fehlt in derselben der integrierende Summand:

$$\frac{1}{2}\mathfrak{e}\cdot\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\cdot\mathfrak{e}+\frac{1}{2}\mathfrak{m}\cdot\frac{\partial\mu}{\partial t}\cdot\mathfrak{m} \tag{9}$$

für die Fluxion der Energie. Da nun ε zweifellos, zum mindesten zufolge von Temperatur und Volumsänderungen variabel

[1] Siehe diese Sitzungsber., II. Mitteilung, Bd. CXV, p. 346 ff.

ist, so müssen die Maxwell'schen Gleichungen (für ruhende Medien) in folgender Weise vervollständigt werden:

$$[\varepsilon]\cdot\frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial t}+\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}+\gamma\right)\cdot\mathfrak{e}\overset{s}{=}c_0\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{m}, \tag{10}$$

$$[\mu]\cdot\frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial t}+\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \mu}{\partial t}+\xi\right)\cdot\mathfrak{m}\overset{s}{=}-c_0\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{e}. \tag{11}$$

Hierin ist γ die elektrische Leitfähigkeit, ξ die stets ungemein kleine magnetische Leitfähigkeit, c_0 die Lichtgeschwindigkeit in einem Medium, in welchem $\varepsilon = \mu = 1$ ist. $[\varepsilon]$ und $[\mu]$ sind die symmetrischen Anteile der dyadischen Werte ε und μ des im allgemeinen als kristallisch vorausgesetzten Mediums.

Schon durch diese ohnehin notwendige Vervollständigung der Maxwell'schen Gleichungen entfällt der in § 6 mitgeteilte Einwand Poincaré's.

14. Ehe ich mich zu dieser Abänderung der Maxwell'schen Gleichungen entschloß, habe ich ohne Erfolg versucht, ob der Betrag (9) nicht einer besonderen Art der Wärmeproduktion zufolge der Deformation des Mediums im elektromagnetischen Felde äquivalent angenommen werden könnte. Sodann habe ich die Deformationswärme im unelektrischen Felde ziemlich unbeholfen in Beziehung zur Joule'schen Wärme zu setzen gesucht[1] und es blieb seither die Wärmeproduktion in zähen Flüssigkeiten im Gesichtskreise meiner Theorie. Das Studium der Bewegungstheorie deformierbarer Medien führte mich zur Aufstellung des Prinzips der Realität der Spannungsdyaden und gleich darauf zur Aufstellung des allgemeinen Prinzips (siehe § 9). Als ich dieses nun nach langer Pause, wieder zu meiner elektromagnetischen Theorie zurückkehrend, auf diese anwendete, entwickelte sie sich binnen kurzer Zeit zu der weitaus vollendeteren Form, in welcher sie nun vorliegt.

15. Dyadischer (kristallischer) Charakter der Änderungen des dielektrischen Koeffizienten ε in isotropen Medien. Der charakteristische (in heuristischer Beziehung wertvollste) Mangel der ersten Form meiner Theorie

[1] Ann. d. Phys., Bd. 8, p. 752 (1902).

ist, daß sie nur einen Einfluß der elektrostatischen und magnetischen Feldstärken $\mathfrak{e}_0$ und $\mathfrak{m}_0$ auf longitudinale elektrische Strahlen, aber keinen Einfluß auf das transversale Licht ergab, also die elektrische Doppelbrechung und magnetische Drehung der Polarisationsebene unerklärt ließ. Die Ursache davon liegt in der skalaren Form der Gleichungen (1) und (3), da die skalare Derivation div $\mathfrak{e}$ in transversalen Strahlen Null ist. Diese Gleichungen haben also die allgemeine dyadische Form[1] zu erhalten:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} \stackrel{\mathfrak{g}}{=} \varphi_0 a \nabla, \varepsilon \cdot \mathfrak{e} \quad (\varphi_0 \text{ und } a \text{ konstant}), \tag{12}$$

$$d\sigma \stackrel{\mathfrak{g}}{=} -\varphi_0 \cdot d\varepsilon. \tag{13}$$

Gemeinverständlich kann man den Sinn dieser Gleichungen in folgender Weise darstellen: Ein Medium, in welchem rasche elektromagnetische Veränderungen auftreten, welches z. B. durchstrahlt ist, nimmt kristallische Eigenschaften an, auch wenn es im normalen Zustand isotrop ist. Dies gilt auch für Flüssigkeiten, ja selbst für verdünnte Gase. Doch sind diese kristallischen Veränderungen sehr gering, mit der Zeit und von Ort zu Ort sehr veränderlich. Im einfachsten Falle nimmt das durchstrahlte isotrope Medium in jeder ungeradzahligen halben Wellenlänge die Natur eines sehr schwach positiv einachsigen, in den geradzahligen halben Wellenlängen eines negativ einachsigen Kristalles an. An einem bestimmten Orte wechseln also diese Eigenschaften periodisch und sehr rasch. In allgemeineren Fällen nimmt aber das Medium allgemeinere kristallische Eigenschaften an, ja der dielektrische Koeffizient ε wird sogar vorübergehend unsymmetrisch, was bei Kristallen im Ruhezustande noch nie beobachtet wurde.

Es ist dies eine so einfache Vorstellung und hat sich derart bewährt, daß ich von ihrer vollkommenen Wahrheit überzeugt bin.

---

[1] Der Autor gestattet sich, dieselbe vektoranalytische Ausdrucks- und Bezeichnungsweise wie in seinen vorhergehenden Publikationen zu verwenden.

16. Die allgemeine derivierte Dyade der elektrischen Vektorverteilung, welche in Gleichung (12) abgekürzt bezeichnet ist, hat folgenden Wert:

$$a\nabla, \varepsilon\cdot\mathfrak{e} \stackrel{9}{=} a_1\nabla;(\varepsilon\cdot\mathfrak{e})+a_2(\varepsilon\cdot\mathfrak{e});\nabla+a_3 I \operatorname{div}\varepsilon\cdot\mathfrak{e},$$

worin a_1, a_2 und a_3 Materialkonstanten sind.

Die aus (12) und (13) folgende Gleichung:

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+a\nabla, \varepsilon\cdot\mathfrak{e} \stackrel{9}{=} 0 \tag{14}$$

bedarf jedoch noch der Ergänzung in folgender Form:

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+a\nabla, \varepsilon\cdot\mathfrak{e} \stackrel{9}{=} a_4(\varepsilon-\varepsilon_0), \tag{15}$$

weil $\nabla, \varepsilon\cdot\mathfrak{e}$ nur im gleichförmigen elektrischen Felde Null ist und doch auch ungleichförmige Felder statisch bestehen können. Die Konstante a_4 muß sogar meist sehr groß sein, da auch in ungleichförmigen statischen Feldern ε von seinem Ruhewert ε_0 nicht stark abweichen darf, da sonst eine besondere elektrische Doppelbrechung im ungleichförmigen Felde leichter zu beobachten sein müßte, als dies tatsächlich der Fall ist.

17. Die von Mach und Kundt nachgewiesene Doppelbrechung deformierter Medien kann ebenfalls durch eine dyadische Veränderung des dielektrischen Koeffizienten des Mediums erklärt werden und das Gesetz dieser Doppelbrechung wird dargestellt durch eine Gleichung von derselben Form wie (15), in welcher statt der allgemeinen derivierten Dyade der elektrischen Vektorverteilung $a\nabla, \varepsilon\cdot\mathfrak{e}$ die symmetrische derivierte Dyade der Geschwindigkeitsverteilung $[\nabla, \mathfrak{v}]$, d. i. die Deformationsgeschwindigkeit, eingesetzt ist.

Hier ergibt sich also ein Zusammenhang zwischen der Bewegung des Mediums und einem elektromagnetischen Strahlungsvorgange. Da, wie in § 2 erwähnt, die Strahlungsvorgänge und Oszillationen den Charakter der Gesetze der zeitlichen Veränderungen der Feldvariablen weit sicherer erkennen lassen als alle langsam ablaufenden Vorgänge, messe

ich dem Kundt'schen Phänomen eine höhere theoretische Bedeutung bei als dem Faraday'schen Induktionsgesetze für bewegte Leiter.

Aus der Tatsache, daß die Translation und Rotation des Mediums kaum merklichen Einfluß auf die Lichtfortpflanzung hat, wohl aber die Deformation des Mediums, schloß ich, daß die Bewegung des Mediums überhaupt nur insofern Einfluß auf elektromagnetische Vorgänge hat, als sie die Ursache der Deformation des Mediums ist. Diese Deformationstheorie der elektromagnetischen Vorgänge findet zunächst nur Stützen in der Doppelbrechung deformierter Medien, der Piezoelektrisierung und der Reibungselektrisierung. Leicht erkennt man, daß das Rowland'sche und Röntgen'sche Phänomen auf die Wirkung der raschen Torsion der Luftschichten zurückzuführen ist, welche zwischen den mit verschiedener Winkelgeschwindigkeit rotierenden, das elektrische Feld begrenzenden Platten befindlich sind und daß die Unipolarinduktion sowie der Wilson'sche Versuch sich ebenfalls durch die Torsion von Luftschichten im magnetischen Felde erklären.

Hingegen scheinen die ponderomotorischen Wirkungen, die Faraday'sche Induktion, die Aberration des Lichtes und das Fizeau'sche Phänomen ganz zu Ungunsten dieser Deformationstheorie zu sprechen, insbesonders scheint die Wirkung der Stromgeneratoren mit rotierendem Anker dagegen zu sprechen, daß die Rotation des Mediums elektromagnetisch gleichgültig ist und die Aberration des Lichtes ein Beweis zu sein, daß die Translation des Mediums nicht gleichgültig ist.

Und doch bewährte sich meine Deformationstheorie, nachdem die Gleichungen derselben völlig entwickelt waren, auch in diesen Punkten ohne weiteres Zutun auf das vollkommenste. Ich habe diese Theorie in den »Ann. d. Phys.«[1] und später ausführlicher in diesen Sitzungsberichten[2] dargestellt

[1] Ann. d. Phys., Bd. 19, p. 881.

[2] Diese Sitzungsber., Bd. CXV (1906), p. 337.

und beschränke mich hier darauf, die Herleitung der Gleichungen derselben soweit anzugeben, als es für die Zwecke der vorliegenden Abhandlung erforderlich ist.

18. Zunächst mußte entschieden werden, welche der Materialkonstanten des Mediums es ist, die zufolge der Deformationsgeschwindigkeit $[\nabla, \mathfrak{v}]$ desselben einen abnormalen Wert annimmt, wodurch die elektromagnetische Wirkung der Bewegung sich erklärt. Am wichtigsten ist die Veränderung der Leitfähigkeiten, welche im ruhenden Medium die Werte γ_0 und ξ_0 haben, im bewegten Medium aber durch

$$\gamma \overset{9}{=} \gamma_0 - \frac{1}{2}[\nabla, \mathfrak{v}] \cdot \varepsilon, \tag{16}$$

$$\xi \overset{9}{=} \xi_0 - \frac{1}{2}[\nabla, \mathfrak{v}] \cdot \mu \tag{17}$$

bestimmt werden. Hieraus folgt, daß die Joule'sche Wärme in einem rasch deformierten Medium um den (kaum merklich kleinen) Betrag:

$$-\frac{1}{2}\mathfrak{e} \cdot [\nabla, \mathfrak{v}] \cdot \varepsilon \cdot \mathfrak{e} - \frac{1}{2}\mathfrak{m} \cdot [\nabla, \mathfrak{v}] \cdot \mu \cdot \mathfrak{m} \tag{18}$$

von der Stromwärme in ruhenden Medien verschieden ist, d. h. daß die Deformation im elektromagnetischen Feld eine eigentümliche kleine Wärmewirkung hat.

Würde man den Faktor $\frac{1}{2}$ in (16) und (17) weglassen, so könnten durch diese Annahme der Veränderung der Leitfähigkeiten durch die Deformation des Mediums bereits fast alle wichtigen elektromagnetischen Wirkungen der Bewegung des Mediums erklärt werden, aber nicht die Kundt'sche Doppelbrechung.

Diese läßt eine Abhängigkeit der dielektrischen Dyade ε von der Deformationsgeschwindigkeit erkennen, wodurch eine der beiden für die Fluxion von ε bestimmenden Beziehungen (13) oder (15) abgeändert wird. Würde man annehmen, daß sich dieser Einfluß der Deformationsgeschwindigkeit in Gleichung (15) äußert, so würde man den ganzen Vorteil der in

§ 13 angegebenen Abänderung der Maxwell'schen Gleichungen verlieren und das Energieprinzip könnte dann keinesfalls mit hinreichender Genauigkeit erfüllt sein.

Mit Rücksicht auf die Energieverwandlungen ergibt sich also, daß ε nicht ausschließlich von dem chemischen Zustande σ nach Gleichung (13) abhängt, sondern daß in dieser Beziehung auch die Deformationsgeschwindigkeit $[\nabla, \mathfrak{v}]$ erscheint, wodurch sie allerdings in rasch deformierten Medien einen wesentlich anderen Charakter annimmt. Ich setze statt (13):

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} \stackrel{g}{=} \varphi_0 \cdot \left([\nabla, \mathfrak{v}] \cdot \varepsilon - \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right). \tag{19}$$

In Gleichung (16) und (17) hat $[\nabla, \mathfrak{v}]$ folgende Bedeutung:

$$[\nabla, \mathfrak{v}] \stackrel{g}{=} \nabla ; \mathfrak{v} + \nabla \times \mathfrak{v}. \tag{20}$$

In Gleichung (19) bedeutet aber $[\nabla, \mathfrak{v}]$ möglicherweise eine andere symmetrische derivierte Dyade der Geschwindigkeit. Jedenfalls ist dies in festen Medien der Fall, wie die verschiedenen Werte der Mach'schen Doppelbrechung für verschiedene feste und gallertige Medien beweisen.[1] In Flüssigkeiten und Gasen hat aber, wenigstens wenn sehr starke Volumsänderungen ausgeschlossen werden, $[\nabla, \mathfrak{v}]$ merklich den gleichen Wert in sämtlichen Gleichungen (16), (17) und (19).

Setzen wir zur Abkürzung:

$$-\varphi_0^{-1} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial t} \stackrel{g}{=} \eta. \tag{21}$$

19. Von den abgeänderten Maxwell'schen Gleichungen (10) und (11) gehe ich dadurch zu den für bewegte Medien geltenden allgemeinen elektromagnetischen Gleichungen über, daß ich η statt $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$ und ferner γ statt γ_0 setze. Selbstverständlich muß dann auch in Gleichung (15) η statt $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$ gesetzt werden.

---

[1] Vergl. diese Sitzungsber., Bd. CXV, p. 379.

So ergibt sich das vollständige Gleichungssystem meiner Theorie:

$$[\varepsilon]\cdot\frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial t}+\left(\frac{1}{2}\eta+\gamma\right)\cdot\mathfrak{e}\overset{3}{=}c_0\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{m}, \tag{I}$$

$$[\mu]\cdot\frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial t}+\left(\frac{1}{2}\zeta+\xi\right)\cdot\mathfrak{m}\overset{3}{=}-c_0\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{e}, \tag{II}$$

$$\gamma\overset{9}{=}\gamma_0-\frac{1}{2}[\nabla,\mathfrak{v}]\cdot\varepsilon, \tag{III}$$

$$\xi\overset{9}{=}\xi_0-\frac{1}{2}[\nabla,\mathfrak{v}]\cdot\mu, \tag{IV}$$

$$\eta\overset{9}{=}\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}-[\nabla,\mathfrak{v}]\cdot\varepsilon, \tag{V}$$

$$\zeta\overset{9}{=}\frac{\partial\mu}{\partial t}-[\nabla,\mathfrak{v}]\cdot\mu, \tag{VI}$$

$$\eta+a\nabla,\varepsilon\cdot\mathfrak{e}\overset{9}{=}a_4(\varepsilon-\varepsilon_0), \tag{VII}$$

$$\zeta+b\nabla,\varepsilon\cdot\mathfrak{e}\overset{9}{=}b_4(\mu-\mu_0). \tag{VIII}$$

Die Gleichung (VI) wurde nach Analogie der Gleichung (V) nach dem Grundsatze der Dualität der elektrischen und magnetischen Erscheinungen gebildet. Dieser Grundsatz ist scheinbar beim Übergang von Gleichung (VII) zu Gleichung (VIII) durchbrochen. Diese beiden Gleichungen sind also vereinfachte Formen zweier analoger, aber komplizierterer Gleichungen. Ich habe der Einfachheit wegen jene Materialkonstanten in diesen beiden Gleichungen, welche bei keinem sehr wichtigen Experiment in irgend einem Medium einen von Null verschiedenen Wert erkennen lassen, schon hier gleich Null gesetzt. ζ ist eine Hilfsvariable.

Diese Gleichungen stellen alle in bewegten Medien beobachteten Erscheinungen, so viel ich sehen kann, genau dar. Hervorzuheben ist, daß sie auch die Reibungselektrisierung exakt erklären. Die wichtigsten Deduktionen aus denselben wurden in den »Ann. d. Phys.« mitgeteilt, die Deduktionen bezüglich der Mach'schen und Kundt'schen Doppel-

brechung sowie bezüglich der Piezoelektrisierung wurden jedoch erst in diesen Sitzungsberichten mitgeteilt.

Das Faraday'sche Induktionsgesetz für bewegte Leiter folgt nicht aus meiner Theorie, wohl aber stellt dieselbe sämtliche beobachtbare Induktionserscheinungen präzise in derselben Weise dar wie die Maxwell-Hertz'sche Theorie, welche direkt auf das Faraday'sche Gesetz gegründet ist.

Die Translation des Mediums hat keinen Einfluß auf die Lichtfortpflanzung, aber aus (I) und (II) folgt, wenn man nach der Poynting'schen Methode die Energiegleichung berechnet, daß der Energiefluß $\mathfrak{S}'$ nicht ausschließlich durch den Poynting'schen Vektor bestimmt wird, sondern den Wert hat:

$$\mathfrak{S}' \stackrel{s}{=} c_0 \mathfrak{e} \times \mathfrak{m} - E\mathfrak{v}; \tag{22}$$

dies erklärt die Aberration des Lichtes.

Das Fizeau'sche Experiment erklärt sich dadurch, daß in dem strömenden Wasser selbstverständlich die totale Fluxion von ε konstant ist, während in meinen Gleichungen auch in bewegten Medien nur die lokalen oder partiellen Fluxionen auftreten. Dies ergibt nach der Euler'schen Regel einen kleinen sekundären Einfluß der Bewegung des Wassers.

---

20. Es muß jedoch beachtet werden, daß dieser für die Theorie der elektromagnetischen Erscheinungen erfolgreiche Weg, der deshalb eingeschlagen wurde, weil er sich unvorhergesehenerweise als gangbar erwies, vom ursprünglichen Ziele der Untersuchung der elektrochemischen Erscheinungen abgelenkt hat. Ich beabsichtige deshalb, auf den Ausgangspunkt zurückzukehren. Zu diesem Ende erkläre ich die Gleichung (21), obwohl dieselbe oft gültig ist, für im allgemeinen ungültig. Die Variable η verliert hiedurch die bestimmte physikalische Bedeutung, sie ist von nun an, ebenso wie ζ, nur eine Hilfsvariable und die Grundgleichungen (I) bis (VIII) haben keine direkte Beziehung zu den chemischen Vorgängen.

Andrerseits können wir die Versuche, ein Gesetz für die Fluxion des chemischen Zustandes σ zu finden, unbehindert von neuem beginnen.

21. Nur einen heuristisch wirksamen und sehr überraschenden Ausblick vom Standpunkte der Gleichung (V) möchte ich hiebei nicht in Vergessenheit geraten lassen:

In Gleichung (13), § 15, hat $d\sigma$ die Bedeutung der Abweichung des chemischen und Wärmezustandes des Mediums von seinem normalen Zustande, doch gilt diese Gleichung nur für kleine und immer wieder auf Null zurückkehrende (z. B. periodische) Änderungen des Mediums. In der allgemeineren Gleichung (19) hat $d\sigma$ dieselbe Bedeutung, wenn das Medium undeformiert bleibt. Finden aber kleine (beliebig rasche), aber immer wieder auf Null zurückkehrende (z. B. periodische) Deformationen statt, so ist, wie a. a. O.[1] berechnet wurde, der Skalar η_s der Dyade η annähernd proportional der Fluxion der elastischen Energie des Mediums. Daß zwischen den ponderomotorischen Wirkungen der Deformation (den inneren Beschleunigungen) und den elektromagnetischen Vorgängen Beziehungen bestehen, liegt nach meiner Theorie auch im übrigen sehr nahe und wird durch die Elektrostriktion, die Beziehungen zwischen Magnetisierung und Deformation, die elektrokapillaren Wirkungen u. a. erwiesen.

In einer stark, rasch und fortschreitend deformierten Flüssigkeit ist, wie a. a. O.[2] berechnet wurde, der Skalar der Dyade η genau proportional dem Skalar des Quadrates der Deformationsgeschwindigkeit:

$$\eta_s = \varkappa[\nabla, \mathfrak{v}]_s^2, \tag{23}$$

also genau und allgemein proportional der pro Zeit- und Volumseinheit produzierten Reibungswärme. Aus der Form des Konstanten $\varkappa$ ergibt sich hiebei in Übereinstimmung mit den Tatsachen, daß die Reibungselektrisierung und das Kundtsche Phänomen in zähen Flüssigkeiten stärker auftreten muß.

22. Die unvorhergesehene Tatsache, daß der Skalar η_s der Dyade η eine Energieproduktion quantitativ bestimmen kann, läßt nur eine einzige Deutung zu. Es müßte η durch eine

---

[1] Diese Sitzungsber., Bd. CXV, p. 387.

[2] Ibid., p. 389.

besondere Nahewirkungsgleichung als die derivierte Dyade eines Energieflusses $\mathfrak{s}_1$ bestimmt sein:

$$\eta \overset{2}{=} \nabla, \mathfrak{s}_1.$$

Hienach muß der Skalar η_s der Divergenz eines Energieflusses und also einer Energieproduktion proportional sein.

Tatsächlich ist zu vermuten, daß eine Gleichung von dieser Form, nämlich:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} \overset{2}{=} \nabla, \mathfrak{s}_1, \qquad \text{(IX)}$$

in manchen Medien, zu welchen auch die verdünnten Gase gehören, und bei manchen Vorgängen, zu welchen vornehmlich die chemischen Vorgänge gehören, gültig ist. Mit $\mathfrak{s}_1$ bezeichnen wir den Energiefluß in diesen speziellen Fällen. Denn ohne Zweifel bedeutet die Änderung des chemischen Zustandes σ eine Änderung des Energieinhaltes des Mediums, so daß die Gleichung (IX) sehr verläßlich zu sein scheint. Dieselbe hat einige Wichtigkeit für die vorliegende Strahlungstheorie, denn der Energiefluß $\mathfrak{s}_1$ ist der gesamte Energiefluß in den elektrischen Longitudinalstrahlen.

23. Vorläufig möchte ich mitteilen, daß sich nicht nur die glühenden, lumineszierenden und radioaktiven Körper, sondern auch die Gase im leitungsfähigen Zustande in andauernder gesetzmäßig gedämpfter chemischer Oszillation befinden. Auch plane ich nun, mich der Untersuchung der Exzitation des Lichtes zuzuwenden, welche nach § 5 durch die langsamen chemischen Schwingungen des Mediums bewirkt werden dürfte.

Betrachten wir ein Medium, welches ursprünglich homogen sein mag und in welchem kleine Abweichungen seines chemischen Zustandes σ von dem normalen Zustand bewirkt worden sind, so werden die weiteren chemischen Vorgänge wohl oft nach Art der Wärmeleitungsvorgänge oder Diffusionsvorgänge ablaufen, also bald zu einem Ausgleiche führen. In einem solchen Medium dürfte also ein Gesetz von der Form des Fourier'schen Gesetzes:

$$\operatorname{div} \nabla \cdot \sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

mit hinreichender Annäherung gelten. Es dürfte aber auch Medien geben, in welchen einmal gegebene Abweichungen des chemischen Zustandes von dem normalen Zustande sich nicht aperiodisch ausgleichen, sondern zu fast ungedämpften chemischen Oszillationen führen. Insbesonders rechne ich alle glühenden Stoffe, aber auch alle sehr lumineszenzfähigen Stoffe, also auch die verdünnten Gase zu diesen Medien. In solchen Medien dürften die Änderungen von σ durch das Gesetz:

$$\nabla, \nabla \cdot \sigma \stackrel{\varrho}{=} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} \qquad (X)$$

bestimmt sein. Jedes Gesetz von solcher Form ist das Eliminationsresultat aus zwei einfacheren Gesetzen, da jede Schwingung in einer gleichzeitigen gegenseitigen Verwandlung zweier physikalischer Zustände besteht. Im vorliegenden Falle muß der zweite noch unbekannte Zustand vektorisch sein. Die elektrolytischen Erscheinungen legen die Vermutung nahe, daß der Leitungsstrom $\gamma \cdot \mathfrak{e}$ nahe Beziehungen zu den chemischen Zustandsänderungen hat. Möglicherweise gilt das einfache Gesetz:

$$k \nabla, \gamma \cdot \mathfrak{e} \stackrel{\varrho}{=} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad (k \text{ konstant}). \qquad (24)$$

Aber dieses und das Gesetz (IX) können nicht allgemein in jedem Medium gleichzeitig gültig sein, es scheint dies nur in sehr guten Leitern zuzutreffen.

Ich vermute, daß die Gleichung (X) nicht präzise richtig dargestellt ist, sondern daß σ auf der linken und rechten Seite noch etwas abweichend interpretiert werden muß. Es ist die Unterscheidung zwischen chemischer Energie und chemischem Zustande notwendig, es sind dies möglicherweise voneinander unabhängige Variable, obwohl sie sich oft proportional ändern. Der Sicherheit wegen gebe ich σ auf der linken Seite der Gleichung (X) dieselbe Bedeutung wie in

Gleichung (IX), hingegen σ auf der rechten Seite der Gleichung (X) dieselbe Bedeutung wie in Gleichung (24). Es ist dies weit vorsichtiger, als wenn die unbedingte Gültigkeit aller drei Gleichungen angenommen würde. Immerhin folgt nun aus diesen Gleichungen:

$$\nabla \cdot \nabla, \mathfrak{s}_1 \stackrel{s}{=} k \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\gamma \cdot \mathfrak{e}) \tag{25}$$

ein Gesetz über den Zusammenhang der Verteilung des Energieflusses und der Änderung des Leitungsstromes, das sich für die verdünnten Gase bestens bewährt hat.

Ich habe mich entschlossen, mit diesen vorläufigen Mitteilungen so weit zu gehen, weil ich voraussetze, daß man den Beweis verlangen wird, daß der Energiefluß der Longitudinalstrahlen, wenigstens bei Abwesenheit einer ablenkenden magnetischen Kraft, auf der Wellenfläche senkrecht steht. Diese Strahlen haben aber nun einmal in Gasen keinen anderen Energiefluß als den chemischen Energiefluß $\mathfrak{s}_1$.

Nach Lenard sind auch die Metalle für Kathodenstrahlen durchdringlich. Hier ist es leicht, das Gesetz des Energieflusses anzugeben, welcher in denselben wohlbekannte Wärmewirkungen veranlaßt. Ich gestatte mir, im nächsten Kapitel 4 einschaltungsweise die Gesetze dieses Wärmestromes zu entwickeln.

4. Der Energiefluß der Wärmeleitung, des Peltier- und Thomsoneffektes.

24. Das Fourier'sche Gesetz der Wärmeleitung

$$-c \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div} k \nabla T$$

kann nicht als ein fundamentales Nahewirkungsgesetz anerkannt werden, sondern muß als das Eliminationsresultat aus zwei Gesetzen ganz anderen Inhaltes aufgefaßt werden, und zwar aus folgenden Gründen:

1. Das Fourier'sche Gesetz enthält nur eine physikalische Variable, es setzt die Fluxion der Temperatur T in Beziehung zu ihrem Gefälle. Physikalische Vorgänge bestehen aber immer

in der simultanen Verwandlung zweier verschiedener Zustände. Auch bei der Wärmeleitung werden also nicht bloß Temperaturänderungen eintreten, sondern gleichzeitig Änderungen einer zweiten bisher unbeachteten physikalischen Variablen.

2. Dementsprechend ist das Fourier'sche Gesetz eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche sich zerlegen läßt in zwei Differentialgleichungen erster Ordnung, welche die Beziehungen dieser zwei Variablen zueinander darstellen.

Das eine dieser zwei Gesetze kann ohneweiters angegeben werden. Es lautet:

$$c\frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} \mathfrak{s}_1 = 0.$$

Es stellt die Beziehung zwischen dem Energiefluß $\mathfrak{s}_1$ (dem Wärmestrom) und der Fluxion des Wärmeinhaltes dar. Hierin bedeutet c die Wärmekapazität der Volumseinheit.

Sonach hat das zweite gesuchte Gesetz die Form:

$$\mathfrak{s}_1 \overset{?}{=} k\nabla T. \tag{26}$$

Dieses ist aber kein selbständiges Gesetz, sondern dürfte folgen aus einem Gesetze der in ungleichförmig temperierten Medien auftretenden sogenannten kontaktelektromotorischen Wirkung und aus einer in diesem Falle gültigen Beziehung des Energieflusses $\mathfrak{s}_1$ zu den elektromagnetischen Feldvariablen.

Ich habe für die kontaktelektromotorische Wirkung bei der Berührung von Lösungen verschiedener Konzentration in einer früheren Abhandlung,[1] auf welche ich hier hinweisen muß, auf wesentlich neuer Grundlage das Nernst'sche Gesetz abgeleitet. Dieses hat im wesentlichen ganz ähnliche Form wie folgendes Gesetz, welches ich für die kontaktelektromotorische Wirkung in inhomogenen guten Leitern aufrecht halten möchte:

$$\varepsilon \cdot (\mathfrak{E} - \mathfrak{e}) \overset{?}{=} k'\nabla \cdot (\gamma T). \tag{27}$$

Hierin bedeutet $\mathfrak{E}$ die elektrische Feldstärke oder elektrische Kraft im gewöhnlichen Sinne, also nach Maxwell gemessen in einem dünnen, an dem betrachteten Orte in ihrer

[1] Zur Theorie der Lösungen. Ann. d. Phys., Bd. 3, p. 599.

Richtung in dem Medium ausgesparten Luftkanal. Hingegen bedeutet $\mathfrak{e}$, wie stets, den elektrischen Vektor, für welchen die elektromagnetischen Grundgleichungen gelten. Diese beiden Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{e}$ sind in homogenen, gleichmäßig temperierten Medien identisch, in inhomogenen oder ungleichmäßig temperierten Medien aber aus dem a. a. O. angegebenen Grunde wesentlich verschieden, und eben dieser Unterschied macht die kontaktelektromotorischen Wirkungen aus.

Die Gleichung (27) erklärt eine Seite des Wärmeleitungsphänomens. Es handelt sich also nur noch um die präzise Bestimmung des Energieflusses $\mathfrak{s}_1$ und man erkennt nun leicht, daß für Metalle nicht Gleichung (25) gilt, sondern daß für diese:

$$\mathfrak{s}_1 \stackrel{\mathfrak{s}}{=} k_1 \varepsilon \cdot \mathfrak{E}. \tag{28}$$

Hierin ist k_1 ein universeller, nicht von der Natur des Metalles abhängender Reduktionsfaktor. Hiemit ist die Wärmeleitung befriedigend erklärt, ja sogar merklich besser dargestellt als durch das Fourier'sche Gesetz Aus (27) und (28) folgt die folgende Form des Wärmeleitungsgesetzes:

$$-c\frac{\partial T}{\partial t} = k_1 \operatorname{div} k' \gamma \cdot \nabla T + k_1 \operatorname{div} \varepsilon \cdot \mathfrak{e}. \tag{29}$$

Das Wärmeleitungsvermögen k ist hienach

$$k = k_1 k' \gamma. \tag{30}$$

Dasselbe ist (nach dieser Auffassung der Wärmeleitung) keine besondere spezifische Konstante des Materials, sondern nur das Produkt der elektrischen Leitfähigkeit γ und der Konstanten k' der kontaktelektromotorischen Wirkung.

Die Abweichung der Gleichung (29) von dem Fourierschen Gesetz ist der elektrischen Ladung $\operatorname{div} \varepsilon \cdot \mathfrak{e}$ proportional,[1] welche allerdings in homogenen Leitern unmerklich klein bleibt.

---

[1] Außerdem folgt noch für das Wärmegleichgewicht in inhomogenen Leitern die vom experimentellen Standpunkt aus ganz bedeutungslose Beziehung:

$$\operatorname{div} k' T \nabla . \gamma = 0.$$

Immerhin folgt, daß im Wärmegleichgewicht jene Stellen, welche verschieden geladen sind, in einem Halbleiter spurweise verschieden temperiert sein müssen.

25. Der von der ersten Potenz der Temperatur abhängige Teil des Peltiereffektes. Große elektrische Ladungen treten nur in inhomogenen durchströmten Leitern auf, weil nicht der Vektor $\varepsilon \cdot \mathfrak{e}$, sondern der Leitungsstrom $\gamma \cdot \mathfrak{e}$ divergenzfrei verteilt ist. An den Lötstellen verschiedener Leiter wird deshalb die Abweichung von dem Fourier'schen Gesetze, welche aus Gleichung (29) folgt, deutlich zu beobachten sein.

Die Wärmeproduktion für $\nabla T = 0$, welche nach dem Fourier'schen Gesetze Null sein sollte, hat nach (29) den Wert:

$$-c\frac{\partial T}{\partial t} = k_1 \operatorname{div} \varepsilon \mathfrak{e} = k_1 \operatorname{div} \frac{\varepsilon}{\gamma} \gamma \mathfrak{e} = k_1 \left(\nabla \frac{\varepsilon}{\gamma}\right) \cdot (\gamma \mathfrak{e}), \quad (31)$$

denn der Leitungsstrom ist divergenzfrei:

$$\operatorname{div} \gamma \mathfrak{e} = 0.$$

Die Leitfähigkeit γ der Metalle nimmt mit steigender Temperatur ab, und zwar ist im einfachsten Falle mit Annäherung:

$$\gamma = \frac{\gamma_0}{T}, \quad \text{also:} \quad \nabla \frac{\varepsilon}{\gamma} = T \nabla \frac{\varepsilon}{\gamma_0}. \quad (32)$$

Nach dem Ohm'schen Gesetz ist:

$$\gamma \cdot \mathfrak{e} \overset{3}{=} c_0 \operatorname{rot} \mathfrak{m}$$

und somit ergibt sich schließlich:

$$-c\frac{\partial T}{\partial t} = c_0 k_1 T \nabla \frac{\varepsilon}{\gamma_0} \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{m}. \quad (33)$$

Integriert man diese Gleichung über eine geschlossene Fläche, welche die Lötstelle einschließt, so erhält man den Wert dieser Wärmeproduktion in der Lötstelle, welche einen Teil des Peltiereffektes erklärt, nämlich jenen, welcher linear von der Temperatur abhängt. Derselbe ergibt sich nach (33) proportional dem rot $\mathfrak{m}$, also proportional der ersten Potenz der Stromstärke und der ersten Potenz der Temperatur und ferner

proportional der Differenz der Werte von ε/γ_0 in den beiden Metallen. In Wirklichkeit wird das Gesetz dieser Wärmeproduktion etwas komplizierter sein, weil die Gleichung (32) nicht allgemein und streng gilt.

26. Der Thomsoneffekt und der vom Quadrate der Temperatur abhängende Teil des Peltiereffektes. Der Energiefluß $\mathfrak{s}_1$ stellt nicht den ganzen Wärmestrom $\mathfrak{s}-\mathfrak{s}'$ in Metallen dar, sondern dieser hat noch eine zweite Komponente $\mathfrak{s}_2$. Es ist

$$\mathfrak{s}-\mathfrak{s}' \stackrel{s}{=} \mathfrak{s}_1 + \mathfrak{s}_2.$$

Nach F. Kohlrausch wird der galvanische Strom von einem proportionalen Wärmestrom begleitet, wodurch der Peltiereffekt ganz, der Thomsoneffekt aber nur zum Teil erklärt wurde.[1] Meine Auffassung steht jener von Kohlrausch ganz nahe. Nur definiere ich den Wärmestrom präziser als eine Komponente des Energieflusses und will durch diesen Kohlrauschschen Energiefluß nicht den ganzen Peltiereffekt erklären, sondern nur dessen quadratischen Teil, hingegen erkläre ich hiedurch den Thomsoneffekt zur Gänze.

Dieser Energiefluß $\mathfrak{s}_2$ hat den Wert:

$$\mathfrak{s}_2 \stackrel{s}{=} k_2 \gamma \cdot \mathfrak{e}. \tag{34}$$

Die Konstante k_2 ist eine Materialkonstante, welche für die meisten Metalle dem Quadrate der absoluten Temperatur proportional sein muß:

$$k_2 = \varkappa T^2. \tag{35}$$

Der Thomsoneffekt tritt nur in guten Leitern auf, nicht aber in allgemeinen Medien, er folgt nämlich nur dann aus (34), wenn man:

$$\gamma \cdot \mathfrak{e} \stackrel{s}{=} c_0 \operatorname{rot} \mathfrak{m}$$

setzt, was nur für gute Leiter gestattet ist. $\varkappa$ ist eine von der Temperatur unabhängige spezifische Konstante der Metalle. Es folgt aus (34) und (35):

---

[1] Vergl. hierüber und über die Abhängigkeit dieser Effekte von der Temperatur: A. Szarvassi, Ann. d. Phys., Bd. 17, p. 248.

$$\operatorname{div} \mathfrak{s}_2 = 2c_0 \varkappa T \nabla T \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{m} + c_0 T^2 \nabla \varkappa \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{m}. \qquad (36)$$

Das erste Glied der rechten Seite dieser Gleichung stellt den Thomsoneffekt vollkommen dar, diese Wärmeproduktion ist dem Temperaturgefälle ∇T, der ersten Potenz der Stromdichte $c_0 \operatorname{rot} \mathfrak{m}$ und ferner der ersten Potenz der absoluten Temperatur T proportional, wie dies tatsächlich für den Thomsoneffekt von Batelli beobachtet, beziehungsweise von Szarvassi (l. c.) aus dem Entropieprinzip erschlossen wurde.

Das zweite Glied der Gleichung (36) stellt jenen großen Teil des Peltiereffektes dar, welcher dem Quadrate der Temperatur proportional ist. Der lineare Teil des Peltiereffektes, vielleicht auch ein kleiner Bruchteil des quadratischen Teiles des Peltiereffektes wird hingegen nach § 25 durch den Energiefluß $\mathfrak{s}_1$ erklärt.

Der ganze Wärmestrom der Wärmeleitung, des Peltier- und Thomsoneffektes hat den elektromagnetischen Wert:

$$\mathfrak{s} - \mathfrak{s}' \triangleq k_1 \varepsilon \cdot \mathfrak{E} + k_2 \gamma \cdot \mathfrak{e}. \qquad (37)$$

5. Elektromagnetische Grundgleichungen für ruhende allgemeine Medien.

27. Durch die Gleichungen (III) und (IV), § 19, welche nur für Medien gelten, bei welchen zufolge der elektromagnetischen Vorgänge Änderungen des chemischen Zustandes nicht eintreten, ist eine wesentliche Abhängigkeit der Leitfähigkeiten γ und ξ von der Deformationsgeschwindigkeit festgestellt. Aber auch in ruhenden (undeformierten) Medien ist γ und ξ veränderlich, wenn sich der chemische Zustand oder die Temperatur ändert. Medien, in welchen solche Änderungen zufolge der rasch ablaufenden elektromagnetischen Vorgänge in elektrischen Strahlen vorkommen können, sollen nun betrachtet werden.

Wir haben zunächst das Gesetz der Änderungen von γ und ξ, d. h. zwei Gleichungen für diese Variablen aufzustellen, welche für ruhende allgemeine Medien an Stelle der Gleichungen (III) und (IV) gelten. Da es sich nur um kleine Änderungen dieser Variablen handelt und wir das Gesetz, nach welchem

sich andere stoffliche Variable hiebei ändern, bereits kennen, macht dies keine Schwierigkeiten.

Die zwar sehr kleinen, aber raschen Veränderungen von ε und γ, um welche es sich handelt, dürften hauptsächlich durch Änderungen des chemischen Zustandes des Mediums bewirkt werden, diese Variablen sind also Funktionen eines und desselben Zustandes, also sind sie Funktionen voneinander. Da es sich nur um kleine Änderungen dieser Variablen aus ihren normalen Ruhewerten γ_0 und ε_0 handelt, so können diese einander proportional gesetzt werden. Die gesuchten Gleichungen lauten also:

$$\gamma - \gamma_0 \stackrel{9}{=} p(\varepsilon - \varepsilon_0), \tag{XI}$$

$$\xi - \xi_0 \stackrel{9}{=} q(\mu - \mu_0), \tag{XII}$$

worin p und q Materialkonstante sind.

28. Unter einem allgemeinen Medium verstehe ich ein solches, in welchem einige der Materialkonstanten $a_1 a_2 a_3 a_4$ $b_1 b_2 b_3 b_4 p q$, welche die stofflichen und Temperaturänderungen während rasch ablaufender elektromagnetischer Vorgänge und deren Rückwirkung auf diese Vorgänge bestimmen, von Null verschieden sind. Es ist kein Medium von ganz allgemeinem Verhalten bekannt, sondern für alle bisher untersuchten Medien ist $a_2 = 0$ und $b_1 = 0$, für alle Gase ist ferner $a_3 = 0$ und $b_2 = 0$, endlich ist für alle chemisch schwer veränderlichen Stoffe, welche keine andere Eigentümlichkeit als die elektrische Doppelbrechung und die Drehung der Polarisationsebene zeigen, $p = 0$ und $q = 0$.

Sechs dieser Materialkonstanten bestimmen die spezielle Form der allgemeinen derivierten Dyaden, welche in den Grundgleichungen eine große Rolle spielen. Hier, im früheren und im folgenden sind dieselben abgekürzt bezeichnet. Es bedeutet:

$$a\nabla, \mathfrak{e} \stackrel{9}{=} a_1 \nabla; \mathfrak{e} + a_2 \mathfrak{e}; \nabla + a_3 I \operatorname{div} \mathfrak{e}, \tag{38}$$

$$b\nabla, \mathfrak{e} \stackrel{9}{=} b_1 \nabla; \mathfrak{e} + b_2 \mathfrak{e}; \nabla + b_3 I \operatorname{div} \mathfrak{e}.$$

29. Setzen wir in dem nach den oben angegebenen Methoden gewonnenen System der elektromagnetischen Grund-

gleichungen, welches in § 19 zusammengestellt ist, $\mathfrak{v} \overset{3}{=} 0$, und eliminieren die Hilfsvariablen η und ζ aus (VII) und (VIII) mit Hilfe von (V) und (VI), so ergibt sich folgendes System von Grundgleichungen für ruhende allgemeine Medien:

$$[\varepsilon]\cdot\frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial t}+\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}+\gamma\right)\cdot\mathfrak{e}\overset{3}{=}c_0\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{m}, \tag{A}$$

$$[\mu]\cdot\frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial t}+\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \mu}{\partial t}+\xi\right)\cdot\mathfrak{m}\overset{3}{=}-c_0\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{e}, \tag{B}$$

$$\gamma-\gamma_0\overset{9}{=}p(\varepsilon-\varepsilon_0), \tag{C}$$

$$\xi-\xi_0\overset{9}{=}q(\mu-\mu_0), \tag{D}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}+a\nabla,\varepsilon\cdot\mathfrak{e}\overset{9}{=}a_4(\varepsilon-\varepsilon_0), \tag{E}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial t}+b\nabla,\varepsilon\cdot\mathfrak{e}\overset{9}{=}b_4(\mu-\mu_0). \tag{F}$$

30. Multipliziert man die Gleichungen *(A)* und *(B)* mit $\mathfrak{e}$, beziehungsweise $\mathfrak{m}$, und addiert, so ergibt sich die Energiegleichung für ruhende allgemeine Medien:

$$\frac{\partial E}{\partial t}+\mathfrak{e}\cdot\gamma\cdot\mathfrak{e}+\mathfrak{m}\cdot\xi\cdot\mathfrak{m}+c_0\,\mathrm{div}\,\mathfrak{e}\times\mathfrak{m}=0, \tag{39}$$

worin die potentielle elektromagnetische Energie E den Wert:

$$E=\frac{1}{2}(\mathfrak{e}\cdot\varepsilon\cdot\mathfrak{e}+\mathfrak{m}\cdot\mu\cdot\mathfrak{m}) \tag{40}$$

hat. $\mathfrak{e}\cdot\gamma\cdot\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{m}\cdot\xi\cdot\mathfrak{m}$ sind die Stromwärmen. Der Energiefluß hat den Poynting'schen Wert, es kommt jedoch noch der Wärmestrom hinzu.

31. Geringe rasche Veränderungen in starken Feldern. Dieses Gleichungssystem ist, entsprechend dem nichtsuperpositorischen Charakter der elektromagnetischen Erscheinungen, nicht linear, läßt sich aber bedeutend vereinfachen, wenn man sich darauf beschränkt, Vorgänge zu betrachten,

welche in starken statischen Feldern stattfinden und nur sehr geringe, aber rasche Veränderungen derselben bewirken.

Dann kann man $(\varepsilon - \varepsilon_0)$ gegen ε_0, $(\mu - \mu_0)$ gegen μ_0, $\mathfrak{e} - \mathfrak{e}_0$ gegen $\mathfrak{e}_0$ und $\mathfrak{m} - \mathfrak{m}_0$ gegen $\mathfrak{m}_0$ vernachlässigen und setzen:

$$\left.\begin{aligned} [\varepsilon]\cdot\frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial t} &\overset{3}{=} \varepsilon_0\cdot\frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial t},\\ [\mu]\cdot\frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial t} &\overset{3}{=} \mu_0\cdot\frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial t},\\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\cdot\mathfrak{e} &\overset{3}{=} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\cdot\mathfrak{e}_0,\\ \frac{\partial \mu}{\partial t}\cdot\mathfrak{m} &\overset{3}{=} \frac{\partial \mu}{\partial t}\cdot\mathfrak{m}_0. \end{aligned}\right\} \qquad (41)$$

Ferner betrachten wir meist nur Medien, welche im normalen Zustande nichtleitend sind, so daß

$$\left.\begin{aligned} \gamma_0 = \xi_0 = 0, \qquad & \operatorname{rot}\mathfrak{m}_0 \overset{2}{=} \operatorname{rot}\mathfrak{e}_0 \overset{2}{=} 0,\\ \gamma\cdot\mathfrak{e} = \gamma\cdot\mathfrak{e}_0, \qquad & \xi\cdot\mathfrak{m} = \xi\cdot\mathfrak{m}_0. \end{aligned}\right\} \qquad (42)$$

Endlich berücksichtigen wir, daß alle endlichen Glieder sich im Ruhefall, also auch im betrachteten Falle aufheben müssen, also aus diesen Gleichungen herausfallen. Es ist:

$$a\nabla, \varepsilon_0\cdot\mathfrak{e}_0 \overset{2}{=} a_4(\varepsilon_0 - \varepsilon_{00}). \qquad (43)$$

Hierin bedeutet, wie stets im folgenden, ε_0 die dielektrische Dyade im statischen ungleichförmigen elektrischen Felde $\mathfrak{e}_0$, während ε_{00} den ganz normalen Wert derselben im unelektrischen Felde oder gleichförmigen elektrischen Felde bezeichnet. Die Abweichung $(\varepsilon_0 - \varepsilon_{00})$, d. i. die Doppelbrechung im ungleichförmigen elektrischen Felde, ist aber wegen der bedeutenden Größe der Konstanten a_4 wohl meist unmerklich klein.

Die Grundgleichungen nehmen für geringe rasche Änderungen in starken elektromagnetischen Feldern für im normalen Zustande magnetisch nichtleitende Medien die lineare Form an:

$$\varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial t} + \left(\frac{1}{2}\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \gamma - \gamma_0\right) \cdot \mathfrak{e}_0 + \gamma_0 \cdot (\mathfrak{e} - \mathfrak{e}_0) \stackrel{3}{=} c_0 \operatorname{rot} (\mathfrak{m} - \mathfrak{m}_0), \quad (A')$$

$$\mu_0 \cdot \frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial t} + \left(\frac{1}{2}\frac{\partial \mu}{\partial t} + \xi\right) \cdot \mathfrak{m}_0 \stackrel{3}{=} -c_0 \operatorname{rot} (\mathfrak{e} - \mathfrak{e}_0), \quad (B')$$

$$\gamma - \gamma_0 \stackrel{9}{=} p(\varepsilon - \varepsilon_0), \quad (C')$$

$$\xi \stackrel{9}{=} q(\mu - \mu_0), \quad (D')$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \varepsilon_0 \cdot a \nabla, (\mathfrak{e} - \mathfrak{e}_0) \stackrel{9}{=} a_4 (\varepsilon - \varepsilon_0), \quad (E')$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \varepsilon_0 \cdot b \nabla, (\mathfrak{e} - \mathfrak{e}_0) \stackrel{9}{=} b_4 (\mu - \mu_0). \quad (F')$$

Ob es sich auch für Strahlen kleiner Wellenlänge bewähren wird, im zweiten Gliede von *(E)* und *(F)* ε_0 statt ε zu setzen, scheint mir nicht gewiß, doch nötigt uns die Rücksicht auf die möglichste Einfachheit der Rechnung vorläufig zu dieser einfacheren Annahme.

6. Strahlungen in starken elektromagnetischen Feldern.

32. Diese Gleichungen gelten auch für elektromagnetische Wellen und Strahlen kleiner Amplitude, welche sich in starken statischen Feldern fortpflanzen. Da diese Gleichungen in den Variablen der Welle linear und homogen sind, superponieren sich verschiedene im selben statischen Felde fortschreitende Strahlen, ohne sich gegenseitig zu beeinflussen, hingegen erfahren sie von Seite der Feldvektoren $\mathfrak{e}_0$ und $\mathfrak{m}_0$, welche als Konstante in diese Gleichungen eintreten, charakteristische Beeinflussungen, welche wir nun berechnen wollen.

33. Wir betrachten jenes Integral dieser Gleichungen, welches eine allgemeine ebene Sinuswelle genannt werden kann, und berücksichtigen auch die Dämpfung. Es sei $\mathfrak{c}$ die Wellengeschwindigkeit, $\mathfrak{n}$ ihr reziproker Wert, τ die Schwingungsdauer, $\varkappa$ die Dämpfungskonstante. Ferner bezeichne $\mathfrak{r}$ den von einem beliebigen ruhenden Nullpunkt aus gezählten Ortsvektor, so daß

$$\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{r} = \text{konst.}$$

die Gleichung einer Wellenebene ist. Wir setzen:

$$S_1 = e^{-\frac{2\pi}{\tau}\varkappa\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{r}} \sin\frac{2\pi}{\tau}(t-\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{r}), \tag{44}$$

$$S_2 = e^{-\frac{2\pi}{\tau}\varkappa\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{r}} \cos\frac{2\pi}{\tau}(t-\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{r}). \tag{45}$$

Ferner bezeichnen wir mit dem Index 1, beziehungsweise 2 konstante Vektoren, beziehungsweise Dyaden, welche die Amplituden der Variablen der Welle darstellen.

Die allgemeinste ebene gedämpfte elektromagnetische Sinuswelle wird dargestellt durch:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{e}-\mathfrak{e}_0 &\overset{9}{=} \mathfrak{e}_1 S_1 + \mathfrak{e}_2 S_2, \\ \varepsilon-\varepsilon_0 &\overset{9}{=} \varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2 S_2, \\ \gamma-\gamma_0 &\overset{9}{=} \gamma_1 S_1 + \gamma_2 S_2. \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{m}-\mathfrak{m}_0 &\overset{9}{=} \mathfrak{m}_1 S_1 + \mathfrak{m}_2 S_2, \\ \mu-\mu_0 &\overset{9}{=} \mu_1 S_1 + \mu_2 S_2, \\ \xi &\overset{9}{=} \xi_1 S_1 + \xi_2 S_2. \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Dieser reelle Ansatz bietet folgenden Rechenvorteil: Offenbar erhält man ganz dasselbe Integral, wenn man die mit dem Index 1 versehenen Amplituden durch die mit dem Index 2 versehenen Amplituden ersetzt und umgekehrt, dieses letztere aber unter Vorzeichenwechsel. Zufolgedessen kann man zu jeder für diese Amplituden berechneten Gleichung eine zugeordnete Amplitudengleichung mit vertauschten Indizen angeben und erspart die halbe Rechnung.

34. Die Derivationen der Variablen nach dem Orte $\mathfrak{r}$ werden gebildet, indem man $\nabla\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{r} \overset{9}{=} \mathfrak{n}$ an die Stelle von ∇ setzt und S_1, beziehungsweise S_2 nach $\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{r}$ differenziert.

Setzen wir die Werte (46) und (47) in die Grundgleichungen *(A')* bis *(F')* ein und trennen die mit S_1, beziehungsweise S_2 behafteten Glieder, so ergeben sich die Amplitudengleichungen, welche die 84 Komponenten der Amplituden der allgemeinen Welle bestimmen:

$$\varepsilon_0 \cdot \mathfrak{e}_1 + \left(\frac{1}{2}\varepsilon_1 + \frac{\tau}{2\pi}\gamma_2\right) \cdot \mathfrak{e}_0 + \frac{\tau}{2\pi}\gamma_0 \cdot \mathfrak{e}_2 \overset{3}{=}$$

$$\overset{3}{=} -c_0\, \mathfrak{u} \times \mathfrak{m}_1 - c_0 \varkappa\, \mathfrak{u} \times \mathfrak{m}_2, \quad (A1)$$

$$\mu_0 \cdot \mathfrak{m}_1 + \left(\frac{1}{2}\mu_1 + \frac{\tau}{2\pi}\xi_2\right) \cdot \mathfrak{m}_0 \overset{3}{=} c_0\, \mathfrak{u} \times \mathfrak{e}_1 + c_0 \varkappa\, \mathfrak{u} \times \mathfrak{e}_2, \quad (B1)$$

$$\gamma_1 \overset{9}{=} p\varepsilon_1, \quad (C1)$$

$$\xi_1 \overset{9}{=} q\mu_1, \quad (D1)$$

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_0 \cdot a\, \mathfrak{u}, \mathfrak{e}_1 - \varepsilon_0 \cdot \varkappa\, a\, \mathfrak{u}, \mathfrak{e}_2 \overset{9}{=} \frac{\tau}{2\pi} a_4 \varepsilon_2, \quad (E1)$$

$$\mu_1 - \varepsilon_0 \cdot b\, \mathfrak{u}, \mathfrak{e}_1 - \varepsilon_0 \cdot \varkappa\, b\, \mathfrak{u}, \mathfrak{e}_2 \overset{9}{=} \frac{\tau}{2\pi} b_4 \mu_2, \quad (F1)$$

Hiezu kommen noch die zugeordneten Gleichungen *(A2)* bis *(F2)*. Hierin bedeutet:

$$a\,\mathfrak{u}, \mathfrak{e}_1 \overset{9}{=} a_1\, \mathfrak{u}; \mathfrak{e}_1 + a_2 \mathfrak{e}_1; \mathfrak{u} + a_3 I\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{e}_1,$$

$$b\,\mathfrak{u}, \mathfrak{e}_1 \overset{9}{=} b_1\, \mathfrak{u}; \mathfrak{e}_1 + b_2 \mathfrak{e}_1; \mathfrak{u} + b_3 I\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{e}_1.$$

Aus *(E1)* und *(E2)* folgt:

$$\varepsilon_1 \overset{9}{=} f \cdot a\,\mathfrak{u}, \mathfrak{e}_1 + f' \cdot a\,\mathfrak{u}, \mathfrak{e}_2 \quad (48, 1)$$

und die zugeordnete Amplitudengleichung (48, 2), worin:

$$f = \varepsilon_0 \frac{1 - \varkappa r}{1 + r^2} \ldots \quad f' = \varepsilon_0 \frac{r + \varkappa}{1 + r^2} \ldots \quad r = \frac{\tau}{2\pi} a_4. \quad (49)$$

Aus *(F1)* und *(F2)* ergibt sich:

$$\mu_1 \overset{9}{=} g \cdot b\,\mathfrak{u}, \mathfrak{e}_1 + g' \cdot b\,\mathfrak{u}, \mathfrak{e}_2 \quad (50, 1)$$

und die zugeordnete Gleichung, worin:

$$g = -\varepsilon_0 \frac{2\pi\varkappa}{\tau b_4} \ldots \quad g' = \varepsilon_0 \frac{2\pi}{\tau b_4}. \quad (51)$$

In (51) wurde gleich berücksichtigt, daß es in keinem Medium (ausgenommen das Eisen, welches wir nicht betrachten werden) vorkommen kann, daß sich zufolge der geringen vorausgesetzten chemischen Änderungen μ wesentlich von seinem

Ruhewerte μ_0 unterscheidet, denn erfahrungsgemäß hat die diamagnetische Dyade μ für die meisten Stoffe nahezu denselben Wert wie für Luft, sie hängt also überhaupt nicht stark von dem chemischen Zustande des Mediums ab und deshalb muß die Konstante b_4 in Gleichung *(F)* einen ungemein großen Wert haben. Dies vereinfacht das Verhalten der Medien, was sich darin ausdrückt, daß die Werte (51) einfachere Gestalt annehmen als die sonst ganz analogen Werte (49). Es wurde in *(F1)* μ_1 gegen die anderen Glieder vernachlässigt.

Besonders hervorgehoben muß werden, daß die Gleichungen *(E')* und *(F')* den mit Genauigkeit geltenden Gleichungen *(E)* und *(F)* fast völlig gleich sind, es gelten also die Gleichungen *(E1)* und *(F1)* nicht nur für Strahlen in starken elektromagnetischen Feldern, sondern mit hinreichender Genauigkeit für jeden gedämpften Sinusstrahl auch bei Abwesenheit eines statischen elektromagnetischen Feldes. Es geben also die Gleichungen (48) und (50) eine allgemein gültige Beziehung für Strahlungen in Medien allgemeinen Verhaltens.

Nach (48) ist die Amplitude der Schwingungen der dielektrischen Dyade bei gegebener Amplitude der elektrischen Schwingungen desto größer, je kleiner die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Strahles ist, denn $\mathfrak{n}$ ist die reziproke Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Kennt man also das Verhältnis dieser Amplituden, so kann man auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Strahles beurteilen.

Nach *(C1)* und *(D1)* erhält man:

$$\gamma_1 \stackrel{9}{=} pf \cdot a\,\mathfrak{n}, \mathfrak{e}_1 + pf' \cdot a\,\mathfrak{n}, \mathfrak{e}_2, \tag{52, 1}$$

$$\xi_1 \stackrel{9}{=} qg \cdot b\,\mathfrak{n}, \mathfrak{e}_1 + qg' \cdot b\,\mathfrak{n}, \mathfrak{e}_2. \tag{53, 1}$$

35. Setzen wir die Amplituden der stofflichen Variablen in die elektromagnetischen Amplitudengleichungen *(A1)*, *(A2)*, *(B1)*, *(B2)* ein, so ergeben sich die vier vektorischen Gleichungen, welche die Amplituden der elektrischen und magnetischen Schwingungen bestimmen:

$$\varepsilon_0 \cdot \mathfrak{e}_1 + \varphi \cdot (a\,\mathfrak{n}, \mathfrak{e}_1) \cdot \mathfrak{e}_0 + \varphi' \cdot (a\,\mathfrak{n}, \mathfrak{e}_2) \cdot \mathfrak{e}_0 + \frac{\tau}{2\pi} \gamma_0 \cdot \mathfrak{e}_2 \overset{3}{=}$$

$$\overset{3}{=} -c_0\, \mathfrak{n} \times (\mathfrak{m}_1 + \varkappa \mathfrak{m}_2), \quad (54, 1)$$

$$\mu_0 \cdot \mathfrak{m}_1 + \psi \cdot (b\,\mathfrak{n}, \mathfrak{e}) \cdot \mathfrak{m}_0 + \psi' \cdot (b\,\mathfrak{n}, \mathfrak{e}_2) \cdot \mathfrak{m}_0 \overset{3}{=} +c_0\, \mathfrak{n} \times (\mathfrak{e}_1 + \varkappa \mathfrak{e}_2). \quad (55, 1)$$

Hierin ist:

$$\varphi = \frac{1}{2} f - \frac{\tau}{2\pi} pf', \quad (56)$$

$$\varphi' = \frac{1}{2} f' + \frac{\tau}{2\pi} pf, \quad (57)$$

$$\psi = \frac{1}{2} g - \frac{\tau}{2\pi} qg', \quad (58)$$

$$\psi' = \frac{1}{2} g' + \frac{\tau}{2\pi} qg. \quad (59)$$

Um noch die magnetischen Amplituden zu eliminieren, multiplizieren wir (55, 1) rotorisch mit $\frac{c_0}{\mu_0} \mathfrak{n}\times$ und (55, 2) mit $\varkappa \frac{c_0}{\mu_0} \mathfrak{n}\times$ und subtrahieren sie von (54, 1).

Die Gleichungen für die elektrischen Amplituden lauten:

$$\varepsilon_0 \cdot \mathfrak{e}_1 + \varphi \cdot (a\,\mathfrak{n}, \mathfrak{e}_1) \cdot \mathfrak{e}_0 + \varphi' \cdot (a\,\mathfrak{n}, \mathfrak{e}_2) \cdot \mathfrak{e}_0 + \frac{\tau}{2\pi} \gamma_0 \cdot \mathfrak{e}_2 +$$

$$+ w \cdot \mathfrak{n} \times (b\,\mathfrak{n}, \mathfrak{e}_1) \cdot \mathfrak{m}_0 + w' \cdot \mathfrak{n} \times (b\,\mathfrak{n}, \mathfrak{e}_2) \cdot \mathfrak{m}_0 +$$

$$+ \frac{c_0^2}{\mu_0} (1 - \varkappa^2)\, \mathfrak{n} \overset{\times}{,} \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{e}_1 + 2 \frac{c_0^2}{\mu_0} \varkappa\, \mathfrak{n} \overset{\times}{,} \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{e}_2 \overset{3}{=} 0, \quad (60, 1)$$

worin:

$$w = \frac{c_0 \varepsilon_0}{\mu_0 b_4} \left(\frac{2\pi\varkappa}{\tau} + q(1 - \varkappa^2) \right), \quad (61)$$

$$w' = \frac{c_0 \varepsilon_0}{\mu_0 b_4} \left(-\frac{\pi}{\tau} (1 - \varkappa^2) + 2q\varkappa \right). \quad (62)$$

Die planare Dyade $\mathfrak{n} \overset{\times}{,} \mathfrak{n}$ tritt durch die Assoziationsänderung der Faktoren des vektorischen Tripelproduktes auf. Es ist:

$$\mathfrak{n} \times \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{e}_1 \overset{3}{=} \mathfrak{n} \times (\mathfrak{n} \times \mathfrak{e}_1), \tag{63}$$

$$\mathfrak{n} \times \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{e}_2 \overset{3}{=} \mathfrak{n} \times (\mathfrak{n} \times \mathfrak{e}_2). \tag{64}$$

Diese planare Dyade läßt sich auch als Differenz einer linearen und einer proportionalen isotropen Dyade darstellen, so wie sich z. B. eine Querkontraktion durch eine Längsdilatation und darauffolgende isotrope Volumsverkleinerung ersetzen läßt. Es ist:

$$\mathfrak{n} \times \mathfrak{n} \overset{9}{=} \mathfrak{n}\,\mathfrak{n} - \mathfrak{n}^2 I. \tag{65}$$

Wir wollen noch die allgemeinen Dyaden $a\mathfrak{n}, \mathfrak{e}_1$ und $b\mathfrak{n}, \mathfrak{e}_1$ ausführlich schreiben. Es ist:

$$a\mathfrak{n}, \mathfrak{e}_1 \cdot \mathfrak{e}_0 = a_1 \mathfrak{n} (\mathfrak{e}_1 \cdot \mathfrak{e}_0) + a_2 \mathfrak{e}_1 (\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{e}_0) + a_3 (\mathfrak{e}_1 \cdot \mathfrak{n}) \mathfrak{e}_0. \tag{66}$$

Dann ordnen wir die Gleichungen (60) nach den charakteristischen Richtungen des Feldes und der Welle und erhalten schließlich:

$$\begin{aligned}
&\left(\varepsilon_0 + a_2 \varphi\, \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{e}_0 + \frac{c_0^2}{\mu_0} (1 - \varkappa^2)\, \mathfrak{n} \times \mathfrak{n}\right) \cdot \mathfrak{e}_1 + \\
&+ \left(a_2 \varphi'\, \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{e}_0 + 2 \frac{c_0^2}{\mu_0} \varkappa\, \mathfrak{n} \times \mathfrak{n} + \frac{\tau}{2\pi} \gamma_0\right) \cdot \mathfrak{e}_2 + \\
&+ a_1 (\varphi \mathfrak{e}_0 \cdot \mathfrak{e}_1 + \varphi' \mathfrak{e}_0 \cdot \mathfrak{e}_2) \cdot \mathfrak{n} + \\
&+ a_3 (\varphi\, \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{e}_1 + \varphi' \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{e}_2) \cdot \mathfrak{e}_0 + \\
&+ b_2 (w \cdot \mathfrak{n} \times \mathfrak{e}_1 + w' \cdot \mathfrak{n} \times \mathfrak{e}_2)\, \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{m}_0 + \\
&+ b_3 (w\, \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{e}_1 + w' \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{e}_2) \cdot \mathfrak{n} \times \mathfrak{m}_0 \overset{3}{=} 0.
\end{aligned} \tag{67, 1}$$

Hiezu kommt noch die zugeordnete Amplitudengleichung (67, 2), welche man aus (67, 1) erhält, indem man $\mathfrak{e}_2$ statt $\mathfrak{e}_1$ und $-\mathfrak{e}_1$ statt $\mathfrak{e}_2$ setzt. Von diesen Gleichungen werden wir bei den folgenden Deduktionen meist ausgehen.

---

36. Die weitere Rechnung führt zur Bestimmung der Wellengeschwindigkeit $\mathfrak{c}$ und Dämpfung $\varkappa$. Doch verwenden wir im folgenden die Resultate dieser allgemeinen Berechnung nicht und können uns daher mit einer kurzen Darstellung derselben begnügen.

Die Gleichungen (67) können in die Form gebracht werden:

$$\Phi_1 \cdot \mathfrak{e}_1 + \Phi_2 \cdot \mathfrak{e}_2 \overset{3}{=} 0, \tag{68, 1}$$

$$\Phi_1 \cdot \mathfrak{e}_2 - \Phi_2 \cdot \mathfrak{e}_1 \overset{3}{=} 0, \tag{68, 2}$$

woraus folgt:

$$\Psi \cdot \mathfrak{e}_1 \overset{3}{=} 0, \qquad \Psi \cdot \mathfrak{e}_2 \overset{3}{=} 0. \tag{69}$$

Hierin ist:

$$\Psi \overset{9}{=} \Phi_2^{-1} \cdot \Phi_1 + \Phi_1^{-1} \cdot \Phi_2,$$

$$\Phi_1 \overset{9}{=} \mathfrak{f}_1 \cdot \mathfrak{i} + \mathfrak{g}_1 \cdot \mathfrak{j} + \mathfrak{h}_1 \cdot \mathfrak{k},$$

$$\Phi_2 \overset{9}{=} \mathfrak{f}_2 \cdot \mathfrak{i} + \mathfrak{g}_2 \cdot \mathfrak{j} + \mathfrak{h}_2 \cdot \mathfrak{k},$$

worin $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ orthogonale Einheitsvektoren sind und die übrigen Vektoren leicht aus (67) berechnet werden können.

Nach (69) kann $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ nur dann verschiedene Richtung haben, wenn Ψ eine lineare Dyade ist; nur in diesem Falle ist also die elektrische Schwingung elliptisch. Stets muß aber der dritte Skalar Ψ_3 verschwinden. Dieser zerfällt aber der Vertauschbarkeit der Indices wegen in die Summe zweier Quadrate:

$$\Psi_3 = M^2 + N^2. \tag{70}$$

Diese Schlußgleichung ist also äquivalent den zwei Gleichungen:

$$M = 0, \qquad N = 0, \tag{71}$$

worin:

$$\left.\begin{aligned} M &= \mathfrak{f}_1 \cdot \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{g}_1 \cdot \mathfrak{f}_2 \times \mathfrak{h}_2 - \mathfrak{h}_1 \cdot \mathfrak{f}_2 \times \mathfrak{g}_2 - \mathfrak{g}_2 \cdot \mathfrak{h}_2 \times \mathfrak{f}_1, \\ N &= \mathfrak{f}_2 \cdot \mathfrak{g}_2 \times \mathfrak{h}_2 + \mathfrak{g}_2 \cdot \mathfrak{f}_1 \times \mathfrak{h}_1 - \mathfrak{h}_2 \cdot \mathfrak{f}_1 \times \mathfrak{g}_1 - \mathfrak{g}_1 \cdot \mathfrak{h}_1 \times \mathfrak{f}_2. \end{aligned}\right\} \tag{72}$$

Die Gleichungen (71) bestimmen die Größe der Wellengeschwindigkeit und der Dämpfung und sind in beiden Unbekannten vom sechsten Grade.

Die Wellenfläche zerfällt aber meist in eine Fläche vierten Grades, welche zum Ursprung symmetrisch ist, und in eine Fläche zweiten Grades, welche unsymmetrisch zum Ursprung ist. Erstere entspricht den im wesentlichen transversalen Strahlen, letztere den im wesentlichen longitudinalen Strahlen.

Zweiter Teil.

Longitudinale Strahlen in starken elektromagnetischen Feldern.

7. Strahlungen in verdünnten Gasen.

37. Longitudinale elektrische Strahlen können nach meiner Theorie besonders leicht in verdünnten und glühenden Gasen auftreten. Die Gase verhalten sich zwar in elektromagnetischer Beziehung einfacher als alle dichteren Stoffe, weil vier von den acht spezifischen Konstanten a und b aller Gase unmerklich klein sind, und zwar ist:

$$a_2 = 0, \quad a_3 = 0, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 0, \tag{73}$$

während in dichteren Stoffen oft a_3 und b_2 merklich von Null verschieden sind.

Daß in verdünnten Gasen dennoch eigentümliche Strahlungen, insbesondere die Kathoden- und Kanalstrahlen auftreten, wird nach meiner Theorie dadurch erklärt, daß die verdünnten Gase schon durch kleine Energieänderungen (Wärmeänderungen, chemische Änderungen) große Eigenschaftsänderungen erfahren. Insbesondere sind die Schwingungen der Leitfähigkeiten γ und ξ, welche wohl direkt von den chemischen und Temperaturänderungen des Mediums abhängen, in durchstrahlten verdünnten Gasen, wenn auch immer noch äußerst klein, so doch in ihren Wirkungen sehr merklich, obwohl die Gase im normalen Zustande keine Leitfähigkeit haben. Aber auch die Schwingungen der dielektrischen und diamagnetischen Dyade ε und μ, welche zufolge der Ungleichförmigkeit des elektrischen Strahlungsfeldes auftreten, bewirken einen Teil des merkwürdigen Verhaltens dieser Strahlen. Dichtere Medien können durch die Strahlung nicht in ebenso starke chemische und Temperaturschwingungen versetzt werden, der großen Kapazität ihrer Volumseinheit für diese Energien wegen, und insoferne verhalten sich hinwieder diese Medien einfacher als die verdünnten Gase.

Von allen dichten Medien lassen die Metalle am besten longitudinale elektrische Strahlen hindurch, weil bei diesen, ihrer großen Leitfähigkeit wegen, schon geringe chemische und Temperaturschwingungen verhältnismäßig große Schwingungen der Leitfähigkeit nach sich ziehen. Diese Strahlen in dichten Medien, besonders in Metallen, sollen weiter unten in § 80 näher betrachtet werden. Hier beschränken wir uns auf die Untersuchung des Verhaltens der verdünnten Gase.

38. Für diese nehmen die elektrischen Amplitudengleichungen (67, 1) und (67, 2) unter Berücksichtigung von (73) die einfache Form an:

$$\left(\varepsilon_0 + \frac{c_0^2}{\mu_0}(1-\varkappa^2)\mathfrak{n}\times\mathfrak{n}\right)\cdot\mathfrak{e}_1 + 2\frac{c_0^2}{\mu_0}\varkappa\mathfrak{n}\times\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{e}_2 + \\ + a_1(\varphi\mathfrak{e}_0\cdot\mathfrak{e}_1 + \varphi'\mathfrak{e}_0\cdot\mathfrak{e}_2)\mathfrak{n} + \\ + b_3(w\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{e}_1 + w'\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{e}_2)\mathfrak{n}\times\mathfrak{m}_0 \overset{3}{=} 0. \qquad (74, 1)$$

$$\left(\varepsilon_0 + \frac{c_0^2}{\mu_0}(1-\varkappa^2)\mathfrak{n}\times\mathfrak{n}\right)\cdot\mathfrak{e}_2 - 2\frac{c_0^2}{\mu_0}\varkappa\mathfrak{n}\times\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{e}_1 + \\ + a_1(\varphi\mathfrak{e}_0\cdot\mathfrak{e}_2 - \varphi'\mathfrak{e}_0\cdot\mathfrak{e}_1)\mathfrak{n} + \\ + b_3(w\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{e}_2 - w'\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{e}_1)\mathfrak{n}\times\mathfrak{m}_0 \overset{3}{=} 0. \qquad (74, 2)$$

Hierin ist nach (56), (57) und (49):

$$\varphi = \varepsilon_0\frac{1-rs-\varkappa(s+r)}{2(1+r^2)}, \qquad (75)$$

$$\varphi' = \varepsilon_0\frac{r+s+\varkappa(1-rs)}{2(1+r^2)}, \qquad (76)$$

worin:

$$r = +\frac{\tau}{2\pi}a_4\ldots \qquad s = +\frac{\tau}{\pi}p. \qquad (77)$$

39. Zunächst mögen die nach diesen Gleichungen möglichen elektrischen Longitudinalstrahlen betrachtet werden, von welchen gezeigt werden kann, daß sie sämtliche Eigenschaften der Kathodenstrahlen, beziehungsweise Kanalstrahlen haben.

In einem Longitudinalstrahle ist:

$$\mathfrak{n} \times \mathfrak{e}_1 \overset{3}{=} 0, \qquad \mathfrak{e}_2 \overset{3}{=} 0.$$

Ferner setzen wir zunächst voraus, daß:

$$\mathfrak{m}_0 \overset{3}{=} 0,$$

daß also keine starke statische magnetische Kraft vorhanden ist. Die Gleichungen (74) reduzieren sich dann auf:

$$\varepsilon_0 \cdot \mathfrak{e}_1 + \varphi a_1 \mathfrak{e}_0 \cdot \mathfrak{e}_1 \mathfrak{n} \overset{3}{=} 0, \tag{78, 1}$$

$$\varphi' a_1 \mathfrak{e}_0 \cdot \mathfrak{e}_1 \mathfrak{n} \overset{3}{=} 0. \tag{78, 2}$$

40. Die Gleichung (78, 2) kann nur dadurch erfüllt werden, daß:

$$\varphi' = 0. \tag{79}$$

Wir wollen zunächst die Bedeutung dieser für Longitudinalstrahlen charakteristischen Bedingung klarlegen.

Nach (48, 2) ist:

$$\mathfrak{e}_2 \overset{9}{=} -f' a_1 \mathfrak{n}\,;\mathfrak{e}_1.$$

Nach (52, 1) ist:

$$\gamma_1 \overset{9}{=} p f a_1 \mathfrak{n}\,;\mathfrak{e}_1.$$

Es ist also nach (79) und (57):

$$\frac{\pi}{\tau} \varepsilon_2 - \gamma_1 \overset{9}{=} 0. \tag{80}$$

Dies bedeutet, daß der den elektrischen Schwingungen gleichphasige Anteil des Stromes $\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \gamma\right) \cdot \mathfrak{e}_0$ stets Null ist, daß also in Longitudinalstrahlen kein Strom, auch nicht der elektrische Verschiebungsstrom $\varepsilon_0 \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial t}$, mit den elektrischen Schwingungen gleichphasig ist.

Die Bedingung (79) bestimmt die Dämpfung der Longitudinalstrahlen. Es ist nach (79) und (76):

$$\varkappa = \frac{s+r}{rs-1}. \tag{81}$$

Setzt man diesen Wert der Dämpfung in (49) ein, so ergeben sich die für die Amplituden der stofflichen Variablen bestimmenden Werte:

$$f = \frac{\varepsilon_0}{1-rs}, \quad f' = -\frac{\varepsilon_0 s}{1-rs}.$$

Die Dämpfungskonstante ist nur für die Strahlen extrem großer und extrem kleiner Schwingungsdauer sehr klein und wir werden der Einfachheit wegen meist nur die Eigenschaften dieser zwei extremen Strahlengruppen berechnen und hieraus auf die Eigenschaften der Strahlen mittlerer Schwingungsdauer schließen. Die Werte r und s sind nämlich nach (77) beide der Schwingungsdauer proportional, die Materialkonstanten a_4 und p sind nach § 43 und 37 groß. Die Dämpfung ist klein, wenn die Schwingungsdauer so groß ist, daß r und s weit größer als 1 sind, sie ist aber auch wieder klein, wenn die Schwingungsdauer so klein ist, daß r und s gegen 1 verschwinden. Die Dämpfung ist unendlich groß für jene Schwingungsdauer, für welche $rs = 1$, und sie ist sehr bedeutend für die mittleren Schwingungsdauern, für welche weder 1 gegen rs noch rs gegen 1 verschwindet. Wir werden die Eigenschaften der Strahlen extremer Schwingungsdauern getrennt untersuchen und mit den Strahlen großer Schwingungsdauer beginnen.

41. Ersetzen wir in (78, 1) $\mathfrak{e}_1$ durch die gleichgerichtete Wellengeschwindigkeit $\mathfrak{c}$, so ergibt sich:

$$\mathfrak{c} \stackrel{3}{=} -\varepsilon_0^{-1} \cdot \varphi a_1 \bar{\mathfrak{e}}_0, \tag{82}$$

worin:

$$\bar{\mathfrak{e}}_0 \stackrel{3}{=} \mathfrak{e}_0 \cdot \mathfrak{c}\,\mathfrak{n}$$

die Projektion von $\mathfrak{e}_0$ auf $\mathfrak{c}$, also jene Komponente der Feldstärke $\mathfrak{e}_0$ ist, welche in die Wellennormale fällt.

Nach (75) und (81) folgt:

$$\varepsilon_0^{-1} \cdot \varphi = \frac{1+s^2}{2(1-rs)}. \tag{83}$$

Für die sehr langsam schwingenden Longitudinalstrahlen verschwindet 1 gegen s^2 und rs. Diese haben die Fortpflanzungsgeschwindigkeit:

$$\mathfrak{c} \doteq + \frac{s}{2r} a_1 \bar{\mathfrak{e}}_0 \doteq \frac{p}{a_4} a_1 \bar{\mathfrak{e}}_0. \tag{84}$$

Hingegen verschwindet für die sehr rasch schwingenden Longitudinalstrahlen s^2 und rs gegen 1, und diese haben also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit:

$$\mathfrak{c} \doteq - \frac{1}{2} a_1 \bar{\mathfrak{e}}_0. \tag{85}$$

Es liegt nun nahe, die eine dieser Strahlengruppen als die Kathodenstrahlen, die andere Strahlengruppe als die Kanal- und Anodenstrahlen anzusehen. Da letztere sich in Bezug auf das elektrostatische Feld $\mathfrak{e}_0$ in umgekehrter Richtung fortpflanzen als erstere, so muß a_4 und p gleiches Vorzeichen haben.

Die Grenze zwischen Kathodenstrahlen einerseits und Kanalstrahlen, beziehungsweise Anodenstrahlen andrerseits liegt bei der durch

$$rs = 1 \quad \text{oder} \quad \tau^2 = \frac{2\pi^2}{pa_4}$$

bestimmten Schwingungsdauer. Die Longitudinalstrahlen dieser Schwingungsdauer haben unendliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit und unendliche Dämpfung $\varkappa$ pro Wellenlänge, aber immer noch endliche Dämpfung pro Längeneinheit. Die auf beiden Seiten benachbarten Strahlen mittlerer Schwingungsdauer haben also sehr große Fortpflanzungsgeschwindigkeit, aber mäßige Dämpfung pro Längeneinheit.

8. Fortpflanzung, Dämpfung und Lumineszenz der Kathodenstrahlen.

42. Die Kathodenstrahlen haben viel größere Schwingungsdauer als das Licht. Meine Interferenzversuche[1] wurden ausgeführt mit Kathodenstrahlen, welche durch langsame Oszillationen in verzweigten Drahtsystemen angeregt wurden und die Schwingungsdauer 10^{-8} bis 10^{-9} Sekunden hatten. Ihre Wellenlänge betrug einige Zentimeter.

Die nach Lenard durch ultraviolettes Licht oder nach Wehnelt durch glühendes Bariumoxyd angeregten Kathodenstrahlen müssen ebenfalls weit größere Schwingungsdauer als das Licht haben. Diese Anregung ist keineswegs ein rein elektromagnetischer Vorgang, wie die Anregung durch der Kathode zugeleitete Drahtwellen, welche tatsächlich einfach die elektromagnetischen Grenzbedingungen für das Auftreten der longitudinalen elektrischen Strahlen liefern. Wahrscheinlich regt das ultraviolette Licht oder die Glut eine sehr langsame (chemische) Schwingung in dem Kathodenmaterial an, welche ihrerseits die Kathodenstrahlen direkt anregt, aber auch das Fluoreszenzlicht, beziehungsweise Glutlicht exzitiert, welches die Kathode gleichzeitig aussendet und dessen Exzitationsperiode tatsächlich weit größer ist als die Schwingungsdauer des Lichtes.[2]

43. Die Konstante a_4 ist im hohen Vakuum sehr groß, bei mäßiger Verdünnung aber weit kleiner. Man erkennt dies daraus, daß in hohem Vakuum ungleichförmige elektrostatische Felder sehr wohl bestehen können, wenn auch ein eigentümlicher Einfluß magnetischer Felder auf diesen Ruhezustand bemerkt worden ist und auch die schließlich eintretende Entladung diesem Ruhezustand ein Ende macht. Während desselben ist das Vakuum nicht merklich elektrisch doppelbrechend, also kann ε nicht weit von dem Ruhewert ε_0

---

[1] Diese Sitzungsber., Bd. CVII (1898), im Auszuge mitgeteilt Wied. Ann., Bd. 67, p. 741.

[2] Zur Kenntnis des Ablaufes der Lichtemission; diese Sitzungsber., Bd. CIII (1894). Wied. Ann., Bd. 53, p. 832.

abweichen, woraus nach *(E)*, § 29, folgt, daß a_4 sehr groß sein muß. Es gibt aber allerdings einen mäßigen Verdünnungsgrad, bei welchem statische ungleichförmige Felder wenig beständig sind, was man am besten an der Selbststreckung der Kathodenstrahlen (vergl. § 6) erkennt. In wenig verdünnten Gasen können sich also auch Ladungen nicht halten. So muß sich aber nach *(E)* ein Medium verhalten, in welchem a_4 sehr klein ist und doch ε nicht viel von ε_0 abweichen kann. In höherem Vakuum ist aber a_4 sehr groß und da die Schwingungsdauer τ der Kathodenstrahlen nicht übermäßig klein ist, so ist anzunehmen, daß r eine sehr große Zahl ist.

Die Dämpfung der Kathodenstrahlen ist nach (81), da wir 1 gegen rs vernachlässigen dürfen:

$$\varkappa = \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{2\pi}{\tau}\left(\frac{1}{a_4} + \frac{1}{2p}\right). \tag{86}$$

Die Dämpfung hängt also von der Natur des Gases, insbesondere von dem Verdünnungsgrade ab. Ferner ist die Dämpfung der Schwingungsdauer verkehrt proportional. Ich halte es für sicherstehend, daß die Kathodenstrahlen, welche sich in einem starken elektrostatischen Felde $\mathfrak{e}_0$ fortpflanzen, während des Fortschreitens fortwährend an Energiegehalt zunehmen. Sie treten mit vielleicht sehr geringer Amplitude $\mathfrak{e}_1$ aus der Kathode aus, werden aber, indem sie das Kathodengefälle durchlaufen, immer intensiver und treten mit größerer Amplitude aus dem Kathodengefälle in das schwache kathodenferne Feld, als sie beim Austritt aus der Kathode hatten. Da also ihre Amplitude in ihrer Fortpflanzungsrichtung nicht abnimmt, sondern vielmehr zunimmt, so muß ihre Dämpfungskonstante negativ sein. Es muß also angenommen werden, daß a_4 und p, welche nach § 41 gleiches Vorzeichen haben müssen, beide negativ sind.

Die Emission eines Strahles ist der zur Absorption entgegengesetzte Vorgang. Sind Strahlen irgend welcher Art einmal ausgesendet und pflanzen sich im indifferenten Medium fort, so sind sie selbstverständlich positiv gedämpft, sie werden allmählich absorbiert. Innerhalb des emittierenden Mediums dürften sie im Gegenteile negativ gedämpft, d. i. mit stets

zunehmender Amplitude verlaufen und hiebei die Energie, die sie dann zufolge ihrer Aussendung dem emittierenden Körper entführen, während ihres kurzen Laufes innerhalb dieses Körpers aufsammeln.

Jedenfalls befinden sich die Kathodenstrahlen nach meiner Theorie innerhalb des Kathodengefälles in diesem Zustande der Emission oder negativen Dämpfung. Im sehr schwachen elektrischen Felde, für welches unsere Rechnung nicht gilt, sind sie aber selbstverständlich positiv gedämpft.

44. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\mathfrak{c}$ der Kathodenstrahlen ist nach (84):

$$\mathfrak{c} \doteq + \frac{s}{2r} a_1 \bar{\mathfrak{e}}_0 \doteq \frac{p}{a_4} a_1 \bar{\mathfrak{e}}_0 . \tag{87}$$

Diese Strahlen pflanzen sich erfahrungsgemäß nur in spitzem Winkel zu der negativen elektrostatischen Feldstärke fort. Sie müssen aber nicht gerade von der Kathode ausgehen, sondern können auch von der Glaswand, welche der Anode gegenüberliegt, zu dieser gehen, wenn die exzitierenden elektrischen Schwingungen heftig genug sind.[1]

Die charakteristische, vom Felde abhängige Fortpflanzungsart der Kathodenstrahlen, welcher sie auch ihren Namen verdanken, wird durch (87) richtig dargestellt. Die Wellengeschwindigkeit $\mathfrak{c}$ der Longitudinalstrahlen meiner Theorie hängt von der ersten Potenz der Feldstärke $\mathfrak{e}_0$ ab, kehrt sich also um, wenn diese umgekehrt wird. Da beobachtungsgemäß die Projektion $\bar{\mathfrak{e}}_0$ der Feldstärke auf die Fortpflanzungsrichtung $\mathfrak{c}$ entgegengesetzte Richtung hat wie diese, muß nach (87) a_1 eine negative Konstante sein.

Nach jeder einen stumpfen Winkel mit $\mathfrak{e}_0$ bildenden Richtung pflanzen sich die Kathodenstrahlen als reine elektrische Longitudinalstrahlen fort, die elektrischen und magnetischen Transversalschwingungen, welche die elektrischen Longitudinalschwingungen begleiten, sind von höherer Ordnung als diese klein gegen die statische Feldstärke.

---

[1] Wied. Ann., Bd. 64, p. 277.

45. Die blaue Lumineszenz der verdünnten Luft scheint mir ein wichtiges Kriterium der Amplitude der Schwingungen der stofflichen Variablen in dem Kathodenstrahle zu sein. Als Ursache der blauen Lumineszenz möchte ich die chemischen Schwingungen bezeichnen, welche nach § 5 die elektrischen Schwingungen des Strahles begleiten und welche das viel rascher schwingende blaue Lumineszenzlicht exzitieren.

Ein Maß dieser chemischen Schwingungen sind die Schwingungen der Leitfähigkeit γ, vorausgesetzt, daß keine starken Temperaturschwingungen in dem Strahle vorkommen. Die Stärke des blauen Lumineszenzlichtes, welches den Weg des Strahles erkennen läßt, ist also gleichzeitig ein Maß für die Amplitude der Schwingungen der Leitfähigkeit in demselben.

Hiedurch lassen sich die ganz bestimmten Angaben meiner Theorie über die Abhängigkeit dieser Amplitude von der Feldstärke, den Verdünnungsgrad und der Schwingungsdauer kontrollieren.

Diese Amplituden sind nach (52), (49) und (81), (82) allgemein für elektrische Longitudinalstrahlen:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_1 &\stackrel{\mathfrak{g}}{=} -\frac{2\varepsilon_0 p}{1+s^2}\,\frac{1}{\bar{\mathfrak{e}}_0}\,;\,\mathfrak{e}_1 = -\frac{\varepsilon_0 p a_1}{sr-1}\,\mathfrak{n};\mathfrak{e}_1,\\ \gamma_2 &\stackrel{\mathfrak{g}}{=} +\frac{2\varepsilon_0 p s}{1+s^2}\,\frac{1}{\bar{\mathfrak{e}}_0}\,;\,\mathfrak{e}_1 = +\frac{\varepsilon_0 p a_1 s}{sr-1}\,\mathfrak{n};\mathfrak{e}_1, \end{aligned}\right\} \qquad (88)$$

also speziell für Kathodenstrahlen, d. i. für Longitudinalstrahlen großer Schwingungsdauer:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_1 &\stackrel{\mathfrak{g}}{=} -\frac{2\varepsilon_0 \pi^2}{\tau^2 p}\,\frac{1}{\bar{\mathfrak{e}}_0}\,;\,\mathfrak{e}_1 = -\frac{2\varepsilon_0 \pi^2 a_1}{\tau^2 a_4}\,\mathfrak{n};\mathfrak{e}_1,\\ \gamma_2 &\stackrel{\mathfrak{g}}{=} +\frac{2\varepsilon_0 \pi}{\tau}\,\frac{1}{\bar{\mathfrak{e}}_0}\,;\,\mathfrak{e}_1 = +\frac{2\varepsilon_0 \pi p}{\tau a_4}\,\mathfrak{n};\mathfrak{e}_1. \end{aligned}\right\} \qquad (89)$$

Diese Amplituden und damit die blaue Lumineszenz wachsen natürlich mit der elektrischen Amplitude $\mathfrak{e}_1$ und schon aus diesem Grunde wird die blaue Lumineszenz nicht in

unmittelbarer Nähe der Kathode am stärksten sein, sondern mit der Entfernung von der Kathode zunehmen, so lange der Strahl negativ gedämpft ist und erst im schwachen, kathodenfernen Felde, wo der Strahl positiv gedämpft ist, wieder abnehmen. Hiezu kommt aber noch, daß die Amplitude der Schwingungen der Leitfähigkeit der Feldstärke $\mathfrak{e}_0$ verkehrt proportional ist, so daß deshalb in der Nähe der Kathode, wo die Feldstärke größer ist, die blaue Lumineszenz umso geringer sein wird. Die Lumineszenz wird in mäßiger Entfernung von der Kathode ein Maximum erreichen und im weiteren Verlaufe des Strahles wieder abnehmen, wie dies tatsächlich, insbesondere bei mäßiger Verdünnung stets zu beobachten ist. Die Ausbildung des scharf gegen das blaue Kathodenlicht begrenzten Kathodendunkelraumes wird in § 53 und § 54 erklärt werden.

Da die Feldstärke sowie das Entladungspotential bei mäßiger Verdünnung viel kleiner ist, so wird die blaue Lumineszenz der Kathodenstrahlen bei gleicher Amplitude bei mäßiger Verdünnung sehr stark, im hohen Vakuum aber sehr gering sein, wie dies ebenfalls den Tatsachen völlig entspricht.

Cet. par. lumineszieren die Kathodenstrahlen großer Wellenlänge schwächer als die rascher schwingenden Strahlen.

Über die Fortpflanzung elektrischer Longitudinalstrahlen im unelektrischen Felde vergleiche § 50. Nach der nichtlinearen Form der für diesen allgemeineren Fall geltenden Gleichungen muß man schließen, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser Strahlen nicht allein durch Materialkonstante des Mediums bestimmt wird, sondern von den Amplituden der Variablen des Strahles abhängt. Nach § 35 bestimmt aber jedenfalls das Verhältnis der Amplituden ε_1 und $\mathfrak{e}_1$ oder γ_1 und $\mathfrak{e}_1$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Strahles.

Trifft ein in einem starken elektrostatischen Felde fortschreitender Kathodenstrahl ein Lenard'sches Fenster, d. i. eine dünne Platinfolie, welche das starke Feld von einem unelektrischen Felde trennt, so müssen, wenn man von der Reflexion des Strahles oder von dem Fenster ausgehenden sekundären Strahlen absieht, die Amplituden des durch das Fenster tretenden

Strahles fast genau dieselben Werte haben wie die Amplituden des einfallenden Strahles.

Es hat also der durch das Fenster ausgetretene Strahl in seinem weiteren Verlauf in dem unelektrischen Felde jene Geschwindigkeit, welche der einfallende Strahl in dem starken Felde hatte und welche der Feldstärke dieses Feldes proportional ist. Hieraus erklären sich auch die Versuche von Des Coudres und Lenard, nach welchem durch eine longitudinale elektrostatische Kraft dem Kathodenstrahl eine höhere Geschwindigkeit erteilt wird.

Auch durch die scharfe Trennungsschicht, welche das starke Kathodengefälle von dem oft fast unelektrischen kathodenfernen Felde trennt, tritt also, wenn man von sekundären, von der Grenzschicht ausgehenden Strahlungen absieht, der Strahl ohne Geschwindigkeitsänderung, verläuft also im ganzen kathodenfernen Felde ungefähr mit jener Geschwindigkeit, welche er im Kathodengefälle hatte.

9. Energieinhalt und mechanische Wirkungen der Kathodenstrahlen.

46. Wenn in einem statischen Felde von der endlichen Stärke $\mathfrak{e}_0$ zufolge einer schwachen Strahlung die kleinen Änderungen:

$$\mathfrak{e} - \mathfrak{e}_0 \overset{s}{=} \mathfrak{e}', \qquad \mathfrak{s} - \mathfrak{s}_0 \overset{s}{=} \mathfrak{s}'$$

der Feldvariablen auftreten, so erfährt der Energieinhalt E der Volumseinheit Änderungen, welche von derselben Größenordnung klein sind. Diese Energieänderungen erster Ordnung können wir aber außer acht lassen, da uns hauptsächlich der mittlere Energieinhalt einer Wellenlänge der Strahlen interessiert und die Energieänderungen erster Ordnung in jeder geradzahligen halben Wellenlänge umgekehrtes Vorzeichen haben als in den ungeradzahligen, sich also in wenig gedämpften Wellen im Mittel völlig aufheben.

Der mittlere Energiegehalt der Strahlung E_m bestimmt sich also ausschließlich durch jenen Teil E' der Energieänderungen des Feldes, welcher von zweiter Ordnung klein ist, und in

einem Longitudinalstrahl, der keine magnetischen Schwingungen mitführt, den Wert hat:

$$E' = \frac{1}{2}\mathfrak{e}' \cdot \varepsilon_0 \cdot \mathfrak{e}' + \mathfrak{e}_0 \cdot \mathfrak{s}' \cdot \mathfrak{e}'. \tag{90}$$

Beziehen wir uns auf den Querschnitt $\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{r} = 0$ des Strahles, so ist:

$$\mathfrak{e}' \overset{s}{=} \mathfrak{e}_1 \sin\alpha, \qquad \mathfrak{s}' \overset{s}{=} \mathfrak{s}_1 \sin\alpha + \mathfrak{s}_2 \cos\alpha, \qquad \alpha = \frac{2\pi}{\tau} t.$$

Der mittlere Energieinhalt der Strahlung pro Volumseinheit ist:

$$E_m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} E' d\alpha.$$

Bei der Integration ist zu berücksichtigen, daß

$$\int_0^{2\pi} \sin\alpha \cos\alpha \, d\alpha = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\alpha \, d\alpha = \int_0^{2\pi} \cos^2\alpha \, d\alpha = \pi.$$

Es haben also die um eine Viertelwellenlänge gegen die elektrischen Schwingungen verschobenen Schwingungen der dielektrischen Dyade mit der Amplitude $\mathfrak{s}_2$ überhaupt keinen Einfluß und man erhält:

$$E_m = \frac{1}{4}\varepsilon_0 \mathfrak{e}_1^2 + \frac{1}{2}\mathfrak{e}_0 \cdot \mathfrak{s}_1 \cdot \mathfrak{e}_1. \tag{91}$$

Nach (48) und § 40 ist:

$$\mathfrak{s}_1 \overset{s}{=} -\varepsilon_0 \frac{1}{s\nu - 1} a_1 \mathfrak{n}; \mathfrak{e}_1.$$

Der mittlere Energieinhalt elektrischer Longitudinalstrahlen ist also:

$$E_m = \frac{1}{4}\varepsilon_0 \left(1 - 2 a_1 \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{e}_0 \frac{1}{s\nu - 1}\right) \mathfrak{e}_1^2. \tag{92}$$

Da (sr) für die langsam schwingenden Kathodenstrahlen insbesondere im höheren Vakuum sehr große Werte hat, ist ε_1 verschwindend klein und es ist der mittlere Energieinhalt der Kathodenstrahlen:

$$E_m = \frac{1}{4}\varepsilon_0 \mathfrak{e}_1^2. \tag{93}$$

47. Mechanische Wirkungen der Longitudinalstrahlen. Sämtliche ponderomotorischen Wirkungen im elektromagnetischen Felde werden auch nach meiner Theorie bestimmt durch die Maxwell'sche Spannungsdyade Θ, welche bei Abwesenheit magnetischer Kräfte den Wert:

$$\Theta \triangleq \frac{1}{2}\varepsilon \cdot \mathfrak{e}; \mathfrak{e} + \frac{1}{2}\varepsilon \cdot \mathfrak{e} \times \mathfrak{e}$$

hat. Die Kraft pro Volumseinheit, welche das Medium erfährt, ist gleich dem derivierten Vektor $\nabla \cdot \Theta$, die Flächenkraft, welche an einer das Feld begrenzenden Fläche $\mathfrak{f}$ wirkt, ist gleich $\Theta \cdot \mathfrak{f}$, wobei $\mathfrak{f}$ stets von der Oberfläche des die Flächenkraft erfahrenden Körpers nach außen positiv zu zählen ist.

Die mechanischen Wirkungen der Strahlen werden durch den Mittelwert des variablen Teiles der Spannungsdyade bestimmt, welcher sich wieder ausschließlich durch jenen Teil der Spannungsdyade bestimmt, welcher von zweiter Ordnung klein ist und sich ebenso berechnet wie der mittlere Energieinhalt, nur daß hier dyadische Produkte der elektrischen Vektoren auftreten. Der Mittelwert der Spannungsdyade ist für einen beliebigen Querschnitt eines Longitudinalstrahles:

$$\Theta_m \triangleq \frac{1}{4} e^{-\frac{4\pi}{\tau} \varkappa \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{r}} (\varepsilon_0 \mathfrak{e}_1; \mathfrak{e}_1 + \varepsilon_0 \mathfrak{e}_1 \times \mathfrak{e}_1 + \varepsilon_1 \cdot \mathfrak{e}_0; \mathfrak{e}_1 + \varepsilon_1 \cdot \mathfrak{e}_1; \mathfrak{e}_0 + \\ + \varepsilon_1 \cdot \mathfrak{e}_0 \times \mathfrak{e}_1 + \varepsilon_1 \cdot \mathfrak{e}_1 \times \mathfrak{e}_0). \tag{94}$$

Die mittlere Kraft, welche die Volumseinheit des durchstrahlten Mediums erfährt, ist gleich dem derivierten Vektor $\nabla \cdot \Theta_m$ der mittleren Spannungsdyade, welchen man nach § 34 so bildet, daß man Θ_m mit $\mathfrak{n}$ multipliziert und nach $\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{r}$ differenziert. In einem ungedämpften Longitudinalstrahl erfährt das

Medium keine Kraft, in einem gedämpften Strahl erfährt es im Querschnitte $\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{r} = 0$ die Kraft pro Volumseinheit:

$$\nabla \cdot \Theta_m \overset{s}{=} -\frac{\pi}{\tau} \varkappa \mathfrak{n} \cdot (\varepsilon_0 \mathfrak{e}_1 ; \mathfrak{e}_1 + 2\varepsilon_1 \cdot \mathfrak{e}_1 ; \mathfrak{e}_0 + \\ + 2\varepsilon_1 \cdot \mathfrak{e}_0 ; \mathfrak{e}_1 - 2\varepsilon_1 \mathfrak{e}_0 \cdot \mathfrak{e}_1). \quad (95)$$

In einem Kathodenstrahle, in welchem nach § 46 die gleichphasigen Schwingungen von ε verschwindend kleine Amplitude ε_1 haben, erfährt also das Medium die Kraft:

$$\nabla \cdot \Theta_m \overset{s}{=} -\frac{\pi}{\tau} \varepsilon_0 \varkappa \mathfrak{n} \mathfrak{e}_1^2. \quad (96)$$

Da die Dämpfung $\varkappa$ des Strahles innerhalb des Kathodengefälles negativ, darüber hinaus aber positiv ist, so wird das Medium im Kathodendunkelraum in der Richtung des Strahles angetrieben, außerhalb desselben aber in der umgekehrten Richtung mit einer Kraft angetrieben, welche die Größenordnung 10^{-8} bis 10^{-6} Dyne pro Kubikzentimeter haben mag. Da aber die Dichte des verdünnten Gases 10^{-9} bis 10^{-7} g/cm^3 ist, so erfährt dasselbe Beschleunigungen von 10^{-1} bis 10^{+3} cm/sec^2. Jedoch auch die Gegenströmung des verdünnten Gases in dem kathodenfernen Teile des Strahles muß sich unter Umständen in bedeutender Stärke etablieren. In der Tat kann man in einem Kathodenstrahl, welcher die bestrahlte Glaswand hinreichend erhitzt, spektroskopisch das Auftreten der Natriumlinie nachweisen, was sich nur so erklären läßt, daß eine Strömung des verdünnten Gases von der bestrahlten Glasfläche innerhalb des Kathodenstrahles und entgegengesetzt zu seiner Fortpflanzungsrichtung stattfindet.

48. Die Flächenkraft, welche ein Kathodenstrahl auf eine Fläche $\mathfrak{f}$, auf welche er auffällt, ausübt, ist:

$$\Theta_m \cdot \mathfrak{f} \overset{s}{=} \frac{1}{4} \varepsilon_0 (\mathfrak{e}_1 (\mathfrak{f} \cdot \mathfrak{e}_1) - \mathfrak{e}_1 \times (\mathfrak{f} \times \mathfrak{e}_1)).$$

Diese Kraft liegt in der Einfallsebene des Strahles und ist dem Quadrate der Amplitude $\mathfrak{e}_1$ proportional. Die erste Komponente der Kraft ist gegeben durch die Projektion des Flächenvektors $\mathfrak{f}$ auf die Strahlrichtung, stellt also einen Zug dar, den

der Strahl auf die Fläche ausübt und der auf 10^{-8} bis 10^{-6} Dyne pro Quadratzentimeter geschätzt werden kann. Die zweite Komponente wird bestimmt durch die negative Projektion des Flächenvektors auf die Wellenebene und stellt einen Strahlungsdruck dar.

Ein senkrecht auf eine Fläche auffallender Kathodenstrahl übt also nicht einen Druck, sondern einen Zug auf die Fläche aus, der allerdings unmeßbar klein ist. Der sehr große, von Crookes entdeckte scheinbare Strahlungsdruck der Kathodenstrahlen beruht bekanntlich nicht auf elektromagnetischen, sondern auf radiometrischen Wirkungen, welche wohl hauptsächlich auf die starke Wärmewirkung der Strahlen zurückzuführen sind, und läßt sich nach Stark durch geeignete Anordnung des Versuches selbst bei starken Kathodenstrahlen bis auf 10^{-4} Dyne pro Quadratzentimeter herabsetzen. Leider verhindert diese radiometrische Nebenwirkung die Messung des theoretisch sehr wichtigen Strahlungszuges. Seine Konstatierung wäre nicht nur ein Entscheidungsexperiment der Undulationstheorie gegen die Emissionstheorie der Kathodenstrahlen, sondern seine Messung würde auch die Amplitude des Strahles und damit mittelbar eine der Konstanten $a_1 a_4 p$ bestimmen.

10. Transversalschwingungen an der Mantelfläche begrenzter Longitudinalstrahlen.

49. Transversale elektromagnetische Strahlen üben bekanntlich einen Druck auf eine Fläche aus, welche sie senkrecht treffen, und einen Zug auf eine Fläche, welche sie streifen. Ein Teil des zu erwartenden Strahlungszuges, welchen die elektrischen Longitudinalstrahlen bei senkrechter Inzidenz ausüben, könnte auch verdeckt werden durch den Druck, welchen die transversalen Komponenten der elektrischen und magnetischen Schwingungen, die an den Oberflächen von Longitudinalstrahlen begrenzten Querschnittes auftreten müssen, auf die bestrahlte Fläche ausüben.

Die Kathodenstrahlen werfen Schatten und können durch Diaphragmen als scharf begrenzte Strahlenbündel treten. In

der Nähe der Mantelfläche dieser Strahlen nimmt die Amplitude der longitudinalen elektrischen Schwingung radial nach außen zu ab. Dort ist also:

$$\text{rot}\,\mathfrak{e} \neq 0;$$

es ist notwendig ein elektrischer Wirbel vorhanden, welcher den Strahl peripher umkreist. Nach der Grundgleichung *(B)*, § 29, müssen also dort starke magnetische Kräfte $\mathfrak{m}$ auftreten, welche ebenso wie rot $\mathfrak{e}$ in peripherer Richtung die Strahlachse umkreisen und mit der Schwingungsdauer des Strahles oszillieren. Hiedurch werden aber die Verhältnisse an der Strahloberfläche kompliziert und es bleibt dort auch die elektrische Schwingung nicht rein longitudinal. Die genauere Berechnung dieser Transversalkomponenten habe ich nicht durchgeführt.

Viel wichtiger ist es, den axialen Teil des Longitudinalstrahles genauer, als dies bisher geschehen ist, zu untersuchen. Da die magnetischen Kraftlinien kreisförmig die Strahlachse umschließen, ist auch:

$$\text{rot}\,\mathfrak{m} \neq 0,$$

d. h. die Stromdichte nicht Null, sondern hat longitudinale Richtung. Mindestens die Ränder des Strahles haben also die Eigenschaft, eine bestrahlte Fläche zu laden und wieder zu entladen, was abwechselnd in jeder halben Schwingungsdauer stattfinden, also im Mittel nicht merkbar sein dürfte. Die Ränder eines abklingenden Strahles, d. h. eines durch eine gedämpfte Schwingung exzitierten Strahles, müßten aber eine auch im Integral merkbare ladende Wirkung haben.

Damit kann man sich aber nicht begnügen, denn auch der axiale Teil eines Kathodenstrahles hat erfahrungsgemäß eine charakteristische ladende Wirkung. Nun ist es aber ganz wohl möglich, daß auch im axialen Teile des Strahles diese für die Ränder nachgewiesenen Stromschwingungen vorhanden sind, allerdings können sie höchstens von zweiter Größenordnung klein sein, denn bis auf Größen dieser Ordnung haben wir die exakt gültigen Grundgleichungen *(A)* und *(B)*, § 29, bereits integriert und keine magnetische Stromdichte rot $\mathfrak{m}$ in elektrischen Longitudinalstrahlen vorgefunden. Es würde aber auch völlig ausreichen, wenn in der Achse des Strahlen Strom-

schwingungen von dieser Größenordnung stattfinden, denn die ladende Wirkung der Strahlen ist tatsächlich (ebenso wie die Wärmewirkung und die mechanischen Wirkungen derselben) von zweiter Ordnung klein, dem Quadrate der Amplitude proportional. Es schien mir anfänglich schon als ein erstrebenswerter Erfolg der Theorie, wenn es überhaupt gelingen würde, Stromschwingungen in der Achse der Longitudinalstrahlen nachzuweisen, denn wenn auch die ladende Wirkung dieser Stromschwingungen auf die bestrahlte Fläche für ungedämpfte Strahlen sich im Mittel wohl aufheben würde, so wäre dann doch die ladende Wirkung abklingender Kathodenstrahlen erklärt. In dieser Hoffnung begann ich die Rechnung und der Erfolg ging über alle Erwartungen hinaus.

50. Da es sich um die Berechnung einer Größe handelt, welche von zweiter Ordnung klein ist, können wir uns nicht länger auf die nur in erster Annäherung gültigen Gleichungen *(A')* und *(B')*, § 32, beziehen, sondern müssen die Integration der Grundgleichungen *(A)* und *(B)*, § 29, ohne Vernachlässigung der Größen zweiter Ordnung versuchen. Die allgemeine Integration dieser Gleichungen ist wohl auch erreichbar. Sie sind zwar nicht linear in den abhängigen Variablen, aber linear in den unabhängigen Variablen (der Fortpflanzungsrichtung und der Zeit), gestatten also die Anwendung der Ampère-Riemann'schen Integrationsmethode. Insbesondere wäre auch die nur so durchführbare Berechnung der elektrischen Longitudinalstrahlen in unelektrischen und schwachen elektrischen Feldern, welche offenbar auch möglich sind, von großem Interesse. Für das vorliegende theoretisch wichtigere und mathematisch einfachere Problem ist aber die Durchführung dieser schwierigen Rechnung entbehrlich.

Es handelt sich nur um die Integration dieser nicht linearen Gleichungen für den axialen Teil eines Longitudinalstrahles mit Berücksichtigung der Größen, welche von zweiter Ordnung klein sind, aber unter Vernachlässigung der Größen, welche von dritter Ordnung klein sind.

Zu letzteren gehört aber glücklicherweise auch der magnetische Vektor $\mathfrak{m}$ selbst, obgleich es sich gerade um die Berechnung seines Rotors rot $\mathfrak{m}$ handelt.

51. Wir betrachten wie bisher einen elektrischen Longitudinalstrahl von endlichem Querschnitt, welcher gleichförmig ist, d. h. dessen elektrische Amplitude im ganzen Querschnitte mit erster Annäherung konstant und longitudinal ist. Doch muß diese Amplitude radial nach außen proportional dem Quadrate des Radius abnehmen um Beträge, welche von zweiter Ordnung unendlich klein sind. Auch elektrische Transversalkomponenten können auftreten, diese werden radiale Richtung haben und mit der Entfernung von der Achse des Strahles zunehmen, bleiben aber ebenfalls von zweiter Ordnung klein. Der elektrische Wirbel, welcher hiedurch gegeben ist, umkreist die Strahlachse, ist der Entfernung von der Achse gerade proportional und von zweiter Ordnung unendlich klein.

Nach der Grundgleichung *(B)* müssen also in diesem Strahle magnetische Schwingungen $\mathfrak{m}$ vorhanden sein, welche diesem elektrischen Wirbel rot $\mathfrak{e}$ proportional und gleichgerichtet sind, also wie dieser in peripherer Richtung die Achse umkreisen und dem Abstande von derselben gerade proportional sind. Der magnetische Wirbel hat dann longitudinale Richtung und im ganzen Querschnitte konstante Größe. Der ganze Querschnitt des elektrischen Longitudinalstrahles ist also von longitudinalen Stromschwingungen rot $\mathfrak{m}$ erfüllt, deren Größe bis auf Größen dritter Ordnung von der Entfernung von der Achse unabhängig ist.

Es genügt deshalb, diese Stromschwingungen in unmittelbarer Nähe der Achse genau zu berechnen. Da der elektrische Wirbel dem Abstande von der Achse proportional und in größerer Entfernung von derselben immer noch von zweiter Ordnung klein ist, so ist er in unmittelbarer Nähe der Achse von dritter Ordnung unendlich klein. Das gleiche gilt also auch für die magnetischen Schwingungen $\mathfrak{m}$ in dem betrachteten, unendlich dünnen, axialen Strahlbündel. Alle Glieder der Gleichung *(B)* sind sonach verschwindend klein und diese braucht also nicht berücksichtigt zu werden. Selbstverständlich liegt darin kein Widerspruch, daß in dem dünnen Strahlbündel $\mathfrak{m}$ von dritter Ordnung klein, rot $\mathfrak{m}$ aber wie in dem ganzen Strahl von zweiter Ordnung klein ist, da sich nach dem Stokes'schen

Satze rot $\mathfrak{m}$ zu $\mathfrak{m}$ wie der Umfang zu dem Querschnitte des unendlich dünnen Bündels verhält.

Da in diesem die elektrischen Schwingungen bis auf Größen dritter Ordnung konstant sind, bestimmen sich die Schwingungen der stofflichen Variablen ε und γ nach den linearen Grundgleichungen *(C)* und *(E)* oder *(C')* und *(E')* bis auf Größen dritter Ordnung sowie bisher durch die Amplitudengleichungen (48) und (52), welche allerdings nur für gedämpfte, aber nicht abklingende Strahlen berechnet wurden. Wir haben es aber auch nicht nötig, abklingende Strahlen zu betrachten.

Es sind also alle Grundgleichungen erfüllt bis auf *(A)*, welche Gleichung wir auf folgende Form bringen:

$$[\mathfrak{e}_0+\varepsilon']\cdot\frac{\partial \mathfrak{e}'}{\partial t}+\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \varepsilon'}{\partial t}+\gamma\right)\cdot(\mathfrak{e}_0+\mathfrak{e}')\overset{3}{=}c_0\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{m}, \qquad (97)$$

worin die Variablen:

$$\mathfrak{e}'\overset{3}{=}\mathfrak{e}-\mathfrak{e}_0, \qquad \varepsilon'\overset{9}{=}\varepsilon-\varepsilon_0, \qquad \gamma,$$

d. h. die Schwingungen des elektrischen Vektors, der dielektrischen Dyade und der Leitfähigkeit bekannt sind.

Aus dieser Gleichung bestimmt sich also die gesuchte Stromdichte rot $\mathfrak{m}$, womit das Problem gelöst ist, weil die so für das unendlich dünne axiale Strahlbündel berechnete Stromdichte in dem ganzen endlichen Querschnitte des elektrischen Longitudinalstrahles denselben Wert hat.

11. Ladende Wirkung der elektrischen Longitudinalstrahlen.

52. Aus Gleichung (97) ersieht man, daß, wenn sich nicht etwa die Glieder zweiter Ordnung auf der linken Seite bei der Mittelbildung ganz wegheben, auch ein konstanter, nicht abklingender, ja sogar ein ungedämpfter Longitudinalstrahl ladende Wirkung haben muß.

Wenn wir unser durch (46), (48) und (52) bestimmtes Integral in Gleichung (97) einsetzen, so heben sich die Glieder erster Ordnung weg und es bleibt:

$$c_0\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{m}\overset{3}{=}\varepsilon'\cdot\frac{\partial \mathfrak{e}'}{\partial t}+\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \varepsilon'}{\partial t}+\gamma\right)\cdot\mathfrak{e}'. \qquad (98)$$

Hierin ist für den Querschnitt $\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{r} = 0$:

$$\mathfrak{e}' \overset{3}{=} \mathfrak{e}_1 \sin\alpha,$$
$$\varepsilon' \overset{9}{=} \varepsilon_1 \sin\alpha + \varepsilon_2 \cos\alpha, \qquad \alpha = \frac{2\pi}{\tau} t$$
$$\gamma \overset{9}{=} \gamma_1 \sin\alpha + \gamma_2 \cos\alpha.$$

Setzt man dies in (98) ein, so ergibt sich:

$$c_0 \operatorname{rot} \mathfrak{m} \overset{3}{=} \left(\frac{\pi}{2\tau}\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\gamma_1\right)\cdot\mathfrak{e}_1 + \left(\frac{3\pi}{2\tau}\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\gamma_2\right)\cdot\mathfrak{e}_1 \sin 2\alpha + \\ + \left(\frac{3\pi}{2\tau}\varepsilon_2 - \frac{1}{2}\gamma_1\right)\cdot\mathfrak{e}_1 \cos 2\alpha. \quad (99)$$

Die longitudinale Stromdichte $\operatorname{rot}\mathfrak{m}$ führt also Schwingungen von der doppelten Schwingungsdauer als die übrigen Variablen des Strahles aus. Diese Stromschwingungen sind aber unwichtig, da sie wechselnde Ladungen, also im Integral keine Ladung bewirken.

Außer diesen Schwingungen hat die Stromdichte $\operatorname{rot}\mathfrak{m}$ in einem elektrischen Longitudinalstrahl noch den von der Zeit unabhängigen Anteil $\mathfrak{L}$:

$$\mathfrak{L} \overset{3}{=} \left(\frac{\pi}{2\tau}\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\gamma_1\right)\cdot\mathfrak{e}_1. \quad (100)$$

Ein elektrischer Longitudinalstrahl wird also notwendig von einem konstanten Strome begleitet und hat deshalb entsprechende ladende Wirkung. Die Stromdichte hat unabhängig vom Abstande von der Achse des Strahles in dessen endlichem Querschnitte nach § 51 überall denselben Wert, vorausgesetzt, daß auch die elektrische Amplitude desselben im ganzen Querschnitte konstant ist.

Der Strahl geht von der strahlenden Fläche bis zu der bestrahlten Fläche und ebenso der den Strahl begleitende magnetische Wirbel. Dieser muß aber bekanntlich aus geometrischen Gründen geschlossen sein, der den Strahl begleitende Strom muß also durch gewöhnliche Leitungs- oder Verschiebungsströme geschlossen sein, welche von der bestrahlten

Fläche zur strahlenden Fläche meist weit außerhalb des Strahlweges zurückführen. Die beiden Flächen werden also entweder durch den Longitudinalstrahl entgegengesetzt geladen und ihre Ladung nimmt proportional der Zeit zu, oder wenn sie teilweise leitend verbunden sind, so tritt in dem Schließungsdraht der entsprechende Leitungsstrom auf.

Nach (80) ist aber:

$$\frac{\pi}{\tau}\varepsilon_2 \overset{\mathfrak{H}}{=} \gamma_1,$$

so daß sich das Gesetz des Ladungsstromes, welcher alle elektrischen Longitudinalstrahlen begleitet, auch in der einfacheren Form darstellen läßt:

$$\mathfrak{L} \overset{\mathfrak{H}}{=} \frac{\pi}{\tau}\varepsilon_2 \cdot \mathfrak{e}_1 \overset{\mathfrak{H}}{=} \gamma_1 \cdot \mathfrak{e}_1. \tag{101}$$

Jener Teil des Verschiebungsstromes, welcher herrührt von den elektrischen Schwingungen $\mathfrak{e}_1$ und den um eine Viertelwellenlänge verschobenen Schwingungen der dielektrischen Dyade, welche die Amplitude ε_2 haben, hat in aufeinanderfolgenden halben Wellenlängen, da er das Produkt zweier gleichphasiger Schwingungen ist, gleiches Vorzeichen, er hat den maximalen Wert $\frac{2\pi}{\tau}\varepsilon_2 \cdot \mathfrak{e}_1$, also den Mittelwert $\frac{\pi}{\tau}\varepsilon_2 \cdot \mathfrak{e}_1$. Dieser Verschiebungsstrom bestimmt also den ganzen Ladungsstrom, welcher den Kathodenstrahl begleitet. Derselbe ist übrigens nach (101) gerade doppelt so groß als der Mittelwert des Leitungsstromes $\frac{1}{2}\gamma_1 \cdot \mathfrak{e}_1$.

Nach (88) erhält man für allgemeine Longitudinalstrahlen:

$$\mathfrak{L} \overset{\mathfrak{H}}{=} \frac{\varepsilon_0 p a_1}{1 - sr}\mathfrak{e}_1^2 \mathfrak{u} \overset{\mathfrak{H}}{=} -\frac{2\varepsilon_0 p}{1+s^2}\frac{1}{\bar{\mathfrak{e}}_0}\mathfrak{e}_1^2 \tag{102}$$

und nach (89) speziell für Kathodenstrahlen:

$$\mathfrak{L} \overset{\mathfrak{H}}{=} -\frac{2\pi^2\varepsilon_0 a_1}{\tau^2 a_4}\mathfrak{e}_1^2 \mathfrak{u} \overset{\mathfrak{H}}{=} -\frac{2\pi^2\varepsilon_0}{\tau^2 p}\frac{1}{\bar{\mathfrak{e}}_0}\mathfrak{e}_1^2. \tag{103}$$

Der Ladungsstrom der Kathodenstrahlen hat also die gleiche Richtung wie die elektrostatische Feldstärke $\mathfrak{e}_0$ und somit die entgegengesetzte Richtung wie die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Strahles. Jene Fläche, auf welche der Strahl auffällt, wird negativ geladen.

Ferner ist derselbe desto größer, je kleiner die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser Strahlen ist, übrigens dem Quadrate der Amplitude $\mathfrak{e}_1$ der elektrischen Schwingungen proportional und bei Kathodenstrahlen kleiner Wellenlänge ausgiebiger als bei langsamer schwingenden Kathodenstrahlen.

Dies ist ein großer Erfolg der Undulationstheorie der Kathodenstrahlen. Gerade die ladende Wirkung der Kathodenstrahlen schien vielen Physikern zu Gunsten der Elektronentheorie zu entscheiden. W. Wien sagt 1897:[1] »Wenn die Kathodenstrahlen Vorgänge im Äther sind, können sie keine Ladung erzeugen, denn welcher Art man sich diese Zustände auch denken möge, so haben wir doch an der allgemeinen Anschauung festzuhalten, daß das elektrische Quantum nur in Verbindung mit einem ponderablen Träger vorkommen kann und daß es nicht durch Vorgänge im Äther erzeugt oder vernichtet werden kann«. Was hier als nach der allgemeinen Anschauung undenkbar bezeichnet ist, hat meine Theorie geleistet.

53. Das Kathodengefälle. Da wir nun die ladende Wirkung der Kathodenstrahlen kennen, so kann versucht werden, die Ausbildung des starken Potentialgefälles an der Kathode, welches doch nur eine Folge der ladenden Wirkung der Kathodenstrahlen sein kann, zu berechnen.

Wenn die Kathode negativ geladen ist, ohne daß noch durch zugeleitete Drahtwellen Kathodenstrahlen angeregt werden, so ist ihr statisches Feld, weil die Kraftlinien desselben meist ein wenig divergieren werden, in der Nähe der Kathode ein wenig stärker als in größerer Entfernung von derselben. Wenn man nun Kathodenstrahlen anregt, so verlaufen dieselben in der Nähe der Kathode in einem etwas stärkeren Feld

[1] Verhandl. d. phys. Ges. zu Berlin, 1897, p. 165.

und führen also nach (103) einen schwächeren Ladungsstrom mit sich. In größerer Entfernung von der Kathode finden sie ein schwächeres Feld und führen deshalb einen stärkeren Ladungsstrom mit sich.

Dieser Unterschied des Kathodenraumes und des kathodenfernen Feldes wird anfänglich sehr klein sein, aber er muß sich mit Notwendigkeit bei längerer Dauer der Strahlung bis ins Extreme verstärken.

Der Ladungsstrom hat negative Richtung, d. h. er transportiert in der Strahlrichtung negative Ladung. Da er in der Nähe der Kathode etwas schwächer ist als in größerer Entfernung, so muß sich die mittlere Schicht des Mediums positiv laden. Dies verstärkt aber den Unterschied der statischen Feldstärke ϵ_0 vor und hinter der positiven Schicht. Im Kathodenraum entsteht ein stärkeres Potentialgefälle, im kathodenfernen Feld ein schwächeres Potentialgefälle. Damit wird der Ladungsstrom im Kathodenraume noch schwächer, im kathodenfernen Strahle noch stärker, so daß sich die positive Mittelschicht rasch weiter ladet, was den Unterschied stets weiter verstärkt.

Eine Grenze wird diesem Prozesse bei andauernder Strahlung erst gesetzt, wenn die positive Mittelschicht so stark geladen ist, daß zufolge mangelhafter Isolation derselben sich Leitungs- oder Entladungsströme ausbilden, welche der aufladenden Wirkung der Kathodenstrahlen schließlich stationär das Gleichgewicht halten. Kommt diese sekundäre Ableitung nicht in Betracht, so erreicht dieser Prozeß erst ein Ende, wenn die Feldstärke in dem kathodenfernen Felde so sehr gesunken ist, daß sie nicht mehr gegen die Amplitude ϵ_1 des Kathodenstrahles sehr groß ist. Dann gelten die Voraussetzungen unserer Rechnung nicht mehr. Der Kathodenstrahl tritt dann beim Passieren der positiv geladenen, scharf entwickelten Grenzschicht plötzlich aus einem starken elektrostatischen Feld in ein sehr schwaches oder ganz unelektrisches Feld. Dieser Fall wurde in § 46 erörtert. Der Strahl tritt ohne große Geschwindigkeitsänderung und ohne Änderung seiner Amplituden γ_1 und ϵ_1, oder doch ohne Änderung seines mitgeführten Ladungsstromes $\gamma_1 \cdot \epsilon_1$ durch die Grenzschicht, ohne sie weiterhin beträchtlich aufzuladen oder zu erwärmen.

Das starke Potentialgefälle im Kathodenraum und das sich unmittelbar anschließende sehr schwache Potentialgefälle im kathodenfernen Felde, welche sonach befriedigend erklärt sind, bilden einen verläßlichen Beweis, daß die ladende Wirkung der Kathodenstrahlen, so wie es Gleichung (103) verlangt, desto stärker ist, je schwächer das elektrostatische Feld ist, vorausgesetzt, daß letzteres immer noch viel größer ist als die Amplitude $\mathfrak{e}_1$ des Strahles.

54. Der Kathodendunkelraum. Nach § 45 muß die Lumineszenz des durchstrahlten Gases desto stärker sein, je größer die Schwingungen der Leitfähigkeit cet. par. sind, denn aus der Größe dieser Schwingungen kann man auf die Größe der sie verursachenden chemischen Schwingungen schließen, welche das blaue Lumineszenzlicht exzitieren.

Beide Amplituden γ_1 und γ_2 der Schwingungen der Leitfähigkeit γ sind aber nach (89) der Feldstärke verkehrt proportional.

In demselben Kathodenstrahl (also bei gegebener Amplitude $\mathfrak{e}_1$ und Schwingungsdauer) wird also die blaue Lumineszenz sehr verschieden sein je nach der Stärke des elektrostatischen Feldes, welches er durchstrahlt. In dem Kathodenraume wird der Strahl der bedeutenden Stärke des Feldes $\mathfrak{e}_0$, d. i. des Potentialgefälles wegen nur sehr wenig lumineszieren, der Kathodenraum bleibt dunkel, obgleich er offenbar ebenso intensiv durchstrahlt ist als das kathodenferne Feld.

Beim Passieren der scharf entwickelten, positiv geladenen Grenzschicht kommt der Strahl plötzlich in das schwache kathodenferne Feld, muß also plötzlich von da ab stark blau lumineszieren. Hiemit ist erklärt, daß sich das blaue Kathodenlicht auf das kathodenferne Feld beschränkt und scharf von dem Kathodendunkelraum, welcher gleichzeitig der Raum des starken Kathodengefälles ist, getrennt ist.

12. Energiefluß, Strahlrichtung und Wärmewirkung der Longitudinalstrahlen.

55. In elektrischen Longitudinalstrahlen, deren Amplitude im ganzen Querschnitt einigermaßen konstant ist, kommen keine magnetischen Schwingungen vor, welche von gleicher

Größenordnung mit den elektrischen Schwingungen wären, stets vorausgesetzt, daß kein starkes magnetisches Feld $\mathfrak{m}_0$ vorhanden ist. Es ist also kein Poynting'scher Energiefluß vorhanden und der Energiefluß dieser Strahlen ist ausschließlich durch jenen Teil des elektromagnetischen Energieflusses bestimmt, welchen wir in § 11 als Wärmestrom bezeichnet haben, dessen Divergenz aber nur in kalten Metallen stets Wärmeproduktion, in chemisch leicht veränderlichen Medien aber auch chemische Energieänderungen bestimmt.

Die Größe des Energieflusses wird durch Gleichung (8), § 11, bestimmt. Der mittlere Energiefluß $\mathfrak{s}_m$ der Longitudinalstrahlen ist:

$$\mathfrak{s}_m \stackrel{s}{=} E_m \mathfrak{c} \stackrel{s}{=} \frac{1}{4} \varepsilon_0 \mathfrak{e}_1^2 \mathfrak{c} \tag{104}$$

oder

$$\mathfrak{s}_m = \frac{1}{4} \frac{\varepsilon_0 p a_1}{a_4} \mathfrak{e}_1^2 \bar{\mathfrak{e}}_0 . \tag{105}$$

Der mittlere Energiefluß ist gleich der auf die Zeit- und Querschnittseinheit des Strahles bezogenen Wärmemenge (in mechanischem Maße), welche ein bestrahlter Körper gewinnt, so daß wir auch über die Wärmewirkung der Longitudinalstrahlen unterrichtet sind.

Über die Richtung des Energieflusses sind wir aber hiedurch nicht unterrichtet und diese ist sehr wichtig, weil sie die Strahlrichtung bestimmt, die insbesondere, wenn der Longitudinalstrahl schief gegen die elektrostatische Feldstärke $\mathfrak{e}_0$ fortschreitet, nicht mit der longitudinalen Richtung, d. i. die Richtung der Wellennormalen zusammenfallen müßte. Dies kann durchaus nicht anders entschieden werden, als indem das Nahewirkungsgesetz aufgefunden wird, welches den Energiefluß unabhängig als Funktion der Feldvariablen bestimmt. Dieses Gesetz haben wir in Gleichung (25), § 23, ausgesprochen und wollen es nun prüfen. Dasselbe lautet:

$$\nabla \cdot \nabla, \mathfrak{s}_1 \stackrel{s}{=} k \frac{\partial^3}{\partial t^3} (\gamma \cdot \mathfrak{e}). \tag{106}$$

Nun ist durch diese Differentialgleichung allerdings der Energiefluß $\mathfrak{s}_1$ nicht völlig bestimmt, wohl aber sein Mittelwert $\mathfrak{s}_m$ im Strahle, auf welchen es allein ankommt. Wir dürfen deshalb in dieser Gleichung alle Glieder vernachlässigen, welche dem statischen Felde angehören, ferner auch jene, welche von erster Ordnung unendlich klein sind, weil diese im Zeitintegral über die Schwingungsdauer bei einem rein periodischen Strahle sich aufheben, endlich vernachlässigen wir gleich noch alle Glieder, welche von zweiter Ordnung unendlich klein sind, aber sich im Zeitintegral aufheben. Dann können wir setzen:

$$\gamma \cdot \mathfrak{e} \stackrel{s}{=} \gamma_1 \cdot \mathfrak{e}_1 \sin^2 \alpha,$$

$$\mathfrak{s}_1 \stackrel{s}{=} 2\mathfrak{s}_m \sin^2 \alpha \ldots \qquad \nabla \cdot \nabla ; \mathfrak{s}_1 \stackrel{s}{=} -\frac{8\pi^2}{\mathfrak{c}^2 \tau^2} \mathfrak{s}_m \sin^2 \alpha.$$

Der mittlere Energiefluß eines elektrischen Longitudinalstrahles hat also den nach Größe und Richtung völlig bestimmten Wert:

$$\mathfrak{s}_m \stackrel{s}{=} \frac{k}{2} \mathfrak{c}^2 \gamma_1 \cdot \mathfrak{e}_1. \tag{107}$$

Er ist dem Ladungsstrome proportional, welcher nach (101) gleich $\gamma_1 \cdot \mathfrak{e}_1$ ist, hängt aber ferner vom Quadrate der Fortpflanzungsgeschwindigkeit ab.

Die Wärmewirkung der Kathodenstrahlen, welche durch $\mathfrak{s}_m$ bestimmt ist, ist aber erfahrungsgemäß einigermaßen (mit Abweichungen von 5 bis 15%) dem Produkte der Potentialdifferenz des Dunkelraumes und des Ladungsstromes proportional. Würde dies genau gelten, so würde daraus folgen, daß die Wärmewirkung der Kathodenstrahlen beim Auftreffen auf die Glaswand nicht erkauft wird durch eine entsprechende Abkühlung des Kathodendunkelraumes, sondern durch die Stromarbeit, also von außen her, geliefert wird, was ja an sich sehr wahrscheinlich ist.

Da $\mathfrak{c}^2$ in Gleichung (107) ersetzt werden kann durch das Quadrat des Kathodengefälles, so würde folgen, daß die Ausdehnung des Kathodendunkelraumes in der Strahlrichtung dem Kathodengefälle $\bar{\mathfrak{e}}_0$ proportional ist, ein nicht unwahrscheinliches Resultat.

Nicht unwichtig ist, daß die Gleichung (107) mit der auf völlig anderem Wege, nämlich aus (8), § 11, bestimmten Gleichung (105) präzise übereinstimmt, wenn man setzt:

$$\frac{\tau^2}{4\pi^2} = -k\frac{a_1}{a_4}. \tag{108}$$

Es erfüllen also nur jene Kathodenstrahlen die Gleichung (8), welche eine vom jeweiligen Druck abhängende bestimmte Schwingungsdauer haben. Diese sind also wohl zur Strahlbildung besonders geeignet und dürften scharfe Schatten werfen. Daß alle Kathodenstrahlen die Gleichung (8) präzise erfüllen, ist nicht zu erwarten, weil diese Gleichung nur für ungedämpfte Strahlen gilt.

Nun werde ich wohl, ohne einen Einwand fürchten zu müssen, folgenden Satz aufstellen dürfen:

Die Strahlrichtung $\mathfrak{s}_m$ elektrischer Longitudinalstrahlen steht bei Abwesenheit eines starken magnetischen Feldes $\mathfrak{m}_0$ auf der Wellenfläche senkrecht, gleichgültig, welchen Winkel diese mit der elektrostatischen Feldstärke $\mathfrak{e}_0$ einschließt.

13. Die Kanalstrahlen und Anodenstrahlen.

56. Wir kehren nun zu den allgemeinen Gleichungen für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\mathfrak{c}$ und Dämpfung $\varkappa$ der longitudinalen elektrischen Wellen (§ 40) zurück. Es ist nach (82) und (83):

$$\mathfrak{c} = \frac{1+s^2}{2(rs-1)} a_1 \bar{\mathfrak{e}}_0 \tag{109}$$

und nach (81):

$$\varkappa = \frac{s+r}{rs-1}. \tag{110}$$

Die Dämpfungskonstante $\varkappa$ muß, wenn sie positiv ist, eine gegen 1 kleine Zahl sein, wenn die Strahlung als solche leicht erkennbar sein soll und nur solche gut beobachtbare Strahlen ziehen wir in den Kreis unserer Betrachtung.

Die Werte r und s sind der Schwingungsdauer nach (77) proportional:

$$r = \frac{\tau}{2\pi} a_4, \qquad s = \frac{\tau}{\pi} p. \tag{111}$$

Die drei Materialkonstanten a_1, a_4 und p, welche das Verhalten der elektrischen Longitudinalstrahlen im unmagnetischen Felde völlig bestimmen, sind nach dem Verhalten der Kathodenstrahlen, d. i. der langsam schwingenden Longitudinalstrahlen (§ 43, 44 und 52) als sehr große, durchaus negative Werte erkannt worden.

Außer den langsam schwingenden Kathodenstrahlen werden aber auch alle sehr rasch schwingenden Longitudinalstrahlen wenig gedämpft, also leicht beobachtbar sein und die Eigenschaften dieser Strahlen wollen wir nun berechnen.

Für Strahlen hinreichend kleiner Schwingungsdauer τ sind r und s kleine Werte, so daß wir rs gegen 1 vernachlässigen können. Diese Strahlen haben also die Dämpfung:

$$\varkappa = -(s+r). \tag{112}$$

Da r und s negative Zahlen sind, so sind diese Strahlen positiv gedämpft, d. h. ihre Amplitude wird in der Fortpflanzungsrichtung immer kleiner, sie verhalten sich also in dieser Hinsicht ganz normal wie alle Strahlen, ausgenommen die Kathodenstrahlen im Kathodengefälle.

57. Die Wellengeschwindigkeit der rasch schwingenden Longitudinalstrahlen ergibt sich nach (109), wenn wir s^2 gegen 1 vernachlässigen:

$$\mathfrak{c} \doteq -\frac{1}{2} a_1 \bar{\mathfrak{e}}_0. \tag{113}$$

Da a_1 negativ ist, pflanzen sich diese Strahlen stets in der Richtung der positiven Feldstärke $\mathfrak{e}_0$ oder in spitzem Winkel zu derselben fort und müssen deshalb mit den Kanalstrahlen und Anodenstrahlen identifiziert werden.

Die raschschwingenden Longitudinalstrahlen können von der der Kathode gegenüberliegenden Glaswand gegen die

Kathode gehen und (wenn diese durchlöchert ist) durch sie hindurch in das hinter ihr liegende Feld, vorausgesetzt, daß in diesem Felde die Feldstärke dieselbe Richtung hat wie vor der Kathode oder daß hinter der Kathode die Feldstärke sehr klein ist. Die so verlaufenden Strahlen wurden von Goldstein entdeckt und Kanalstrahlen genannt.

Diese raschschwingenden Longitudinalstrahlen können aber auch von der Anode zu der dieser gegenüberliegenden Glaswand gehen, ebenfalls in der Richtung der positiven Feldstärke, und dann nennt man sie Anodenstrahlen. Diese wurden von Gehrcke und Reichenheim[1] in jüngster Zeit entdeckt. Doch hätte ich sicher auch ohne Kenntnis dieser Entdeckung die Möglichkeit dieser Strahlen behauptet.

58. Die ladende Wirkung der raschschwingenden Longitudinalstrahlen bestimmt sich nach (102) durch:

$$\mathfrak{L} \overset{3}{=} \varepsilon_0 p a_1 \mathfrak{e}_1^2 \mathfrak{n} \overset{3}{=} -2\varepsilon_0 p \frac{1}{\mathfrak{e}_0} \mathfrak{e}_1^2. \tag{114}$$

Der Ladungsstrom der Kanal- und Anodenstrahlen hat hienach die gleiche Richtung wie ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit und wie die elektrostatische Feldstärke $\mathfrak{e}_0$. Jene Fläche, auf welche diese Strahlen auffallen, wird positiv geladen. Dies stimmt vortrefflich mit den Tatsachen.

59. Der mittlere Energieinhalt E_m der Kanal- und Kathodenstrahlen ist nach Gleichung (92):

$$E_m = \frac{1}{4}\varepsilon_0(1+2a_1 \mathfrak{n}\cdot\mathfrak{e}_0)\mathfrak{e}_1^2. \tag{115}$$

Nach (113) ist aber:

$$a_1 \mathfrak{n}\cdot\mathfrak{e}_0 = -2,$$

also ergibt sich merkwürdigerweise:

$$E_m = -\frac{3}{4}\varepsilon_0 \mathfrak{e}_1^2. \tag{116}$$

---

[2] Verhandl. d. Deutschen phys. Ges., Bd. VIII, p. 559.

Der Energieinhalt dieser Strahlen ist wesentlich negativ.

Das Energieprinzip fordert nach Gleichung (8), § 11, daß

$$\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{s}_m = E_m. \tag{117}$$

Wenn also der Energieinhalt eines Strahles negativ ist, so muß der Energiefluß $\mathfrak{s}_m$ desselben mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit einen stumpfen Winkel einschließen. Da nach § 55 der Energiefluß sämtlicher Longitudinalstrahlen longitudinal ist, so muß er in den Kanal- und Anodenstrahlen genau entgegengesetzt der Fortpflanzungsgeschwindigkeit sein.

Man kann aber ferner nach (107), also auf ganz anderem Wege, den Energiefluß der Kanal- und Anodenstrahlen direkt berechnen. Derselbe ist nach (107) für Kathodenstrahlen und somit für alle Longitudinalstrahlen von wesentlich entgegengesetzter Richtung als der Ladungsstrom:

$$\mathfrak{s}_m \overset{3}{=} \frac{k}{2} \mathfrak{c}^2 \mathfrak{L}.$$

Nach (114) folgt noch ausführlicher für Kanal- und Anodenstrahlen:

$$\mathfrak{s}_m \overset{3}{=} \frac{k}{2} p a_1 \varepsilon_0 \mathfrak{e}_1^2 \mathfrak{c}.$$

Es muß also:

$$k = -\frac{3}{2pa_1}$$

und es ergibt sich, daß alle Kanalstrahlen, von der größten Schwingungsdauer bis zur Schwingungsdauer Null die Gleichung (8) oder (117) dem Vorzeichen und der Größe nach genau erfüllen, so daß über Vorzeichen und Größe ihres Energieflusses kein Zweifel bestehen kann. Am einfachsten ist es, diesen Schluß auf die Richtung des Ladungsstromes $\mathfrak{L}$ zu gründen. Da dieser in den Kanal- und Anodenstrahlen die Richtung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit hat, so hat der Energiefluß dieser Strahlen wirklich nicht die Richtung des

Strahles, sondern die genau entgegengesetzte, was vom Standpunkte der Strahlungstheorie durchaus zulässig ist.

Jedoch möchte ich daraus schließen, daß die Kanal- und Anodenstrahlen, soweit sie im starken elektrostatischen Felde, also in ihrem Emissionsraume, verlaufen, und dies ist ja die Voraussetzung unserer Rechnung, ebenso wie die Kathodenstrahlen im Kathodengefälle dem Medium Energie entziehen, welche durch äußere Zufuhr ersetzt werden muß. Die Kathodenstrahlen tun dies, obwohl sie positiven Energieinhalt haben, weil sie negativ gedämpft sind (vergl. § 43). Die Kanal- und Anodenstrahlen verhalten sich ebenso, obwohl sie positiv gedämpft sind, weil sie negativen Energieinhalt haben.

Daß letzteres wirklich der Fall ist, kann man sehr anschaulich machen, wenn man die mechanischen Wirkungen dieser Strahlen betrachtet.

60. Die mechanischen Wirkungen bestimmen sich nach § 47 durch die Maxwell'sche Spannungsdyade, welche geradeso wie die Energie sich durch ein Produkt des Vektors $\varepsilon \cdot \mathfrak{e}$ mit dem elektrischen Vektor $\mathfrak{e}$ darstellen läßt (vergl. Gleichung 93). Da der Energieinhalt negativ ist, so hat auch die Spannungsdyade notwendig das umgekehrte Vorzeichen und es müssen also die mechanischen Wirkungen der Kanal- und Anodenstrahlen gerade umgekehrt wie jene der Kathodenstrahlen sein und dieses kann nur dann eintreten, wenn der Energieinhalt negativ ist. Einige dieser mechanischen Wirkungen sind aber deutlich und rein zu beobachten.

Da in den rasch schwingenden Strahlen ε_1 merklich von Null verschieden ist, bestimmt sich die Spannungsdyade nach (94) etwas kompliziert, beschränken wir uns aber auf Kanal- und Anodenstrahlen, welche in der Richtung $\mathfrak{e}_0$ fortschreiten und senkrecht auf eine Fläche fallen, so verhält sich die Kraft, welche sie ausüben, zu jener, welche Kathodenstrahlen ausüben würden, wie die Energieinhalte dieser Strahlen, also wie —3 zu 1. Die Kanalstrahlen müssen also einen verhältnismäßig großen, aber immer noch nicht rein beobachtbaren Druck auf die bestrahlte Fläche ausüben.

Sehr wichtig ist hingegen die mechanische Wirkung auf das durchstrahlte verdünnte Gas.

Die Kraft pro Volumseinheit, welche dieses erfährt, ist nach (95) und (115):

$$\nabla \cdot \Theta_m \overset{3}{=} -\frac{\pi}{\tau} \varepsilon_0 \varkappa \mathfrak{n} \mathfrak{e}_1^2 (1 + 2 a_1 \mathfrak{n}; \mathfrak{e}_0).$$

Also wenn wir z. B. nur Kanal- und Anodenstrahlen betrachten, welche in der Richtung $\mathfrak{e}_0$ fortschreiten:

$$\nabla \cdot \Theta_m \overset{3}{=} +\frac{3\pi}{\tau} \varepsilon_0 \varkappa \mathfrak{n} \mathfrak{e}_1^2.$$

Diese Kraft hat also stets dieselbe Richtung wie die Strahlung und sie erzeugt Beschleunigungen des verdünnten Gases, welche oft größer als $10^5\, cm/\mathrm{sec}^2$ sein dürften. Diese Strahlen werden also von heftigen Strömen des verdünnten Gases begleitet, so daß mitgerissene leuchtende Dämpfe den Dopplereffekt zeigen.

Die Kanal- und Anodenstrahlen erzeugen an sich nach § 54 ebenso wie die Kathodenstrahlen eine Lumineszenz des durchstrahlten Gases. Die Kanalstrahlen, welche von der Glaswand gegen die Kathode gehen, sind aber kaum sichtbar, da auch die Strömung des verdünnten Gases, welche sie begleiten muß, keine leuchtenden Salzdämpfe führt. Dort, wo diese aber auf die Kathode aufprallt, wirbelt sie die Natriumdämpfe auf und es entsteht die gelb leuchtende Schicht an der Kathode. Hat diese ein Loch, so dringen nicht nur die Kanalstrahlen hindurch, sondern auch der sie begleitende Gasstrom, welcher jetzt ziemlich viel Salzdämpfe aufgenommen hat, so daß das schwach blau lumineszierende Kanalstrahlenbündel nun hinter der Kathode eine Strecke weit von einer mattgelben Flamme begleitet wird.

Noch viel günstiger liegen die Verhältnisse bei den Anodenstrahlen. Gehrcke und Reichenheim regen dieselben in der Wehnelt'schen Weise durch glühende Salze an, mit welchen die Anode überzogen ist. Diese kräftigen Anodenstrahlen müssen von einem starken Strome des verdünnten Gases begleitet sein, welcher ebenfalls von der Anode ausgeht und deshalb große Mengen leuchtender Salzdämpfe mitreißt. Tatsächlich beschreiben die Beobachter die Anodenstrahlen als leuchtende

Fackeln, deren Farbe und Spektrum durch das auf der Anode glühende Salz bestimmt wird.

14. Elektrostatische Ablenkung der Kathodenstrahlen und Kanalstrahlen.

61. Es wurde in § 55 nachgewiesen, daß der Energiefluß der elektrischen Longitudinalstrahlen longitudinal ist, d. h. auf der Wellenfläche senkrecht ist, vorausgesetzt, daß kein magnetisches Feld $\mathfrak{m}_0$ vorhanden ist. Eine Richtungsänderung dieses Energieflusses und damit des Strahles kann also nur dadurch zu stande kommen, daß sich die Wellenfläche dreht.

Es sei $\mathfrak{f}$ der Flächenvektor eines kleinen Teiles der Wellenfläche. Dieser Vektor hat dieselbe Richtung wie die Wellengeschwindigkeit $\mathfrak{c}$ in dem betrachteten Punkte des Feldes. Nach einer kleinen Zeit δt hat sich dieses Stück der Wellenfläche um die Strecke $\mathfrak{c}\delta t$ fortgepflanzt und dabei gedreht, so daß jetzt der Flächenvektor den Wert $\mathfrak{f}+\delta\mathfrak{f}$ hat, welcher übrigens bis auf Größen höherer Ordnung sich nur durch seine Richtung von dem ursprünglichen Werte $\mathfrak{f}$ unterscheidet, so daß $\delta\mathfrak{f}$ nahezu senkrecht auf $\mathfrak{f}$ steht. Es dreht sich auch die Wellengeschwindigkeit $\mathfrak{c}$ und die Strahlrichtung mit und die Strahlen, welche die Orthogonaltrajektorien des Systems der Wellenflächen sind, werden im allgemeinen gekrümmt sein.

Wir haben den Krümmungsradius $\mathfrak{r}_1$ des Strahles zu berechnen, welcher durch das betrachtete Flächenelement dringt. Rechnen wir den Krümmungsradius des Strahles von dem Krümmungsmittelpunkt desselben aus positiv, so ist:

$$\frac{1}{\mathfrak{r}_1} \stackrel{s}{=} \frac{1}{\mathfrak{c}\delta t} \times \left(\frac{1}{\mathfrak{f}} \times \delta\mathfrak{f}\right). \tag{118}$$

Die Änderung $\delta\mathfrak{f}$ der Größe und Richtung der Fläche $\mathfrak{f}$ wird durch die Verteilung der Geschwindigkeit $\mathfrak{c}$ ihrer Punkte bestimmt. Nach einem von mir aufgestellten sehr verwendbaren Integralsatze[1] ist:

$$\frac{d\mathfrak{f}}{dt} \stackrel{s}{=} -\mathfrak{f}\cdot\nabla\times\mathfrak{c}$$

[1] Jaumann, Grundlagen der Bewegungslehre. Leipzig 1905, p. 254. — Vergl. auch Ann. d. Phys., Bd. 19 (1906), p. 909.

und somit:

$$\frac{1}{\mathfrak{r}_1} \stackrel{s}{=} \left(\frac{1}{\mathfrak{f}} \times (\mathfrak{f}\cdot\nabla \times \mathfrak{c})\right) \times \mathfrak{n}. \tag{119}$$

Hiemit ist der Krümmungsradius des Strahles bestimmt, denn die Verteilung der Wellengeschwindigkeit $\mathfrak{c}$ ist als Funktion der gegebenen Feldstärke $\mathfrak{e}_0$ und der Richtung der Wellenfläche bekannt. Es ist nach (82) und (83):

$$\mathfrak{c} \stackrel{s}{=} k\bar{\mathfrak{e}}_0, \tag{120}$$

worin:

$$k = \frac{1+s^2}{2(rs-1)}a_1.$$

Diese Beziehung ist allerdings nur abgeleitet worden für ein gleichförmiges Feld $\mathfrak{e}_0$ und für ebene Wellenflächen, aber man darf dieses Resultat ebenfalls auf einen Teil eines ungleichförmigen Feldes übertragen, welcher hinreichend klein ist und für jedes unendlich kleine Flächenelement einer gekrümmten Wellenfläche anwenden.

Wir nehmen der Einfachheit wegen an, daß die Wellenfläche an dem betrachteten Punkte kugelförmig gekrümmt ist, und verlegen den Ursprung der Ortsmessung in ihren Krümmungsmittelpunkt, von welchem aus wir den Ortsvektor $\mathfrak{r}$ zählen. Der Operator ∇ wird definiert durch:

$$\nabla;\mathfrak{r} \stackrel{g}{=} I \quad \text{oder} \quad \nabla\times\mathfrak{r} \stackrel{g}{=} -2I.$$

Mit $\bar{\mathfrak{e}}_0$ haben wir die Projektion von $\mathfrak{e}_0$ auf die Wellennormale $\mathfrak{c}$ bezeichnet. Da es nur auf die Verteilung der Wellengeschwindigkeit $\mathfrak{c}$ in der betrachteten Wellenfläche ankommt, in dieser aber die Vektoren $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{r}$ gleiche Richtung haben, so können wir setzen:

$$\mathfrak{c} \stackrel{s}{=} k(\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{e}_0)\frac{1}{\mathfrak{r}} \tag{121}$$

und wir erhalten:

$$\nabla\times\mathfrak{c} \stackrel{g}{=} k(\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{e}_0)\nabla\times\frac{1}{\mathfrak{r}} + k\nabla(\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{e}_0)\times\frac{1}{\mathfrak{r}}.$$

Nun ist:

$$\nabla(\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{e}_0) \overset{s}{=} \nabla;\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{e}_0+\nabla;\mathfrak{e}_0\cdot\mathfrak{r} \overset{s}{=} \mathfrak{e}_0+\nabla;\mathfrak{e}_0\cdot\mathfrak{r}$$

und:

$$\nabla\times\frac{1}{\mathfrak{r}} \overset{s}{=} -2\frac{1}{\mathfrak{r}};\frac{1}{\mathfrak{r}}.$$

Das mit dieser linearen Dyade behaftete Glied fällt bei der nachherigen rotorischen Multiplikation mit $\frac{1}{\mathfrak{f}}$ ganz weg. Es ist also:

$$\frac{1}{\mathfrak{r}_1} \overset{s}{=} k\left(\frac{1}{\mathfrak{f}}\times\left((\mathfrak{f}\times(\mathfrak{e}_0+\nabla;\mathfrak{e}_0\cdot\mathfrak{r}))\times\frac{1}{\mathfrak{r}}\right)\right)\times\mathfrak{n}$$

und wenn wir uns nun auf die Betrachtung eines Punktes der Wellenfläche beschränken, in welcher diese den Krümmungsradius $\mathfrak{r}_2$ hat, so können wir in (121) $\mathfrak{r}_2$ statt des Ortsvektors $\mathfrak{r}$ setzen und erhalten schließlich:

$$\frac{1}{\mathfrak{r}_1} \overset{s}{=} k\left(\frac{1}{\mathfrak{r}_2}\times(\mathfrak{e}_0+\nabla;\mathfrak{e}_0\cdot\mathfrak{r}_2)\right)\times\mathfrak{n} \qquad (122)$$

oder:

$$\frac{1}{\mathfrak{r}_1} \overset{s}{=} k\left(\frac{1}{\mathfrak{r}_2}\times\mathfrak{e}_0\right)\times\mathfrak{n}+k(\mathfrak{c}\times(\mathfrak{e}_0;\nabla\cdot\mathfrak{n}))\times\mathfrak{n}. \qquad (123)$$

Bei der Umgestaltung des zweiten Gliedes wurde berücksichtigt, daß $\mathfrak{e}_0$ ein Potential hat, also die derivierte Dyade $\mathfrak{e}_0;\nabla$ symmetrisch ist und daß $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{r}_2$ gleiche Richtung haben.

Aus (123) ersieht man, daß die Krümmung $\frac{1}{\mathfrak{r}_1}$ der elektrischen Longitudinalstrahlen abhängt einerseits von der Krümmung $\frac{1}{\mathfrak{r}_2}$ ihrer Wellenfläche, andrerseits von der Ungleichförmigkeit $\mathfrak{e}_0;\nabla$ des elektrostatischen Feldes, in welchem sie fortschreiten, und daß diese beiden Einflüsse voneinander unabhängig sind und sich einfach addieren. Wir können deshalb diese beiden Einflüsse getrennt voneinander betrachten.

Für Kathodenstrahlen hat, da man für diese 1 gegen rs und s^2 vernachlässigen darf, k den negativen Wert:

$$k = \frac{pa_1}{a_4}. \tag{124}$$

Für Kanal- und Anodenstrahlen hat, da man für diese rs und s^2 gegen 1 vernachlässigen darf, k den positiven Wert:

$$k = -\frac{1}{2}a_1. \tag{125}$$

62. Elektrostatische Ablenkungen im gleichförmigen elektrischen Felde. In einem gleichförmigen elektrostatischen Felde ist $\mathfrak{e}_0; \nabla \overset{9}{=} 0$ und der Krümmungsradius $\mathfrak{r}_1$ der Strahllinie bestimmt sich also durch:

$$\frac{1}{\mathfrak{r}_1} \overset{3}{=} k\left(\frac{1}{\mathfrak{r}_2} \times \mathfrak{e}_0\right) \times \mathfrak{n}. \tag{126}$$

Der Krümmungsradius der Strahlen ist also cet. par. dem Krümmungsradius $\mathfrak{r}_2$ der Wellenfläche proportional und wechselt mit diesem das Vorzeichen. Strahlen mit ebenen Wellenflächen werden im gleichförmigen Felde selbstverständlich gerade verlaufen.

Die Strahlen werden ferner desto stärker gekrümmt, je kleiner ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist, denn $\mathfrak{n}$ ist die reziproke Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Ferner ist die Ablenkung der transversalen ablenkenden elektrostatischen Kraft proportional, sie ist nämlich desto stärker, je stärker das elektrostatische Feld $\mathfrak{e}_0$ ist und je größer der Sinus des Winkels zwischen diesem und der Wellennormale ist und wechselt auch mit diesem Winkel das Vorzeichen.

Wir wollen nun die hiedurch bedingten Erscheinungen im einzelnen verfolgen.

63. Krümmung der Randstrahlen eines Kathodenstrahlenbüschels. Wir betrachten die Fortpflanzung eines dünnen Kathodenstrahlenbüschels in der Richtung der negativen Feldstärke. Das Büschel möge aus einer planen oder etwas konvexen Kathode austreten oder ein Lenard'sches Fenster

passiert haben. Jedenfalls sind dann die Wellenflächen von Anfang etwas konvex, ihr Krümmungsradius hat also die Richtung der Wellengeschwindigkeit. Nun wollen wir untersuchen, ob diese anfänglich gegebene geringe Divergenz der Strahlrichtungen dieses Bündels beim Fortschreiten desselben größer oder kleiner wird.

Nach (126) ist:

$$\frac{1}{\mathfrak{r}_1} \underline{\mathfrak{s}} = +k \frac{\mathfrak{n}}{\mathfrak{r}_2} \underline{\mathfrak{e}_0}, \tag{127}$$

worin $\underline{\mathfrak{e}_0}$ die Projektion von $\mathfrak{e}_0$ auf die Wellenfläche ist. Da der axiale Strahl des Bündels in der Richtung $-\mathfrak{e}_0$ fortschreiten möge, ist für ihn $\underline{\mathfrak{e}_0}$ gleich Null und er bleibt also geradlinig. Für alle Randstrahlen des Bündels ist $\underline{\mathfrak{e}_0}$ desto größer, je weiter sie von der Achse abstehen, diese krümmen sich also desto stärker. Die Projektion $\underline{\mathfrak{e}_0}$ hat, da $\mathfrak{e}_0$ nach der konkaven Seite der Wellenfläche gerichtet ist, die Richtung radial nach außen, da aber k bei Kathodenstrahlen nach (124) negativ ist, so hat der Krümmungsradius $\mathfrak{r}_1$ der Randstrahlen die Richtung radial nach innen und die Strahlen sind also nach außen konkav gekrümmt, und zwar desto stärker, je schiefer sie gegen die negative Feldstärke oder die Achse des Bündels verlaufen. Die anfänglich vorhandene kleine Divergenz des Strahlbündels verstärkt sich also beim Fortschreiten desselben immer mehr, das Bündel nimmt immer größeren Querschnitt an und seine Wellenflächen werden immer stärker nach vorne konvex.

Ein von Anfang an schief gegen die negative elektrostatische Kraft fortschreitendes dünnes Kathodenstrahlenbündel krümmt sich ebenfalls nach außen, so daß der Winkel seiner Fortschreitungsrichtung gegen die Richtung $-\mathfrak{e}_0$ immer größer wird, denn nach (127) ist auch der axiale Strahl dieses Bündels nach außen gekrümmt. Der anfänglich kreisrunde Querschnitt des Bündels vergrößert sich beim Fortschreiten und wird in radialer Richtung länglich, weil die am meisten radial nach außen verlaufenden Strahlen am stärksten gekrümmt werden.

Nimmt man aus einem Kathodenstrahlenbündel, das axial symmetrisch in der Richtung der negativen Feldstärke verläuft,

durch einen Schirm den zentralen Teil weg, so verlaufen doch die übrigbleibenden Randstrahlen nach außen konkav. Das gleiche gilt auch für zwei diametral gegenüberliegende Strahlen dieses Büschels, wenn man diese allein bestehen läßt und die anderen Strahlen dieser hohlen Strahlröhre abblendet. Denn immer noch sind beide Strahlen schief und symmetrisch gegen die Feldstärke. Die beiden Strahlen scheinen also sich gegenseitig abzustoßen. Blendet man aber noch den einen derselben ab, so kann die Selbststreckung (vergl. § 6) des übrig bleibenden Strahles zur Geltung kommen. Er ladet die Seite der Glaswand, welche er trifft, stärker negativ, wird abgestoßen und streckt sich. Damit ist die scheinbare Abstoßung zweier Kathodenstrahlen, welche Crookes beschrieben hat, genügend erklärt.

Wenn jedoch das Kathodenstrahlenbüschel von einer Hohlkathode ausgeht, so sind seine Wellenflächen anfänglich konkav. Dann hat die Projektion $\mathfrak{e}_0$ die Richtung radial nach innen, da aber auch der Krümmungsradius der Wellenfläche nun entgegengesetzte Richtung hat wie $\mathfrak{u}$, so ist der Krümmungsradius der Strahlen $\mathfrak{r}_1$ abermals radial nach innen gerichtet, die Strahlen wieder nach außen konkav gekrümmt. Die anfänglich vorhandene starke Konvergenz des Strahlbündels und der Querschnitt desselben verkleinern sich so lange, bis weit außerhalb des Krümmungsmittelpunktes der Hohlkathode die Strahlen parallel geworden sind und das Bündel sich ungemein verschmälert hat. Ist das elektrostatische Feld präzise gleichförmig, so bewahrt das Strahlbündel weiterhin seinen kleinen Querschnitt und seine ebenen Wellenflächen. In Wirklichkeit gelangt es jedoch bald über diesen toten Punkt. Die zentralen Strahlen pflanzen sich spurweise rascher fort, weil doch das Feld in der Achse stets am stärksten sein wird. Damit ist eine spurweise Konvexität der Wellenfläche gegeben, welche sich dann nach obigem rasch verstärkt

Alles dies stimmt trefflich mit der Beobachtung. Die Verschmälerung des Strahlbündels einer Hohlkathode und die federbuschartige sehr bedeutende Krümmung der Randstrahlen desselben nach außen ist bekannt und wurde von mir u. a. mehrfach beschrieben und abgebildet. Diese Erscheinung darf nicht

verwechselt werden mit der Kreuzung von Kathodenstrahlen großer Amplitude im Krümmungsmittelpunkte der Hohlkathode. Diese Strahlen, welche den Crookes'schen Brennpunkt zeigen, dürften auch verhältnismäßig kleine Wellenlängen haben, denn sie werfen scharfe Schatten und sie dürften inkohärent von den verschiedenen Punkten der Kathodenoberfläche exzitiert werden. Die kohärenten Kathodenstrahlen kleiner Amplitude, welche bei nicht allzu niedrigem Drucke durch Zuleitung von Drahtwellen zu der Kathode angeregt werden, verhalten sich in der berechneten Weise, sie kreuzen sich nicht und werfen sehr unscharfe Schatten.

Die schmalste Stelle dieses von einer Hohlkathode ausgehenden Strahlbüschels bildet sehr oft einen langen, dünnen Stiel, welcher den Teil, in welchem die Wellenflächen konkav sind, mit dem entfernteren Teile des Strahlbüschels, in welchem die Wellenflächen konvex sind, verbindet. Dieser Stiel sitzt sogar meistens unmittelbar auf der Kathodenoberfläche auf, so daß also der Teil des Büschels, in welchem die Wellenflächen konkav sind, meist ganz unterdrückt ist. Ich werde deshalb im folgenden nur solche Strahlen betrachten, deren Wellenflächen nach vorne konvex oder eben sind, denn alle Versuche über elektrostatische Ablenkung wurden mit solchen Strahlen gemacht.

64. Elektrostatische Ablenkung divergenter Kathodenstrahlen im gleichförmigen elektrostatischen Felde. Die grundlegenden Versuche, welche die elektrostatische Ablenkbarkeit der Kathodenstrahlen entgegen der damals allgemeinen Überzeugung bewiesen haben, rühren von mir her.[1] Sie nehmen auch in allen anderen Beziehungen gegenüber den späteren bestätigenden Experimenten von J. J. Thomson und W. Wien eine Sonderstellung ein.

Zunächst möchte ich die weitverbreitete und auch von unbefangener Seite ausgesprochene Ansicht widerlegen, als wären meine Versuche nicht völlig rein oder nicht beweiskräftig.

---

[1] Vergl. § 6.

Daß die Strahlen, welche ich abgelenkt habe, echte Kathodenstrahlen sind, kann nicht bestritten werden und wird nicht bestritten.

Daß diese Strahlen bei meinen Experimenten zufolge der Ablenkung gekrümmt werden, wurde von E. Wiedemann ohne triftige Gründe bestritten und dieser unberechtigte Einwand von mir experimentell völlig widerlegt.[1]

Da diese starke Krümmung der Kathodenstrahlen von mir durch Annäherung eines geriebenen Hartgummistabes von außen erzielt wurde und ein geriebener Glasstab die umgekehrte Krümmung bewirkt, so ist dies eine elektrostatische Wirkung auf die Kathodenstrahlen. Meine Experimente sind also beweiskräftig.

Ferner ist das Vorzeichen der elektrostatischen Ablenkung der Kathodenstrahlen, welche ich beobachtet habe, das umgekehrte, wie es aus der Emissions(Elektronen)theorie der Kathodenstrahlen folgt und deshalb bilden meine Experimente einen schlagenden Gegenbeweis gegen diese Theorie.

Begreiflicherweise behaupten also die Elektronentheoretiker, daß meine Versuche einen Fehler haben. Welchen Fehler sie aber haben, hat keiner von ihnen gesagt. Im Gegenteile werde ich sogleich nachweisen, daß meine Versuche weit überzeugender sind als die späteren von Thomson und Wien. Daß erstere der herrschenden Theorie widersprechen, erklärt, aber rechtfertigt es nicht, daß man selbst in historischen Referaten das Verdienst meiner Versuche zu schmälern gesucht hat.

Die elektrostatische Ablenkung der Kathodenstrahlen war bei meinen Versuchen eine vorübergehende Erscheinung. Die Strahlen krümmen sich sofort bei Annäherung des geriebenen Stabes, aber sie strecken sich sehr bald trotz der dauernden Nähe des geriebenen Stabes wieder. Gerade dies beweist die Reinheit meiner Versuche. Es ist eine sekundäre Wirkung vorhanden, welche die elektrostatische Ablenkung der Strahlen stört, nämlich die ladende Wirkung derselben, zufolge deren die Glaswand des Rezipienten sehr bald, aber nicht sogleich, eine solche Ladungsänderung erfährt, daß die

[1] Wied. Ann., Bd. 64 (1898), p. 268.

elektrostatische Wirkung des genäherten Stabes im Innern des Rezipienten aufgehoben wird. Auf diese Erklärung dieser sekundären Wirkung kommt aber nichts an. Sicher steht, daß sie vorhanden ist, denn man kann mit dem Auge ihre Wirkung verfolgen, man sieht, wie die anfängliche Ablenkung des Kathodenstrahles trotz dauernder Nähe des ablenkenden Körpers allmählich zurückgeht. Umso augenscheinlicher ist es, daß die anfängliche Ablenkung des Kathodenstrahles eine reine elektrostatische Wirkung des genäherten geriebenen Stabes auf den Kathodenstrahl ist. Ich fordere die Elektronentheoretiker auf, zum Versuche der Verteidigung ihrer, wie ich glaube, unhaltbaren Theorie bestimmt anzugeben, welche störende Ursache die Richtung der elektrostatischen Krümmung der Kathodenstrahlen bei meinen Versuchen beeinflußt haben könnte.

Von dem Werte der Versuche Thomson's und Wien's bin ich überzeugt und will durchaus kein Bedenken erheben oder andeuten, doch sind dieselben nicht reiner, sondern im Gegenteile weniger vollständig und charakteristisch als meine Versuche. Es handelt sich bei jenen Versuchen um Dauerablenkungen der Strahlen durch innere Elektroden. Dauerablenkungen, und gar solche durch innere Elektroden, lassen aber nicht unterscheiden, was elektrostatische Wirkung und was sekundäre Beeinflussung infolge der Entladungsvorgänge ist. Dauerablenkungen der Kathodenstrahlen durch elektrostatischen Einfluß und durch innere Elektroden wurden ja schon vor 30 Jahren von Goldstein beobachtet und niemand erkannte dieselben als elektrostatische Wirkungen.

Man wird mit Recht darauf hinweisen, daß bei den Goldstein'schen Versuchen die Umkehrung der Ablenkung bei Umkehrung der ablenkenden elektrostatischen Feldstärke nicht aufgewiesen werden kann und daß erst diese Umkehrung den Beweis der elektrostatischen Ursache der Ablenkung der Kathodenstrahlen erbringt. Ganz richtig, aber dieser Beweis rührt ausschließlich von mir her und ist ein Gegenbeweis gegen die Elektronentheorie. Weil man die wahrhaft elektrostatische Natur der Ablenkung an dieser Umkehrung des Ablenkungssinnes erkennt, so sind meine Versuche beweisend. Sollte aber noch eine Nebenwirkung mitspielen, so

müßte dieselbe ebenfalls bei Umkehrung der ablenkenden elektrostatischen Kraft sich umkehren und also müßte nach dem eben aufgestellten Kriterium auch diese Nebenwirkung eine elektrostatische Ablenkung der Kathodenstrahlen sein. Es kann sehr wohl zwei elektrostatische Ursachen der elektrostatischen Ablenkbarkeit der Kathodenstrahlen geben, aber die eine davon muß nach meinen Versuchen den umgekehrten Ablenkungssinn geben, als er aus der Elektronentheorie folgt.

Meine Versuche sind die einzigen, bei welchen die Kathodenstrahlen sich im starken elektrostatischen Felde fortpflanzen und sichtlich stark divergent waren. Auf sie läßt sich also das Resultat unserer bisherigen Rechnung sofort anwenden.

Wir betrachten ein divergentes, in der Richtung $-\mathfrak{e}_0$ fortschreitendes Strahlenbüschel. Der axiale Strahl habe anfänglich genau die Richtung $-\mathfrak{e}_0$, die Randstrahlen krümmen sich nach § 63 federbuschartig nach außen. So beschaffen war das Kathodenstrahlenbüschel, mit welchem ich experimentierte.

Nun fügen wir eine transversale elektrostatische Zusatzkraft $\underline{\mathfrak{e}_0}$ hinzu und berechnen die hiedurch bewirkte Krümmung des axialen Strahles. Da für diesen anfänglich die elektrostatische Kraft des Feldes auf der Wellenfläche senkrecht stand und die ablenkende Zusatzkraft in die Wellenfläche hineinfällt, ist letztere tatsächlich gleich der Projektion $\underline{\mathfrak{e}_0}$ der resultierenden Feldstärke $\mathfrak{e}_0$ auf die Wellenebene gleichzusetzen.

Diese Zusatzkraft denken wir uns, wie dies bei einem Teile meiner Versuche der Fall war, herrührend von der Ladung zweier sehr großer, zueinander paralleler Kondensatorplatten, welche genügende Entfernung voneinander haben, daß das ganze Kathodenstrahlenrohr zwischen ihnen aufgestellt sein kann. Die Zusatzkraft gehört also einem gleichförmigen Felde an. Die ursprünglich vorhandene Feldstärke ist tatsächlich merklich gleichförmig, doch brauchen wir dies nicht vorauszusetzen. Sie hat die geradlinige Richtung des noch unabgelenkten Strahles und wenn sich auch ihre Stärke merklich in ihrer Richtung ändern sollte, so hat dies doch nach dem nächsten Paragraphen präzise keinen Einfluß.

Es gilt also Gleichung (127) genau. Nach (121) ist:

$$k\mathfrak{n} \overset{s}{=} \frac{1}{\mathfrak{r}_2 \cdot \mathfrak{e}_0} \mathfrak{r}_2 .$$

Es läßt sich also Gleichung (127) in der einfachen Form schreiben:

$$\frac{1}{\mathfrak{r}_1} \overset{s}{=} \frac{1}{\mathfrak{r}_2 \cdot \mathfrak{e}_0} \underline{\mathfrak{e}_0} . \tag{128}$$

Es verhält sich die Krümmung $1/\mathfrak{r}_1$ des Strahles zu der Krümmung $1/\mathfrak{r}_2$ der Wellenfläche wie die transversale ablenkende Kraft $\underline{\mathfrak{e}_0}$ zu der ursprünglich vorhandenen longitudinalen Feldstärke $\overline{\mathfrak{e}_0}$.

Da die Feldstärke $\mathfrak{e}_0$ einen stumpfen Winkel mil dem Krümmungsradius $\mathfrak{r}_2$ der Wellenfläche bildet, ist $\mathfrak{r}_2 \cdot \mathfrak{e}_0$ wesentlich negativ und es hat also der Krümmungsradius des abgelenkten Kathodenstrahles stets die entgegengesetzte Richtung wie die ablenkende Kraft $\underline{\mathfrak{e}_0}$. Der Strahl wendet also seine konvexe Seite der positiven ablenkenden Platte zu, er krümmt sich von derselben weg, er wird von ihr scheinbar abgestoßen, wie ich dies tatsächlich beobachtet habe.

Es muß also auch (vorausgesetzt, daß die Ungleichförmigkeit des durch einen dem Rezipienten einfach genäherten geriebenen Stab bewirkten ablenkenden Feldes $\underline{\mathfrak{e}_0}$ nicht etwa stört) ein positiv geladener Stab die Kathodenstrahlen abstoßen, ein negativ geladener Stab dieselben anziehen, wie ich dies beobachtet habe.

Meine Versuche sprechen also für meine Theorie und bilden den Gegenbeweis gegen die Emissionstheorie der Kathodenstrahlen.

Die Versuche von Thomson und Wien wurden unter wesentlich anderen Bedingungen unternommen und sollen weiter unten besprochen werden.

65. Elektrostatische Ablenkung parallelstrahliger Kathodenstrahlen im ungleichförmigen elektrostatischen Felde. Für ein parallelstrahliges Kathodenstrahlenbündel ist $\frac{1}{\mathfrak{r}_2} \overset{s}{=} 0$ und der Krümmungsradius des Strahles bestimmt sich nach (123) durch:

$$\frac{1}{\mathfrak{r}_1} \overset{3}{=} k(\mathfrak{n}\times(\mathfrak{e}_0;\nabla\cdot\mathfrak{c}))\times\mathfrak{n}. \tag{129}$$

Die Ungleichförmigkeit des Feldes bestimmt den Wert der derivierten Dyade $\mathfrak{e}_0;\nabla$ der Feldstärke. Der Vektor:

$$\frac{d\mathfrak{e}_0}{dt} \overset{3}{=} \mathfrak{e}_0;\nabla\cdot\mathfrak{c} \overset{3}{=} (\mathfrak{c}\nabla)\mathfrak{e}_0$$

kann die partielle Derivation des Vektors $\mathfrak{e}_0$ nach dem Vekor $\mathfrak{c}$ genannt werden. Er hat folgende anschauliche Bedeutung. In einem mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\mathfrak{c}$ des Strahles im elektrostatischen Felde bewegten Punkte ändert sich der in demselben jeweils vorhandene vektorische Wert von $\mathfrak{e}_0$ um $d\mathfrak{e}_0$ in der Zeit dt und man bezeichnet $\frac{d\mathfrak{e}_0}{dt}$ als die totale vektorische Fluxion von $\mathfrak{e}_0$ in diesem bewegten Punkte. Diese Fluxion $\mathfrak{e}_0;\nabla\cdot\mathfrak{c}$ bestimmt nach (129) die Krümmung des Strahles.

Bezeichnen wir mit $\frac{d\mathfrak{e}_0}{dt}$ die Projektion dieser Fluxion auf die Wellenfläche, so ist nach (129):

$$\frac{1}{\mathfrak{r}_1} \overset{3}{=} k\mathfrak{n}^2 \frac{d\mathfrak{e}_0}{dt}. \tag{130}$$

Die Krümmung des Strahles ist also wieder cet. par. der ersten Potenz der Fortpflanzungsgeschwindigkeit verkehrt proportional. Die Krümmung des Strahles ist nicht nur dann Null, wenn das Feld gleichförmig ist, sondern auch wenn die Strahlrichtung gerade in eine Hauptrichtung der Dyade $\mathfrak{e}_0;\nabla$ fällt, weil dann $\frac{d\mathfrak{e}_0}{dt}$ auf der Wellenfläche senkrecht steht.

Bei den Versuchen von Thomson und Wien ist das durch das Diaphragma tretende Kathodenstrahlenbündel sichtlich parallelstrahlig. In der Braun'schen Röhre, die allgemein in Verwendung ist, kann man sehen, daß diese Strahlenbündel auf einem sehr langen Wege sich kaum merklich verbreitern.

Gleich nach dem Durchtritte durch das Diaphragma geht der Strahl zwischen zwei parallelen kleinen, innerhalb der

Vakuumröhre befindlichen entgegengesetzt geladenen Platten hindurch, befindet sich also zunächst in einem gleichförmigen elektrostatischen Felde und wird nicht abgelenkt. Sobald er aber die ablenkenden Platten passiert hat, gelangt er in ein transversales Feld von stets abnehmender Stärke. Die Fluxion $\frac{d\mathfrak{e}_0}{dt}$ ist also transversal gerichtet und da die transversale ablenkende Kraft $\mathfrak{e}_0$ von der positiven Seitenplatte weg gerichtet ist und in der Strahlrichtung abnimmt, so ist $\frac{d\mathfrak{e}_0}{dt}$ gegen die positive Platte gerichtet, und da k in (130) negativ ist, so ist der Krümmungsradius des Strahles von der positiven Platte weggerichtet, derselbe verläuft konkav gegen die positive Platte gekrümmt und diese scheint ihn also anzuziehen, wie Thomson und Wien beobachtet haben.

Es besteht aber noch ein wichtiger Unterschied zwischen meinen Versuchen und jenen von Thomson und Wien. Meine Strahlen verlaufen im starken elektrischen Felde ($\mathfrak{e}_0$ ungefähr gleich 500 Volt pro *cm*), hingegen ist in dem Raume hinter dem Lenard'schen Fenster bei dem Wien'schen Versuche überhaupt keine longitudinale elektrostatische Kraft vorhanden. Man hat es also mit dem komplizierten Falle zu tun, in welchem die Grundgleichungen in den abhängigen Variablen nichtlinear sind (vergl. § 50). Sicher kann man nach meiner Theorie annehmen, daß der Strahl, wenn die Platinfolie des Lenard'schen Fensters ungemein dünn wäre und wenig reflektieren würde, mit eben jener Geschwindigkeit, mit denselben Amplituden und mit derselben ladenden Wirkung durch das Fenster treten müßte, mit welcher er aus dem Emissionsfelde vor dem Fenster anlangt. Es scheint mir auch sehr wahrscheinlich, daß die Gleichung (130) für den Krümmungsradius des Strahles, welche die longitudinale Feldstärke gar nicht enthält, auch für diese Strahlen, die mit großer Geschwindigkeit transversal zur elektrostatischen Kraft gehen, gilt. Immerhin befindet man sich hier nicht mehr auf dem Boden der exakten Rechnung wie bei der Deutung meiner Versuche.

66. Elektrostatische Ablenkung der Kanal- und Anodenstrahlen. Für diese Strahlen hat die Konstante k

nach (125) einen positiven Wert und deshalb hat die elektrostatische Krümmung der Kanal- und Anodenstrahlen durch eine transversale ablenkende Kraft das umgekehrte Vorzeichen wie für Kathodenstrahlen, wie dies zuerst von W. Wien konstatiert wurde.

Hingegen hat die Krümmung der Randstrahlen eines Anodenstrahlenbüschels nach Gleichung (127) dasselbe Vorzeichen wie für Kathodenstrahlen, da in dieser Gleichung $\underline{\mathfrak{e}_0}$ nicht die transversale ablenkende Kraft, sondern die Projektion der Feldstärke auf die Wellenfläche ist. Da die Anodenstrahlen im spitzen Winkel gegen die Feldstärke fortschreiten, hat $\underline{\mathfrak{e}_0}$ in (127) umgekehrtes Vorzeichen als für Kathodenstrahlen und da auch k umgekehrtes Vorzeichen hat, so muß sich auch die Divergenz der Strahlen eines im starken elektrischen Felde fortschreitenden Anodenstrahlenbüschels fortschreitend vergrößern, die Randstrahlen verlaufen federbuschartig nach außen konkav gekrümmt.

Stark divergente Anodenstrahlen im starken elektrostatischen Felde sollen, wenn sie sehr kleine Amplitude haben, nach meiner Theorie von einem von außen genäherten geriebenen Hartgummistab abgestoßen, von einem Glasstab angezogen werden, denn in Gleichung (128) hat $\mathfrak{r}_2 \cdot \mathfrak{e}_0$ das umgekehrte Vorzeichen wie für Kathodenstrahlen.

15. Longitudinale Strahlen in starken magnetischen Feldern.

67. Wir kehren nun zu den allgemeinen, für verdünnte Gase geltenden elektrischen Amplitudengleichungen (74) zurück und betrachten die Strahlung in einem Felde, in welchem außer den elektrostatischen Kräften $\mathfrak{e}_0$ auch starke statische magnetische Kräfte $\mathfrak{m}_0$ gegeben sind. Dann sind longitudinale Strahlungen streng genommen nicht möglich, sondern jede im wesentlichen longitudinale Strahlung in diesem Felde weist, wenn auch verhältnismäßig kleine, so doch merkliche transversale elektrische und magnetische Schwingungen auf. Die überwiegende Größe der longitudinalen Schwingungen bietet aber einen Rechenvorteil, wir können die longitudinalen und transversalen Schwingungen getrennt berechnen, was so geschehen kann, daß man die Gleichungen (74, 1) und (74, 2)

einerseits mit $\mathfrak{c}\cdot$ skalar, andrerseits mit $\mathfrak{c}\times$ rotorisch multipliziert. So erhält man die vier Gleichungen:

$$\varepsilon_0 \mathfrak{c}\cdot\mathfrak{e}_1 + a_1(\varphi\mathfrak{e}_1 + \varphi'\mathfrak{e}_2)\cdot\mathfrak{e}_0 = 0, \tag{131, 1}$$

$$\varepsilon_0 \mathfrak{c}\times\mathfrak{e}_1 - \frac{c_0^2}{\mu_0}\mathfrak{n}\times(\mathfrak{e}_1 + 2\varkappa\mathfrak{e}_2) - b_3\mathfrak{n}\cdot(w\mathfrak{e}_1 + w'\mathfrak{e}_2)\underline{\mathfrak{m}_0} \stackrel{3}{=} 0, \tag{132, 1}$$

$$\varepsilon_0 \mathfrak{c}\cdot\mathfrak{e}_2 + a_1(\varphi\mathfrak{e}_2 - \varphi'\mathfrak{e}_1)\cdot\mathfrak{e}_0 = 0, \tag{131, 2}$$

$$\varepsilon_0 \mathfrak{c}\times\mathfrak{e}_2 - \frac{c_0^2}{\mu_0}\mathfrak{n}\times(\mathfrak{e}_2 - 2\varkappa\mathfrak{e}_1) - b_3\mathfrak{n}\cdot(w\mathfrak{e}_2 - w'\mathfrak{e}_1)\underline{\mathfrak{m}_0} \stackrel{3}{=} 0. \tag{132, 2}$$

Die Projektion der magnetostatischen Feldstärke $\mathfrak{m}_0$ auf die Wellenfläche ist:

$$\underline{\mathfrak{m}_0} \stackrel{3}{=} -\mathfrak{c}\times(\mathfrak{n}\times\mathfrak{m}_0),$$

nur diese erscheint in diesen Gleichungen, die longitudinale Komponente von $\mathfrak{m}_0$ hat keinen Einfluß auf die elektrischen und stofflichen Schwingungen in der Welle, auch nicht auf ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Dämpfung.

Die Konstanten w und w' der Welle hängen nach (61) und (62) von ihrer Schwingungsdauer ab. Es ist:

$$w = \frac{c_0\varepsilon_0}{\mu_0 b_4}\left(\frac{2\pi\varkappa}{\tau} + q\right), \tag{133}$$

$$w' = \frac{c_0\varepsilon_0}{\mu_0 b_4}\left(-\frac{\pi}{\tau} + 2\varkappa q\right). \tag{134}$$

Die Materialkonstante b_4 ist ungemein groß, viel größer als a_4, weil, wie schon in § 35 erwähnt wurde, die diamagnetische Dyade erfahrungsgemäß sehr wenig von dem chemischen Zustande des Mediums abhängt und also $\mu - \mu_0$ auch in Kathodenstrahlen stets äußerst klein bleibt. Die Schwingungen der magnetischen Leitfähigkeit ξ sind aber keineswegs klein, obwohl der Ruhewert dieser stofflichen Variablen Null ist. Deshalb ist q ein Wert von gleicher Größenordnung wie b_4.

Für die langsam schwingenden Kathodenstrahlen ist $b_4\tau$ noch eine sehr große Zahl. Der kleinen Dämpfung wegen verschwindet auch das zweite Glied von w', was die Rechnung

sehr vereinfacht. Es darf also für die Kathodenstrahlen gesetzt werden:

$$\left.\begin{aligned} w &= \frac{c_0 \varepsilon_0}{\mu_0}\,\frac{q}{b_4}, \\ w' &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{135}$$

Dies dürfte auch noch für die Anodenstrahlen und Kanalstrahlen gelten, obwohl dieselben eine viel kleinere Schwingungsdauer als die Kathodenstrahlen, aber wohl meist eine größere als das Licht haben.

Wir dürfen uns ferner noch einige Vereinfachungen der Rechnung gestatten. Die Dämpfung $\varkappa$ der Strahlen ist jedenfalls sehr klein, für Longitudinalstrahlen im unmagnetischen Felde ist $\varphi' = 0$ und $\mathfrak{e}_2 \underline{\underline{\mathfrak{s}}} 0$ (siehe § 40).

Auch für Longitudinalstrahlen im magnetischen Felde werden also $\varkappa$, φ' und $\mathfrak{e}_2$ sehr kleine Werte haben und wenn wir sie auch nicht selbst vernachlässigen dürfen, so dürfen wir doch jedenfalls ihre Produkte miteinander vernachlässigen.

Wir vernachlässigen:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi' \mathfrak{e}_2 \text{ gegen } \varphi \mathfrak{e}_1 \\ \text{und} \qquad &2\varkappa \mathfrak{e}_2 \text{ gegen } \mathfrak{e}_1. \end{aligned}\right\} \tag{136}$$

Ferner haben wir schon in den Gleichungen (131) und (132) $\varkappa^2$ gegen 1 vernachlässigt. Diese nehmen hiedurch die einfache Form an:

$$\varepsilon_0 \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{e}_1 + a_1 \varphi \mathfrak{e}_1 \cdot \mathfrak{e}_0 = 0, \tag{137, 1}$$

$$\varepsilon_0 \mathfrak{c} \times \mathfrak{e}_1 - \frac{c_0^2}{\mu_0}\,\mathfrak{n} \times \mathfrak{e}_1 - b_3 \mathfrak{n} \cdot (w \mathfrak{e}_1 + w' \mathfrak{e}_2) \underline{\mathfrak{m}_0} \underline{\underline{\mathfrak{s}}} 0, \tag{138, 1}$$

$$\varepsilon_0 \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{e}_2 + a_1 (\varphi \mathfrak{e}_2 - \varphi' \mathfrak{e}_1) \cdot \mathfrak{e}_0 = 0, \tag{137, 2}$$

$$\varepsilon_0 \mathfrak{c} \times \mathfrak{e}_2 - \frac{c_0^2}{\mu_0}\,\mathfrak{n} \times (\mathfrak{e}_2 - 2\varkappa \mathfrak{e}_1) - b_3 \mathfrak{n} \cdot (w \mathfrak{e}_2 - w' \mathfrak{e}_1) \underline{\mathfrak{m}_0} \underline{\underline{\mathfrak{s}}} 0. \tag{138, 2}$$

Diese Gleichungen gelten nur für Longitudinalstrahlen.

Ferner können wir nach (135) in (138, 1) w' gleich Null setzen und erhalten:

$$\left(\varepsilon_0 \mathfrak{c}^2 - \frac{c_0^2}{\mu_0}\right) \mathfrak{u} \times \mathfrak{e}_1 - w b_3 \mathfrak{u} \cdot \mathfrak{e}_1 \underline{\mathfrak{m}_0} \overset{s}{=} 0. \tag{139}$$

Diese Gleichung dient zur Bestimmung der transversalen Komponente von $\mathfrak{e}_1$, also jener transversalen Schwingung, welche mit der longitudinalen gleichphasig ist. Es gibt aber auch noch eine um eine Viertelwellenlänge verschobene elektrische Schwingung in dem Strahle, welche transversal ist und deren Amplitude $\mathfrak{e}_2$ aus (138, 2) berechnet werden kann. Man ersieht aus dieser Gleichung, daß $\mathfrak{e}_2$ mit $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{u}$ koplanar ist. Die Ebene dieser Vektoren steht nach (138, 1) auf $\underline{\mathfrak{m}_0}$ senkrecht, in dieser Ebene finden also die elliptischen Schwingungen des elektrischen Vektors statt. Die Schwingungsellipse ist sehr stark exzentrisch und ihre große Achse weicht wenig von der longitudinalen Richtung ab, so daß der Strahl nahezu longitudinal genannt werden kann.

Wenden wir die Rechenregel:

$$\mathfrak{e}_1 \cdot \mathfrak{e}_0 = \mathfrak{u} \cdot \mathfrak{e}_1 \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{e}_0 + \mathfrak{u} \times \mathfrak{e}_1 \cdot \mathfrak{c} \times \mathfrak{e}_0$$

auf (139) an, so ergibt sich:

$$\left(\varepsilon_0 \mathfrak{c}^2 - \frac{c_0^2}{\mu_0}\right)(\mathfrak{e}_1 \cdot \mathfrak{e}_0 - \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{e}_1 \mathfrak{u} \cdot \mathfrak{e}_0) - b_3 w \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{e}_1 \mathfrak{m}_0 \cdot (\mathfrak{u} \times \mathfrak{e}_0) = 0, \tag{140}$$

worin $\mathfrak{m}_0$ die totale magnetische Feldstärke ist. Wir setzen:

$$z = \frac{w b_3}{\varepsilon_0 c^2 - \frac{c_0^2}{\mu_0}} \tag{141}$$

und erhalten somit aus (137, 1):

$$\mathfrak{c} \overset{s}{=} -\varepsilon_0^{-1} a_1 \varphi \mathfrak{c}; \mathfrak{u} \cdot (\mathfrak{e}_0 + z(\mathfrak{e}_0 \times \mathfrak{m}_0)). \tag{142}$$

Der Wert z, welchem der Einfluß der magnetostatischen Kraft auf den Strahl proportional ist, ist der Differenz der Quadrate der Geschwindigkeit $\mathfrak{c}$ des betrachteten Longitudinalstrahles und der Lichtgeschwindigkeit $c_0/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ verkehrt proportional. Longitudinalstrahlen, deren Geschwindigkeit die

Lichtgeschwindigkeit eben erreichen würde, würden also eine ungemein große Einwirkung von Seite magnetischer Kräfte $\mathfrak{m}_0$ erfahren, doch dürfte ihre Geschwindigkeit meist viel kleiner sein.

Der Wert φ ist durch (75) bestimmt, hängt also von der Dämpfung ab, welche im magnetischen Felde spurweise anderen Wert hat als im unmagnetischen Felde. Dieser Unterschied ist aber ganz unmerklich klein. Tatsächlich hängt für die von uns ausschließlich betrachteten Strahlen sehr großer oder sehr kleiner Schwingungsdauer, da man entweder 1 gegen rs und s^2 oder umgekehrt vernachlässigen darf, φ überhaupt nicht von der Dämpfung ab. Es verschwindet $\varkappa\,(s+r)$ stets, und zwar im ersten Falle gegen rs, im zweiten Falle gegen 1. Stets ist für Kathodenstrahlen:

$$\varphi = -\frac{\varepsilon_0 p}{a_4}$$

und für Anoden- und Kanalstrahlen:

$$\varphi = +\frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Wir können also nach (124), beziehungsweise (125) allgemein schreiben:

$$\mathfrak{c} \triangleq k\mathfrak{c}; \mathfrak{u}\cdot(\mathfrak{e}_0 + z(\mathfrak{e}_0 \times \mathfrak{m}_0)). \tag{143}$$

16. Magnetische Ablenkung der Kathodenstrahlen, Anoden- und Kanalstrahlen.

68. Magnetische Krümmung der Kathodenstrahlen. Wir berechnen nun in derselben Weise wie in § 61 den Krümmungsradius eines allgemeinen Longitudinalstrahles, jedoch für den allgemeinen Fall, daß sich derselbe unter der gleichzeitigen Wirkung eines starken statischen elektrischen Feldes $\mathfrak{e}_0$ und magnetischen Feldes $\mathfrak{m}_0$ fortpflanzt.

Wir erhalten nun statt (121), da nun das Gesetz (143) für die Wellengeschwindigkeit zu Grunde gelegt werden muß, folgende Gleichung:

$$\mathfrak{c} \triangleq k\mathfrak{r}\cdot(\mathfrak{e}_0 + z(\mathfrak{e}_0 \times \mathfrak{m}_0))\frac{1}{\mathfrak{r}}. \tag{144}$$

Wir haben also einfach in der ganzen Rechnung statt $\mathfrak{e}_0$ zu setzen $(\mathfrak{e}_0+z(\mathfrak{e}_0\times\mathfrak{m}_0))$.

Man erhält also statt (123) für den Krümmungsradius $\mathfrak{r}_1$ eines Longitudinalstrahles im allgemeinen Felde:

$$\frac{1}{\mathfrak{r}_1} \overset{s}{=} k\left(\frac{1}{\mathfrak{r}_2}\times\mathfrak{e}_0\right)\times\mathfrak{n}+k(\mathfrak{c}\times(\mathfrak{e}_0;\nabla\cdot\mathfrak{n}))\times\mathfrak{n}+$$

$$+kz\left(\frac{1}{\mathfrak{r}_2}\times(\mathfrak{e}_0\times\mathfrak{m}_0)\right)\times\mathfrak{n}+kz(\mathfrak{c}\times((\mathfrak{e}_0\times\mathfrak{m}_0);\nabla\cdot\mathfrak{n}))\times\mathfrak{n}. \quad (145)$$

Die ersten zwei Glieder sind dieselben wie in (123), stellen also die eventuell gleichzeitig mit der magnetischen Ablenkung eintretende elektrostatische Ablenkung der Strahlen dar. Das dritte Glied bestimmt die magnetische Ablenkung von Strahlen, deren Wellenfläche die Krümmung $\frac{1}{\mathfrak{r}_2}$ hat im gleichförmigen magnetischen Felde $\mathfrak{m}_0$, das vierte Glied bestimmt die Krümmung von parallelstrahligen Longitudinalstrahlen im ungleichförmigen elektromagnetischen Felde.

Wir berechnen nun die magnetische Krümmung des Strahles für den wichtigsten Fall, daß das elektrostatische sowohl als das magnetostatische Feld gleichförmig sind und daß der Strahl in der Richtung $\pm\mathfrak{e}_0$ fortschreitet, so daß keine elektrostatische Ablenkung eintritt. Dann sind alle Glieder in (145) Null außer dem dritten Gliede und dieses nimmt, da nach (144):

$$k\mathfrak{n} \overset{s}{=} \frac{1}{\mathfrak{r}_2\cdot\mathfrak{e}_0}\mathfrak{r}_2,$$

die einfache Form an:

$$\frac{1}{\mathfrak{r}_1} \overset{s}{=} \frac{z}{\mathfrak{r}_2\cdot\mathfrak{e}_0}\underline{(\mathfrak{e}_0\times\mathfrak{m}_0)}. \quad (146)$$

Der Krümmungsradius $\mathfrak{r}_1$ des Strahles ist also parallel der Projektion $\underline{(\mathfrak{e}_0\times\mathfrak{m}_0)}$ des Vektors $(\mathfrak{e}_0\times\mathfrak{m}_0)$ auf die Wellenfläche, der Strahl ist also in einer zur magnetischen Kraft senkrechten Ebene gekrümmt, wie dies den Tatsachen

entspricht. Das Vorzeichen der Krümmung wird durch das Vorzeichen von z, also wb_3 bestimmt, aus der beobachteten Richtung der magnetischen Krümmung ergibt sich, daß

$$q b_3 b_4 < 0.$$

Die Größe der magnetischen Ablenkungen hängt nach (133) einigermaßen von der Schwingungsdauer des Strahles ab, so daß eine merkliche Dispersion stattfinden muß, und wächst mit dem Werte z sehr stark, wenn sich die Geschwindigkeit des Strahles der Lichtgeschwindigkeit nähert.

Da erfahrungsgemäß die im unelektrischen Felde sich fortpflanzenden Kathodenstrahlen mit der Lichtgeschwindigkeit vergleichbare Geschwindigkeiten haben, so werden sie beträchtlich magnetisch abgelenkt, obgleich sie meist wenig divergieren.

69. Magnetische Krümmung der Kanalstrahlen und Anodenstrahlen. Ist ein elektrostatisches Feld $\mathfrak{e}_0$ und magnetostatisches Feld $\mathfrak{m}_0$ gegeben, so pflanzen sich in demselben Kathodenstrahlen in spitzem Winkel, Anoden- und Kanalstrahlen in stumpfem Winkel zur negativen elektrostatischen Kraft fort, für diese zwei Strahlenarten hat also $\mathfrak{r}_2 \cdot \mathfrak{e}_0$ entgegengesetztes Vorzeichen und deshalb werden sie nach (146) in entgegengesetzter Richtung magnetisch abgelenkt, wie dies den Tatsachen entspricht.

Die Größe der magnetischen Ablenkung hängt aber von:

$$z = \frac{w b_3 \mu_0}{\mu_0 \varepsilon_0 c^2 - c_0^2}$$

ab, man muß also schließen, daß p viel größer als a_4 ist, so daß die Kanalstrahlen eine weit geringere Fortpflanzungsgeschwindigkeit c als die Kathodenstrahlen haben, wodurch sich nach (146) ihre außerordentlich kleine magnetische Ablenkung erklärt.

Da die Anodenstrahlen von Gehrcke und Reichenheim in einem sehr starken elektrostatischen Felde fortschritten, ist kein Grund abzusehen, warum ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit, die nach (144) der Feldstärke proportional ist, ebenso klein gewesen sein soll wie die der Kanalstrahlen. Im Gegenteil

ist zu erwarten, daß diese Anodenstrahlen weit stärker magnetisch ablenkbar sein mußten, und dies haben auch Gehrcke und Reichenheim konstatiert, allerdings mit einigem Widerstreben, weil es der Elektronentheorie widerspricht.

70. Magnetische Richtungsänderung der Longitudinalstrahlen. Außer der Krümmung erfahren die Longitudinalstrahlen aber noch eine Richtungsänderung zufolge der transversalen magnetischen Kraft $\underline{\mathfrak{m}_0}$. Es ändert sich nämlich zufolge des Vorhandenseins des magnetischen Feldes der Energiefluß $\mathfrak{s}$ der Strahlen, derselbe ist nicht mehr genau longitudinal und also fällt auch die Strahlrichtung nicht mehr in die Richtung der Wellengeschwindigkeit $\mathfrak{c}$. Dies hat aber keinen merklichen Einfluß auf die oben berechnete Krümmung der Strahllinien. Allerdings haben wir nur die Drehung der Wellenfläche, also die Krümmung der Vektorlinien der Wellengeschwindigkeit $\mathfrak{c}$ berechnet, mit welchen die Strahllinien nicht zusammenfallen. Doch schneiden sich diese zwei Kurvenscharen in jedem kleinen Teile des Feldes unter konstantem, sehr kleinem Winkel, den wir sogleich berechnen werden. Der Krümmungsradius ist also bis auf Größen höherer Ordnung für die Orthogonaltrajektorien der Wellenflächen ebenso groß und nahezu ebenso gerichtet wie für die Strahllinien.

Im magnetischen Felde werden die elektrischen Longitudinalstrahlen von transversalen magnetischen Schwingungen begleitet, so daß der Poynting'sche Energiefluß nicht Null ist. Derselbe ist im Mittel transversal gerichtet und dies bedingt die Abweichung der Strahlrichtung von der Wellennormale.

Die Amplituden $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2$ der magnetischen Schwingungen ergeben sich aus (55, 1) und (55, 2). Wir können die geringen transversalen Anteile der elektrischen Schwingungen vernachlässigen und nur die transversalen magnetischen Schwingungen berücksichtigen.

Dann ist:

$$\mathfrak{m}_1 \doteq -\frac{\psi}{\mu_0} b_3 \mathfrak{n}\cdot\mathfrak{e}_1 \underline{\mathfrak{m}_0} \doteq \frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\frac{b_3 q}{b_4}\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{e}_1 \underline{\mathfrak{m}_0}.$$

Der mittlere Poynting'sche Energiefluß ist also:

$$\mathfrak{s}' \triangleq \frac{1}{2} c_0 (\mathfrak{e}_1 \times \mathfrak{m}_1) \triangleq \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 \mathfrak{e}^2 - \frac{c_0^2}{\mu_0}\right) z \mathfrak{e}_1^2 (\mathfrak{n} \times \mathfrak{m}_0). \qquad (147)$$

Verglichen mit (146) ergibt sich, daß dieser transversale Energiefluß allgemein genau die entgegengesetzte Richtung hat wie der Krümmungsradius $\mathfrak{r}_1$ der Strahllinie. Für Kathodenstrahlen hat zwar $\mathfrak{n}$ die entgegengesetzte Richtung als $\mathfrak{e}_0$, dafür ist aber auch $\mathfrak{r}_2 \cdot \mathfrak{e}_0$ negativ. Für Kanal- und Anodenstrahlen hat $\mathfrak{n}$ die Richtung $\mathfrak{e}_0$, aber $\mathfrak{r}_2 \cdot \mathfrak{e}_0$ ist positiv.

Für Kathodenstrahlen verstärkt also die Ablenkung des Strahles aus der Wellennormale die Ablenkung des Strahles zufolge der Krümmung der Strahllinien. Für Kanal- und Anodenstrahlen hat aber der longitudinale Energiefluß die entgegengesetzte Richtung und deshalb gilt für diese das umgekehrte. Jedoch ist diese Abweichung aus der Strahlrichtung aus der Wellennormale verhältnismäßig sehr klein.

Der longitudinale Energiefluß hat für Kathodenstrahlen nach (104) den Wert:

$$\mathfrak{s}_1 \triangleq \frac{1}{4} \varepsilon_0 \mathfrak{e}_1^2 \mathfrak{c}.$$

Die Tangente des Ablenkungswinkels der Strahlrichtung gegen die Wellennormale hat also den vektorischen Wert:

$$\frac{\mathfrak{s}' \times \mathfrak{s}_1}{\mathfrak{s}_1^2} \triangleq 2 \frac{c_0}{\mu_0} \frac{b_3 q}{b_4} (\mathfrak{n} \times \mathfrak{m}_0) \times \mathfrak{n}. \qquad (148)$$

71. Magnetische Torsion der Kathodenstrahlen. Hingegen ist es ausschließlich diese für gewöhnlich kleine Ablenkung der Strahlrichtung aus der Wellennormale, welche den bekannten schraubenförmigen Verlauf von Kathodenstrahlen erklärt, welche in einem sehr starken magnetischen Felde ungefähr in der Richtung der magnetischen Feldstärke oder in der gerade entgegengesetzten fortschreiten.

Der axiale Strahl eines Kathodenstrahlenbüschels verlaufe genau in der Richtung $\pm \mathfrak{m}_0$. Nach (147) weicht dieser nicht von der Wellennormale ab. Die Randstrahlen dieses Büschels divergieren aber, die Wellenflächen sind nach vorne konvex.

Proportional ihrem radialen Abstande von der Achse vergrößert sich also der Wert $\mathfrak{u} \times \mathfrak{m}_0$, weil der Winkel zwischen $\mathfrak{u}$ und der stets der Achse parallelen Feldstärke $\mathfrak{m}_0$ wächst. Zufolge dessen ist die Abweichung der Strahlrichtung der Randstrahlen aus der longitudinalen Richtung nach (147) ihrem radialen Abstande von der Achse proportional.

Die Richtung dieser Abweichung ist aber nach (147) peripher, nämlich senkrecht auf der Richtung $\mathfrak{m}_0$ der Achse des Büschels und auf der Wellennormale $\mathfrak{u}$ des Randstrahles. Also verlaufen die Randstrahlen in Schraubenlinien, deren Ganghöhe für alle Randstrahlen gleich ist, während die Wellennormalen ein nicht tordiertes, federbuschartiges Büschel ebenso wie bei Abwesenheit des magnetischen Feldes bilden.

Blendet man die axialen Strahlen und alle Randstrahlen bis auf ein dünnes Bündel ab, so kann man dessen schraubenförmigen Verlauf leicht beobachten. Die Bedingungen für den Verlauf desselben haben sich nämlich durch das Abblenden der übrigen Strahlen nicht wesentlich geändert, da das elektrostatische Feld nach wie vor der Achse parallel bleiben dürfte.

72. Magnetische Dispersion der Kathoden- und Kanalstrahlen. Die sämtlichen Wirkungen der magnetischen Feldstärke auf die Longitudinalstrahlen sind dem Werte w proportional, welcher nach (135) mit Annäherung als eine Materialkonstante angesehen werden kann. Strenge genommen ist dies aber nicht der Fall, sondern dieser Wert w hängt nach (133) von der Schwingungsdauer τ des Strahles ab. Zufolge dessen müssen alle magnetischen Ablenkungen der Longitudinalstrahlen von ihrer Schwingungsdauer einigermaßen abhängen und ein inhomogenes Strahlbündel erfährt bei der magnetischen Ablenkung eine Dispersion, indem die Strahlen kleinerer Schwingungsdauer stärker abgelenkt werden.

Das der Schwingungsdauer verkehrt proportionale Glied des Wertes w ist sehr charakteristisch, da es nicht nur die Dispersion der magnetisch abgelenkten Kathodenstrahlen, sondern, wie weiter unten nachgewiesen wird, auch die Dispersion der magnetischen Drehung der Polarisationsebene des Lichtes und den Zeemaneffekt erklärt.

17. Longitudinalstrahlen in Metallen.

73. In festen und flüssigen Stoffen ist im allgemeinen weder a_1 noch a_3 Null, doch haben beide Materialkonstanten oft sehr kleine Werte. In elektrisch doppelbrechenden Medien ist dies aber nicht der Fall.

Bezüglich der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Longitudinalstrahlen macht dies keinen wesentlichen Unterschied aus, es tritt nur an Stelle der Konstanten a_1, falls a_3 nicht Null ist, die Konstante $a_1 + a_3$. In elektrisch doppelbrechenden Medien könnten hienach elektrische Longitudinalstrahlen recht wohl fortschreiten. Sind dieselben aber Nichtleiter, so ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser Strahlen verschwindend klein, der Kleinheit der Konstanten p wegen. Die Dämpfung derselben pro Wellenlänge ist nach (86) viel größer als im Vakuum, und weil der kleinen Fortpflanzungsgeschwindigkeit wegen die Wellenlängen ungemein klein sind, so werden die Longitudinalstrahlen schon auf sehr kurzen Weglängen beim Eindringen in feste oder flüssige Nichtleiter völlig bis zur Unmerklichkeit gedämpft.

Anders aber in Metallen. Obwohl auch in diesen wie in allen dichten Medien zufolge der großen Kapazität ihrer Volumseinheit für alle Energien, durch den Strahlungsvorgang nur sehr kleine Änderungen (Schwingungen) ihres chemischen und Wärmezustandes bewirkt werden können, so reichen diese, der bedeutenden Leitungsfähigkeit der Metalle wegen, aus, um merkliche Änderungen dieser Leitfähigkeit zu bewirken. Für Metalle kann also die Konstante p der Gleichung (XI) Werte haben, welche mit dem großen Werte derselben im Vakuum einigermaßen vergleichbar sind und deshalb können Kathodenstrahlen sich in Metallen rascher fortpflanzen und auch weiter eindringen als in dichten Nichtleitern.

Da jedoch kalte Metalle wenig lumineszenzfähig sind, dürfte der Energiefluß in denselben sich nicht durch Gleichung (25) bestimmen. Ich habe deshalb das Gesetz des Energieflusses in Metallen besonders studiert und in Gleichung (37) aufgestellt. Es ist hienach kein Zweifel, daß nach meiner Theorie eine beträchtliche Energiemenge durch Strahlung in

einem elektrischen Longitudinalstrahl eine Metallfolie passieren kann, womit der Lenard'sche Versuch erklärt ist.

Der Ladungsstrom der Kathodenstrahlen, welche das Lenard'sche Fenster passiert haben, ist nach W. Wien noch sehr merklich. Dieser Strom kann nach meiner Theorie die zur Erde abgeleitete Metallfolie als Ladungsstrom des Strahles durchdringen und muß sie nicht etwa notwendig als Leitungsstrom in dem Metalle passiert haben.

Dritter Teil.

Transversale Strahlen in starken elektromagnetischen Feldern.

18. Strahlungen in festen und flüssigen Nichtleitern.

74. Die festen und flüssigen Nichtleiter verhalten sich insofern einfacher als die Gase, insbesondere die verdünnten Gase, als bei ersteren kleine Energieänderungen nur kleine Eigenschaftsänderungen herbeiführen können, was bei verdünnten Gasen nicht gilt.

Da also der chemische und Wärmezustand der dichten Nichtleiter zufolge der Strahlung nur ganz geringe periodische Änderungen erfährt, so bleiben die Leitfähigkeiten γ und ξ stets unmerklich klein und man kann

$$p = 0 \quad \text{und} \quad q = 0 \tag{149}$$

setzen.

Hingegen verhalten sich die dichten Medien insoferne komplizierter als die Gase, als in ersteren nicht nur die Konstanten a_1 und b_3, sondern auch die Konstanten a_3 und b_2 nicht selten einen merklich von Null verschiedenen Wert haben, wodurch sich die elektrische Doppelbrechung im gleichförmigen elektrischen Felde und die magnetische Drehung der Polarisationsebene erklärt.

Hingegen habe ich kein Anzeichen, daß b_1 in irgend einem Stoffe von Null verschieden ist, und fehlen noch die Experimente, welche Aufschluß über den Wert a_2 geben können, doch werden solche Experimente weiter unten vorgeschlagen.

Die elektrische Doppelbrechung im gleichförmigen elektrischen Felde ist wohl zu unterscheiden von einer anderen Art der elektrischen Doppelbrechung, jener im ungleichförmigen elektrischen Felde, welche auf gänzlich anderen Ursachen beruht und gänzlich andere Beeinflussung des Lichtstrahles bewirkt.

Bestimmt beobachtet und wohl untersucht ist bisher nur die erstere Art der elektrischen Doppelbrechung, welche wir im folgenden Kapitel behandeln werden.

Indes fehlen Gegenbeweise gegen die Doppelbrechung im ungleichförmigen Felde. Es ist wahrscheinlich, daß manche dichten Medien diese Erscheinung wohl erkennen lassen, es können dies auch Stoffe sein, welche die eigentliche elektrische Doppelbrechung im gleichförmigen Felde nicht zeigen.

Die elektrische Doppelbrechung im ungleichförmigen Felde ist eine gewöhnliche kristallische Doppelbrechung. Nur die Ursache des kristallischen Verhaltens des für gewöhnlich isotropen Mediums folgt aus der Grundgleichung *(E)*, § 29, meiner Theorie. Im statischen Zustand und im ungleichförmigen Felde zeigt nach *(E)* die dielektrische Dyade ε des Mediums eine dyadische Abweichung von ihrem Ruhewerte ε_0, welcher auch isotrop sein kann. Das Medium hat also die optischen Eigenschaften eines Kristalles und hieraus folgt nach der gewöhnlichen Maxwell'schen Theorie dann weiter die Doppelbrechung. Die elektrische Doppelbrechung im ungleichförmigen Felde kann also auch ein Medium zeigen, dessen Konstante a_3 Null ist, wenn nur die Konstante a_4 keinen sehr großen Wert hat.

Es ist also für feste und flüssige Medien zulässiger als für Gase, der Konstanten a_4 einen verhältnismäßig kleinen Wert zuzuschreiben. Da überdies für Lichtstrahlen die Schwingungsdauer τ viel kleiner ist als für alle Kathodenstrahlen, ja sogar kleiner als jene der langwelligeren Kanalstrahlen, so können wir mit noch mehr Recht als für letztere

$$r = \frac{\tau}{2\pi} a_4$$

als eine gegen 1 verschwindende Zahl betrachten.

Ferner betrachten wir zunächst nur vollkommen durchsichtige Nichtleiter, so daß wir die Dämpfungskonstante $\varkappa$ als verschwindend klein gegen 1 annehmen können.

Hiedurch nehmen die Konstanten einer elektromagnetischen Welle in einem festen oder flüssigen Nichtleiter nach (49), (61), (62) und (149) folgende Werte an:

$$\varphi = \frac{\varepsilon_0}{2}, \quad \varphi' = \frac{\varepsilon_0}{2} r, \tag{150}$$

$$w = 0, \quad w' = -\frac{c_0 \varepsilon_0 \pi}{\mu_0 b_4 \tau}. \tag{151}$$

Die Amplitudengleichungen (67) nehmen hiedurch folgende Gestalt an:

$$\left(\varepsilon_0 + \frac{c_0^2}{\mu_0} \mathfrak{n} \times \mathfrak{n}\right) \cdot \mathfrak{e}_1 + \frac{1}{2} a_1 \varepsilon_0 (\mathfrak{e}_0 \cdot \mathfrak{e}_1 + r \mathfrak{e}_0 \cdot \mathfrak{e}_2) \cdot \mathfrak{n} +$$
$$+ \frac{1}{2} a_3 \varepsilon_0 (\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{e}_1 + r \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{e}_2) \cdot \mathfrak{e}_0 + b_2 w' \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{m}_0 \mathfrak{n} \times \mathfrak{e}_2 +$$
$$+ b_3 w' \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{e}_2 \mathfrak{n} \times \mathfrak{m}_0 \overset{3}{=} 0, \tag{152, 1}$$

$$\left(\varepsilon_0 + \frac{c_0^2}{\mu_0} \mathfrak{n} \times \mathfrak{n}\right) \cdot \mathfrak{e}_2 + \frac{1}{2} a_1 \varepsilon_0 (\mathfrak{e}_0 \cdot \mathfrak{e}_2 - r \mathfrak{e}_0 \cdot \mathfrak{e}_1) \cdot \mathfrak{n} +$$
$$+ \frac{1}{2} a_3 \varepsilon_0 (\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{e}_2 - r \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{e}_1) \cdot \mathfrak{e}_0 - b_2 w' \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{m}_0 \mathfrak{n} \times \mathfrak{e}_1 -$$
$$- b_3 w' \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{e}_1 \mathfrak{n} \times \mathfrak{m}_0 \overset{3}{=} 0. \tag{152, 2}$$

Aus diesen Gleichungen folgen mehrere neue experimentelle Anregungen. Wir wollen jedoch hier nur die wichtigsten Deduktionen durchführen.

19. Elektrische Doppelbrechung im gleichförmigen elektrischen Felde.

75. Im unmagnetischen Felde, also für $\mathfrak{m}_0 \overset{3}{=} 0$, darf

$$\mathfrak{e}_2 \overset{3}{=} 0$$

gesetzt werden. Das Licht kann also fast genau linear schwingen, doch werden die elektrischen Schwingungen $\mathfrak{e}_1$ im allgemeinen nicht genau transversal sein.

Es verschwinden nämlich sämtliche Glieder der Gleichung (152, 2) mit hinreichender Annäherung, der Kleinheit von r wegen. Ganz präzis gilt aber $\mathfrak{e}_2 = 0$, wenn die elektrischen Schwingungen $\mathfrak{e}_1$ auf der elektrostatischen Feldstärke $\mathfrak{e}_0$ senkrecht stehen.

Es bleibt nur Gleichung (152, 1) übrig, welche die einfache Gestalt annimmt:

$$\left(\varepsilon_0 + \frac{c_0^2}{\mu_0}\,\mathfrak{n}\times\mathfrak{n}\right)\cdot\mathfrak{e}_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_0 a_1 \mathfrak{e}_0\cdot\mathfrak{e}_1\,\mathfrak{n} + \frac{1}{2}\varepsilon_0 a_3\,\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{e}_1\,\mathfrak{e}_0 \overset{3}{=} 0. \qquad (154)$$

Da das zweite Glied longitudinal gerichtet ist, kann die elektrische Schwingung $\mathfrak{e}_1$ nur dann rein transversal sein, wenn $\mathfrak{e}_0\cdot\mathfrak{e}_1 = 0$, d. h. wenn sie gegen die elektrostatische Feldstärke $\mathfrak{e}_0$ transversal ist. Um den longitudinalen Anteil von $\mathfrak{e}_1$ von dem transversalen zu trennen, multiplizieren wir (154) einerseits skalar mit $\mathfrak{c}\cdot$, andrerseits rotorisch mit $\mathfrak{c}\times$. So ergibt sich:

$$\left(1 + \frac{1}{2}a_3\,\mathfrak{e}_0\cdot\mathfrak{n}\right)\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{e}_1 + \frac{1}{2}a_1\,\mathfrak{e}_0\cdot\mathfrak{e}_1 = 0, \qquad (155)$$

$$\left(\varepsilon_0\,\mathfrak{c}^2 - \frac{c_0^2}{\mu_0}\right)\mathfrak{c}\times\mathfrak{e}_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_0 a_3\,\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{e}_1\,\mathfrak{c}\times\mathfrak{e}_0 \overset{2}{=} 0. \qquad (156)$$

Es sind hienach linear polarisierte Strahlen in diesem Felde nur möglich, wenn die Schwingungsebene eine von zwei ganz bestimmten Orientierungen hat, so daß ein aus einem indifferenten Medium einfallender Lichtstrahl sich in zwei linearpolarisierte Strahlen, deren Schwingungsebenen aufeinander senkrecht stehen, spalten muß.

Die Gleichungen (155) und (156) können nur in folgenden zwei Fällen erfüllt sein:

1. Wenn $\mathfrak{e}_0\cdot\mathfrak{e}_1 = 0$ ist, d. h. wenn die elektrischen Schwingungen $\mathfrak{e}_1$ auf der elektrostatischen Feldstärke $\mathfrak{e}_0$ senkrecht stehen.

Dann ist nach (155) auch $\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{e}_1 = 0$, d. h. die elektrischen Schwingungen stehen auf der Richtung der Wellennormale senkrecht, die Welle ist präzis linear und transversal.

Dann verschwindet aber das zweite Glied von (156) und es folgt:

$$\mathfrak{c}^2 = \frac{c_0^2}{\varepsilon_0 \mu_0}, \tag{157}$$

d. h. die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eines Lichtstrahles, dessen elektrische Schwingungen senkrecht zu der beliebig gerichteten elektrostatischen Feldstärke gerichtet sind, ist gleich der normalen Lichtgeschwindigkeit. Der so polarisierte Strahl erfährt keinerlei Beeinflussung von Seite des elektrostatischen Feldes.

Die Gleichungen (155) und (156) können aber auch erfüllt werden, wenn:

2. $\mathfrak{e}_1 \cdot \mathfrak{c} \times \mathfrak{e}_0 = 0$, also $\mathfrak{c} \times \mathfrak{e}_1$ parallel $\mathfrak{c} \times \mathfrak{e}_0$ ist, d. h. wenn die elektrischen Schwingungen in der Ebene der elektrostatischen Kraft und der Fortpflanzungsrichtung liegen.

Dann folgt aus (155):

$$\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{e}_1 = - \frac{a_1 \mathfrak{e}_0 \cdot \mathfrak{e}_1}{2 + a_3 \mathfrak{e}_0 \cdot \mathfrak{n}}. \tag{158}$$

Führen wir diesen Wert in (156) ein und bezeichnen zur Abkürzung:

$$u = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 a_1 a_3}{2 + a_3 \mathfrak{e}_0 \cdot \mathfrak{n}}, \tag{159}$$

so ergibt sich:

$$\left(\varepsilon_0 \mathfrak{c}^2 - \frac{c_0^2}{\mu_0} \right) \mathfrak{c} \times \mathfrak{e}_1 - u \mathfrak{c} \times \mathfrak{e}_0 \mathfrak{e}_0 \cdot \mathfrak{e}_1. \tag{160}$$

Nun berücksichtigen wir, daß:

$$\mathfrak{c} \times \mathfrak{e}_0 \mathfrak{e}_0 \cdot \mathfrak{e}_1 \overset{3}{=} \mathfrak{c} \times \mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_0^2 - \mathfrak{e}_0 \times \mathfrak{e}_1 \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{e}_0.$$

Das zweite Glied auf der rechten Seite von dieser Gleichung kann noch sehr wichtig werden, wenn man die Doppelbrechung für schief zur elektrostatischen Kraft fortschreitende Strahlen beobachtet, um die Konsequenzen meiner Theorie mit den Tatsachen zu vergleichen. In der bisherigen experimentellen Praxis war es aber Null, da stets die elektrostatische Kraft $\mathfrak{e}_0$ auf der Fortpflanzungsrichtung des Strahles $\mathfrak{c}$ senkrecht stand. In diesem Falle ist:

$$\mathfrak{c} \times \mathfrak{e}_0 \mathfrak{e}_0 \cdot \mathfrak{e}_1 \overset{3}{=} \mathfrak{c} \times \mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_0^2 \tag{161}$$

und es folgt aus (160):

$$\varepsilon_0 \mathfrak{c}^2 - \frac{c_0^2}{\mu_0} = u \mathfrak{e}_0^2 \tag{162}$$

oder:

$$\mathfrak{c} = \pm\left(\frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} + \frac{1}{2c_0}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\, u\, \mathfrak{e}_0^2\right) =$$

$$= \pm\left(\frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} + \frac{1}{8c_0} a_1 a_3 \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}\, \mathfrak{e}_0^2\right).$$

Der linear polarisierte Strahl, dessen elektrische Schwingungen in der Ebene der elektrostatischen Kraft und Wellennormalen liegen, hat also eine andere Fortpflanzungsgeschwindigkeit als der hiezu senkrecht polarisierte, womit die elektrische Doppelbrechung erklärt ist.

Der Gangunterschied beider Strahlen ist cet. par. dem Quadrate der elektrostatischen Feldstärke proportional, wie dies tatsächlich durch die Messungen des Entdeckers dieser Erscheinung, Kerr, und anderer Beobachter festgestellt ist.

76. Sehr wichtig und charakteristisch ist die Folgerung meiner Theorie, daß das senkrecht zu der elektrostatischen Kraft schwingende, linear polarisierte Licht keinerlei Einfluß von Seite des elektrostatischen Feldes erfährt. Der ganze Gangunterschied kommt also ausschließlich durch die Beeinflussung des anderen Strahles zu stande.

Tatsächlich hat Kerr beobachtet, daß der senkrecht zu der Ebene der elektrostatischen Kraft und der Fortpflanzungsrichtung schwingende Strahl keine erkennbare Einwirkung von Seite des elektrostatischen Feldes erfährt, wobei seine Interferenzexperimente so empfindlich waren, daß ihm eine solche Einwirkung, wenn sie nur $^1/_{100}$ der Einwirkung auf den anderen Strahl erreichen würde, nicht hätte entgehen können. Dies ist eine sehr zu Gunsten meiner Theorie sprechende Tatsache.

Nur im Nitrobenzol, welches auch eine ganz ungewöhnlich starke elektrische Doppelbrechung zeigt, findet eine Ausnahme statt. In diesem Stoffe erfährt auch der sonst unbeein-

flußte Strahl einen Einfluß von Seite des elektrostatischen Feldes, der allerdings kleiner ist als auf den anderen Strahl. Eine der Voraussetzungen unserer Rechnung trifft also speziell für diesen offensichtlich eine besondere Stellung einnehmenden Stoff nicht zu. Vielleicht ist a_2 für denselben nicht verschwindend klein.

77. Die elektrische Doppelbrechung ist ferner proportional dem Produkte der Konstanten a_1 und a_3. Ein Stoff, in welchem also nur eine dieser Konstanten Null ist, zeigt keine elektrische Doppelbrechung. Das Vorzeichen der elektrischen Doppelbrechung hängt von dem Vorzeichen dieser beiden Konstanten ab.

Für die Gase ist a_3 präzise gleich Null, deshalb zeigen diese präzise keine elektrische Doppelbrechung, obgleich a_1 für verdünnte Gase beträchtlichen Wert hat.

78. Schließlich möge darauf aufmerksam gemacht werden, daß ein Strahl, welcher die Einwirkung von Seite des elektrostatischen Feldes erfährt, da seine elektrische Schwingung $\mathfrak{e}_1$ den Poynting'schen Energiefluß bestimmt, selbstverständlich ein rein transversaler Strahl bleibt. Jedoch fällt die Strahlrichtung nicht in die Wellennormale, so daß die dem Strahle zu Grunde liegende Welle teilweise longitudinal ist.

Die Abweichung der Strahlrichtung von der Wellennormale ist ungemein klein und aus (161) und (158) leicht zu berechnen. Die Tangente dieses Ablenkungswinkels ist:

$$\frac{\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{e}_1}{\mathfrak{c}\times\mathfrak{e}_1} \stackrel{s}{=} \frac{a_1}{2}\,\frac{\mathfrak{e}_0^2}{\mathfrak{e}_0\times\mathfrak{c}}. \tag{163}$$

20. Magnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes.

79. Wir gehen nun wieder zu den Amplitudengleichungen (152) zurück und nehmen jetzt an, daß $\mathfrak{e}_0 \stackrel{s}{=} 0$, daß also kein starkes elektrostatisches Feld vorhanden ist. Dann hindert nichts, anzunehmen, daß:

$$\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{e}_1 = 0$$

und

$$\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{e}_2 = 0.$$

Es sind also rein transversale elektromagnetische Wellen in diesem Falle möglich und die Amplitudengleichungen (152) nehmen die einfache Form an:

$$\left(\varepsilon_0 - \frac{c_0^2}{\mu_0}\mathfrak{n}^2\right)\mathfrak{e}_1 + b_2 w' \mathfrak{n}\cdot\mathfrak{m}_0\,\mathfrak{n}\times\mathfrak{e}_2 \overset{s}{=} 0, \tag{164, 1}$$

$$\left(\varepsilon_0 - \frac{c_0}{\mu_0}\mathfrak{n}^2\right)\mathfrak{e}_2 - b_2 w' \mathfrak{n}\cdot\mathfrak{m}_0\,\mathfrak{n}\times\mathfrak{e}_1 \overset{s}{=} 0. \tag{164, 2}$$

Es hat also in diesem Falle nur die longitudinale Komponente des statischen magnetischen Feldes $\mathfrak{m}_0$ Einfluß auf den Strahl.

Man ersieht ferner, daß diese zwei Gleichungen in Bezug auf die Amplituden $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ der beiden um eine Viertelwellenlänge gegeneinander verschobenen Schwingungen des elektrischen Vektors ganz symmetrisch sind, daß ferner $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ stets zueinander senkrecht sind. Es ist also kein anderes als zirkular polarisiertes Licht in einem Medium möglich, dessen Konstante b_2 von Null verschieden ist.

Multiplizieren wir jede der beiden Gleichungen (164) mit dem Faktor, welchen $\mathfrak{e}_2$ in ihr hat, und addieren, so ergibt sich:

$$\varepsilon_0 - \frac{c_0^2}{\mu_0}\mathfrak{n}^2 = \pm b_2 w' \mathfrak{n}^2 \overline{\mathfrak{m}}_0, \tag{165}$$

worin $\overline{\mathfrak{m}}_0 \overset{s}{=} \mathfrak{c}\,\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{m}_0$.

Setzt man dies in (164, 1) ein, so ersieht man, daß bei gegebener Richtung $\mathfrak{e}_1$ die andere Amplitude $\mathfrak{e}_2$ ihr Vorzeichen wechselt, je nachdem man das obere oder untere Vorzeichen in (165) wählt, es ist also eine rechtszirkulare ebensowohl als eine linkszirkulare Welle möglich.

Aus (165) folgt:

$$\mathfrak{c}^2 = \frac{c_0^2}{\varepsilon_0\mu_0} \pm \frac{b_2 w'}{\varepsilon_0}\overline{\mathfrak{m}}_0. \tag{166}$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der rechtszirkularen, beziehungsweise linkszirkularen Welle weichen also um gleiche, aber entgegengesetzte Beträge von der normalen Lichtgeschwindigkeit ab. Der Gangunterschied wird nur durch die longitudinale Komponente $\overline{\mathfrak{m}}_0$ der magnetischen Feldstärke bestimmt,

so daß er cet. par. desto kleiner ist, je schiefer die Strahlen gegen die magnetische Feldstärke verlaufen. Werden beide Strahlen gespiegelt, so daß sie auf dem eben zurückgelegten Weg in umgekehrter Richtung zurückkehren, so ist der rechtszirkulare Strahl nun linkszirkular und umgekehrt. Aber auch $\mathfrak{m}_0$ in Gleichung (166) hat nun umgekehrte Richtung, so daß der auf dem Hinwege vorauseilende Strahl auch auf dem Rückwege vorauseilt und sich also der Gangunterschied weiter verstärkt.

Hiemit ist die Drehung der Polarisationsebene des Lichtes vollkommen erklärt.

21. Dispersion der magnetischen Drehung der Polarisationsebene.

80. Nun möge der Gangunterschied der beiden entgegengesetzt zirkularpolarisierten Strahlen ausführlicher berechnet werden. Nach (166) ist:

$$\mathfrak{c} = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \pm \frac{1}{2}\delta. \tag{167}$$

Bezeichne $\mathfrak{m}_0$ die longitudinale Komponente der magnetischen Feldstärke $\mathfrak{m}_0$, so ist:

$$\delta = w' \frac{b_2}{c_0} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\, \mathfrak{m}_0 = -\frac{\pi}{\tau} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\, \frac{b_2}{b_4}\, \mathfrak{m}_0 \tag{168}$$

die Differenz der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der beiden Wellen. Diese Differenz muß der ersten Potenz der Schwingungsdauer τ verkehrt proportional sein, weil nach (151) w' in dieser Weise von der Schwingungsdauer abhängt. Es ist:

$$w' = -\frac{\pi}{\tau} \frac{\varepsilon_0 c_0}{\mu_0 b_4}. \tag{169}$$

Aus der Differenz der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten ergibt sich die Drehung der Polarisationsebene d für die Längeneinheit in folgender Weise:

$$d = \frac{\pi}{\tau} \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{c_0^2} \delta.$$

Es ergibt sich also schließlich:

$$d = \varepsilon_0 \frac{\pi^2}{\tau^2} \frac{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}{c_0^2} \frac{b_2}{b_4} \overline{\mathfrak{m}}_0 = \frac{\pi^2}{\lambda^2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{b_2}{b_4} \overline{\mathfrak{m}}_0, \qquad (170)$$

worin λ die Wellenlänge ist.

Es muß also die Drehung der Polarisationsebene dem Quadrate der Schwingungszahl n des Lichtstrahles gerade proportional sein.

Es ist dies bekanntlich wirklich mit großer Annäherung der Fall. Keine andere einkonstantige Formel als eine von der Form (170) stellt die Dispersion der Rotationspolarisation hinreichend dar. Um das ungünstigste Beispiel anzuführen ist für Schwefelkohlenstoff nach Verdet:

Fraunhofer-linie	$n\ 10^{-14}$	$n^2\ 10^{-28}$	d beobachtet	$d.\tau^2.10^{28}$
C	0·460	0·211	0·59	2·80
D	0·513	0·263	0·76	2·90
E	0·581	0·338	1·00	2·96
F	0·621	0·386	1·23	3·19
G	0·685	0·469	1·70	3·52

Wenn auch die Zahlen der letzten Kolonne einen deutlichen Gang zeigen, so sind sie doch in erster Annäherung merklich konstant.

Der Umstand, daß diese einkonstantige Dispersionsformel (170) ganz ohne alle Zusatzhypothesen, ja sogar unter möglichst vereinfachter Rechnung aus meiner Theorie folgt, spricht sehr zu Gunsten derselben.

Die natürliche Dispersion und auswählende Absorption sind in meiner Theorie nicht berücksichtigt. Kein Zweifel, daß diese Eigentümlichkeiten des Mediums auch auf sein magneto-optisches Verhalten nicht ohne Einfluß sind, wodurch sich der Gang obiger Zahlen erklären mag. Umso bemerkenswerter ist

aber, daß nach meiner Theorie die Dispersion der Rotationspolarisation im wesentlichen unabhängig ist von der natürlichen Dispersion und auswählenden Absorption und nach meinen Differentialgleichungen auch in vollkommen durchsichtigen und geringe Refraktionsdispersion zeigenden Medien eintreten muß.

22. Dichroismus der Zirkularpolarisation in absorbierenden Medien.

81. Schließlich möge der Einfluß der auswählenden Absorption des Mediums auf sein magnetooptisches Verhalten untersucht werden. Die auswählende Absorption erklärt sich durch chemische Eigenschwingungen des Mediums. Diese Absorption des Lichtes im unelektrischen und unmagnetischen Felde ergibt sich aber nicht nach meinen Differentialgleichungen wenigstens nicht besser als nach der Maxwell'schen Theorie, nämlich nur durch Annahme einer natürlichen Leitfähigkeit γ_0 des Mediums, welche die Dämpfung $\varkappa_0$ des Lichtes bewirken muß. Die auswählende Dämpfung kann man in der Weise in die Differentialgleichungen einführen, daß man annimmt, daß diese Leitfähigkeit γ_0 eine entsprechende Funktion der Schwingungszahl n ist:

$$\gamma_0 = 2\pi n \varkappa_0. \tag{171}$$

Will man z. B. die auswählende Absorption eines Stoffes in die Differentialgleichungen einführen, welcher bei der Schwingungszahl n_0 einen Absorptionsstreifen hat, so kann man setzen:

$$\varkappa_0 = k\, e^{-c(n-n_0)^2} \quad (k \text{ und } c \text{ konstant}). \tag{172}$$

Je größer die Konstante c angenommen wird, desto schmäler ist die Absorptionslinie. Freilich ist dies nur ein Notbehelf. Aber man geht doch weit sicherer, wenn man sich für denselben entscheidet, als wenn man die auswählende Absorption gar nicht in die Gleichungen einführt, da man sie nachträglich doch berücksichtigen muß. Hingegen können wir immer nachträglich γ_0 gleich Null setzen, so daß die Annahme (171) in ihren Wirkungen kontrolliert und eventuell nachträglich fallen gelassen werden kann.

89. In einem absorbierenden Medium ist die Dämpfungskonstante $\varkappa$ der Lichtwellen nicht klein und dies hat einen merklichen Einfluß auf das Verhalten des Lichtes in starken elektromagnetischen Feldern, weil die Konstanten φ, φ', w und w' der Welle nach (56), (57), (61) und (62) von der Dämpfung $\varkappa$ abhängen.

Dies ist die Ursache, warum wir, ohne den Rahmen dieser Theorie zu überschreiten, auf die auswählende Absorption Rücksicht nehmen müssen.

Die magnetooptischen Wirkungen der Absorption beruhen darauf, daß wegen des beträchtlichen Wertes von $\varkappa$ nach (61) die Konstante w auch in einem gewöhnlichen Medium, welches selbst nur vorübergehend keine magnetische Leitfähigkeit anzunehmen vermag, für welches also $q = 0$ ist, den Wert:

$$w = \frac{2\pi}{\tau}\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\frac{c_0}{b_4}\varkappa \tag{173}$$

hat, während w für ein durchsichtiges Medium nach (151) den Wert Null hat.

Ferner dürfen wir nun in den elektrischen Amplitudengleichungen (67) ebenfalls die mit $\varkappa$ behafteten Glieder nicht vernachlässigen. Dieselben nehmen bei Abwesenheit eines elektrostatischen Feldes und für transversale Strahlen, also für

$$\mathfrak{e}_0 \overset{3.}{=} 0, \quad \mathfrak{n}\cdot\mathfrak{e}_1 = 0, \quad \mathfrak{n}\cdot\mathfrak{e}_2 = 0 \tag{174}$$

die Form an:

$$\left(\varepsilon_0 - \frac{c_0^2}{\mu_0}\mathfrak{n}^2\right)\mathfrak{e}_1 + \frac{\tau}{2\pi}\gamma_0\mathfrak{e}_2 - 2\frac{c_0^2}{\mu_0}\varkappa\mathfrak{n}^2\mathfrak{e}_2 + \\ + b_2(w\,\mathfrak{n}\times\mathfrak{e}_1 + w'\mathfrak{n}\times\mathfrak{e}_2)\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{m}_0 \overset{3.}{=} 0, \tag{175, 1}$$

$$\left(\varepsilon_0 - \frac{c_0^2}{\mu_0}\mathfrak{n}^2\right)\mathfrak{e}_2 - \frac{\tau}{2\pi}\gamma_0\mathfrak{e}_1 + 2\frac{c_0^2}{\mu_0}\varkappa\mathfrak{n}^2\mathfrak{e}_1 + \\ + b_2(w\,\mathfrak{n}\times\mathfrak{e}_2 - w'\mathfrak{n}\times\mathfrak{e}_1)\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{m}_0 \overset{3.}{=} 0, \tag{175, 2}$$

in welchen Gleichungen ferner berücksichtigt wurde, daß die Leitfähigkeit γ_0 als von Null verschieden angenommen werden soll.

Trennen wir die Glieder dieser Gleichungen, welche die Richtung $\mathfrak{e}_1$, bezüglich $\mathfrak{e}_2$ haben, unter der Voraussetzung, daß wieder diese beiden gegeneinander um eine Viertelwellenlänge verschobenen Schwingungen aufeinander senkrecht stehen, so ergibt sich:

$$\left(\varepsilon_0 - \frac{c_0^2}{\mu_0}\mathfrak{n}^2\right)\mathfrak{e}_1 + b_2 w' \mathfrak{n}\times\mathfrak{e}_2\,\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{m}_0 \stackrel{s}{=} 0, \qquad (176,\ 1)$$

$$\frac{\tau}{2\pi}\gamma_0\mathfrak{e}_2 - 2\frac{c_0^2}{\mu_0}\varkappa\mathfrak{n}^2\mathfrak{e}_2 + b_2 w\,\mathfrak{n}\times\mathfrak{e}_1\,\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{m}_0 \stackrel{s}{=} 0, \qquad (177,\ 1)$$

$$\left(\varepsilon_0 - \frac{c_0^2}{\mu_0}\mathfrak{n}^2\right)\mathfrak{e}_2 - b_2 w'\mathfrak{n}\times\mathfrak{e}_1\,\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{m}_0 \stackrel{s}{=} 0, \qquad (176,\ 2)$$

$$-\frac{\tau}{2\pi}\gamma_0\mathfrak{e}_1 + 2\frac{c_0}{\mu_0}\varkappa\mathfrak{n}^2\mathfrak{e}_1 + b_2 w\,\mathfrak{n}\times\mathfrak{e}_2\,\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{m}_0 \stackrel{s}{=} 0. \qquad (177,\ 2)$$

Tatsächlich können, obgleich nun doppelt so viel Gleichungen als Unbekannte gewonnen sind, dennoch diese Gleichungen leicht erfüllt werden, woraus folgt, daß die Annahme, daß $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ aufeinander senkrecht stehen, richtig ist.

Die Gleichungen (176, 1) und (176, 2) sind identisch mit (164, 1) und (164, 2). Das Medium zeigt also wieder magnetische Drehung der Polarisationsebene, d. h. es sind in demselben nur zirkulare Lichtwellen möglich, auch die Dispersion der Drehung der Polarisationsebene berechnet sich so wie in Kapitel 21. Hienach hätte die auswählende Absorption des Mediums keinen Einfluß auf die Dispersion der Rotationspolarisation, dies ist aber nur in erster Annäherung richtig.

Wir haben nämlich in den Gleichungen (176), obwohl wir die Dämpfung $\varkappa$ nicht vernachlässigen durften, doch $\varkappa^2$ gegen 1 vernachlässigt, was nur in erster Annäherung gestattet ist, so daß strenge genommen die Gleichungen (176) nicht ganz identisch mit den Gleichungen (164) sind, was gerade die Dispersion der Rotationspolarisation ein wenig beeinflussen muß.

Die Gleichungen (177, 1) und (177, 2) sind identisch, wenn man berücksichtigt, daß $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ gleiche Größe haben und

aufeinander senkrecht stehen. Multiplizieren wir (177, 1) skalar mit $\mathfrak{e}_2$ [oder auch (177, 2) skalar mit $\mathfrak{e}_1$], so ergibt sich:

$$\left(\frac{\tau}{2\pi}\gamma_0 - 2\frac{c_0^2}{\mu_0}\varkappa\mathfrak{n}^2\right)\mathfrak{e}_2^2 + b_2 w\,\mathfrak{n}\cdot(\mathfrak{e}_1\times\mathfrak{e}_2)\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{m}_0 = 0. \qquad (178)$$

Nun ist:

$$\mathfrak{e}_1\times\mathfrak{e}_2 \overset{s}{=} \pm\mathfrak{e}_2^2\mathfrak{n}\frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}. \qquad (179)$$

Hiemit ist nur ausgedrückt, daß $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ gleich groß sind, aufeinander und auf $\mathfrak{n}$ senkrecht stehen und daß die reziproke Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\mathfrak{n}$ mit für diesen Zweck weitaus hinreichender Annäherung die Größe $\frac{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}{c_0}$ hat. Das obere Vorzeichen in (179) gilt für den rechtszirkularen, das untere Vorzeichen für den linkszirkularen Strahl.

Setzt man (179) in (178) ein, so ergibt sich jene Bedingung für die Konstanten, welche die Dämpfung $\varkappa$ der beiden entgegengesetzt zirkularen Strahlen bestimmt. Es ist:

$$\frac{\tau}{2\pi}\gamma_0 - 2\varepsilon_0\varkappa \pm b_2 w\frac{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}{c_0}\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{m}_0 = 0. \qquad (180)$$

Die beiden entgegengesetzt zirkularen Strahlen werden verschieden stark absorbiert. Es muß jedes Medium, dessen Konstante b_2 von Null verschieden ist, welches also überhaupt Drehung der Polarisationsebene zeigt, auch Dichroismus der beiden entgegengesetzt zirkularen Strahlen zeigen, wenn nur aus irgend einem Grunde die Konstante w von Null verschieden ist.

Die Undurchsichtigkeit des Mediums ist allerdings meist der Grund, warum nach (173) w von Null verschieden ist, doch ist diese Rolle der auswählenden Absorption des Mediums offenbar nebensächlich.

Führen wir den Wert (173) in (180) ein, so ergibt sich:

$$\varkappa = \frac{\tau}{4\pi}\frac{\gamma_0}{\varepsilon_0}\left(1 \pm \frac{m_0}{\tau}\right), \qquad (181)$$

worin:

$$m_0 = \pi \frac{b_2}{b_4} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\, \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{m}_0.$$

Diesen Dichroismus der Rotationspolarisation zeigt nach neueren Untersuchungen besonders das Eisen sehr deutlich. Gerade bei diesem könnte die bedeutende Größe des Wertes w auch von der Größe des Wertes q herrühren, also von der magnetischen Leitfähigkeit des Eisens. Doch ist, wie aus obigem hervorgeht, auch für magnetisch nicht leitfähige Substanzen in der Nähe einer Absorptionslinie Dichroismus bei der Zirkularpolarisation zu erwarten.

23. Der Zeemaneffekt.

82. Die Ausführungen des vorhergehenden Kapitels gelten für alle absorbierenden Stoffe, also auch für alle dichten Gase und glühende Metalldämpfe. Auch diese zeigen, wenn auch in geringem Maße, magnetische Drehung der Polarisationsebene, ihre Konstante b_2 ist also von Null verschieden, wenn auch oft äußerst klein. Dafür muß nach (173) die Konstante w in der Nähe einer Absorptionslinie sehr große Werte annehmen.

Die dichten Gase und glühenden Metalldämpfe werden also, wenigstens in der Nähe einer Absorptionslinie, Dichroismus der Rotationspolarisation zeigen und hiedurch erklärt sich das Zeeman'sche Phänomen.

Es muß die Dämpfung der Lichtstrahlen mit den Schwingungszahlen n, welche in der Nähe der in der Absorptionslinie am stärksten absorbierten Schwingungszahl n_0 liegen, durch ein Gesetz von ungefähr der Form (172) bestimmt sein. Jedenfalls muß die Absorption durch eine gerade Potenz von $(n-n_0)$ mit einem scharfen Maximum bei $n-n_0 = 0$ bestimmt sein. Darauf allein kommt es hier an und nur dies setzen wir voraus.

Wenn aber das Licht sich in der Richtung einer starken magnetischen Kraft fortpflanzt, so ist nach (181) seine natürliche Dämpfung $\varkappa_0$ um einen Bruchteil vermehrt, welcher der magnetostatischen Feldstärke $\mathfrak{m}_0$ gerade und der Schwingungsdauer τ verkehrt proportional ist. Die Ursache

davon liegt in den Grundlagen der Theorie und ist nicht durch eine Zusatzannahme hinzugekommen. Wenn man dieser Ursache nachgeht, so findet man, daß die Konstante der Welle w deshalb der Schwingungsdauer verkehrt proportional ist, weil nach der Grundgleichung *(F)*, § 29, die Abweichung der diamagnetischen Dyade μ von ihrem Ruhewerte μ_0 durch eine Derivation der elektrischen Vektorverteilung bestimmt ist. Auch muß hier daran erinnert werden, daß aus der gleichen Ursache sich nach Kapitel 21 die Dispersion der magnetischen Drehung erklärt.

Nach (181) ist:

$$\varkappa = \varkappa_0 (1 \pm m_0 n). \tag{182}$$

Zufolge dieser von der Schwingungszahl abhängenden magnetischen Dämpfung liegt nun das Maximum der Absorption nicht mehr bei der Schwingungszahl n_0, d. h. die Absorptionslinie verschiebt sich zufolge der magnetischen Wirkung.

Um die neue Lage des Absorptionsmaximums zu berechnen, differenzieren wir Gleichung (182) nach n und erhalten für die Schwingungszahl n_1 des Absorptionsmaximums im magnetischen Felde:

$$c(n_1 - n_0)(1 \pm m_0 n) \pm m_0 = 0, \tag{183}$$

welche Gleichung sich hinreichend genau in der Form schreiben läßt:

$$n_1 - n_0 = \mp \frac{m_0}{c}; \tag{184}$$

von dem Doppelvorzeichen bezieht sich das obere auf den rechtszirkularen, das untere auf den linkszirkularen Strahl. Für diese beiden Strahlen ist also das Absorptionsmaximum in entgegengesetzter Richtung zufolge der magnetischen Wirkung aus dem natürlichen Absorptionsmaximum verschoben.

In jedem Medium, ausgenommen die sehr verdünnten Gase, kann also in der Richtung einer starken magnetischen

Kraft im allgemeinen nur zirkulares Licht fortschreiten. Der rechtszirkulare und linkszirkulare Strahl sind stets etwas verschieden stark gedämpft und dieser Unterschied der magnetischen Feldstärke proportional. Die Absorptionslinien in dem rechtszirkularen, beziehungsweise linkszirkularen Spektrum sind aus ihrer natürlichen Lage in entgegengesetztem Sinne verschoben.

Umgekehrt sendet nach dem Kirchhoff'schen Prinzip ein leuchtender Dampf in der Richtung der starken magnetischen Kraft des Feldes, in welchem er sich befindet, statt einer natürlichen Emissionslinie nach (184) das Zeeman'sche Duplet von zwei in entgegengesetzter Richtung im Spektrum verschobenen, entgegengesetzt zirkularpolarisierten Linien aus.

Hiemit ist der Zeeman'sche Longitudinaleffekt im Prinzip befriedigend aus den Differentialgleichungen meiner Theorie ohne jede besondere Zusatzannahme erklärt.

Aus (181) folgt, daß die Distanz der beiden Linien des Duplets der magnetischen Feldstärke proportional ist.

Ferner ist nach (184) der Zeeman'sche Longitudinaleffekt dem Werte c verkehrt proportional, also nach (172) desto größer, je weniger scharf, je stärker verbreitert die Emissionslinie ist. Deshalb erfahren nur die Linien derselben Serie miteinander vergleichbare Zerlegungen, weil die Linien verschiedener Serien desselben Elementes oder isolierte Linien verschieden stark verbreitert sind.

Endlich ist nach (184) die Differenz der Schwingungszahlen der beiden Komponenten des Duplets für Linien derselben Serie gleich, was bekanntlich experimentell hinreichend bestätigt ist. Nach (184) sind die Verschiebungen beider Komponenten gleich und entgegengesetzt, wie dies meist beobachtet wird. Die seltener beobachteten unsymmetrischen Verschiebungen derselben könnten durch unsymmetrische Verbreiterung der Spektrallinie erklärt werden. Überhaupt kann man die genaue Form des Gesetzes (184) nur für symmetrisch verbreiterte Spektrallinien aufrecht halten, weil dieselbe von der speziellen Form der Absorptionsfunktion (172) abhängen könnte, besonders wenn letztere unsymmetrisch ist, d. h. die Spektrallinie einseitig verbreitert ist.

Der Zeemaneffekt erklärt sich also aus meinen Differentialgleichungen durch den Dichroismus der magnetischen Rotationspolarisation, also durch die Abhängigkeit des Wertes w von der Dämpfung der Strahlen, ohne daß man gezwungen ist anzunehmen, daß das magnetische Feld eine direkte Wirkung auf die chemischen Eigenschwingungen des Mediums hat, welche die Ursache der Emission der Spektrallinie ist.

24. Die magnetischen Transversalwirkungen auf transversales Licht.

83. Nach den Amplitudengleichungen (67) werden die Effekte einer transversal gerichteten magnetostatischen Kraft $\mathfrak{m}_0$ durch die Glieder:

$$b_3(w\,\mathfrak{u}\cdot\mathfrak{e}_1+w'\,\mathfrak{u}\cdot\mathfrak{e}_2)\,\mathfrak{u}\times\mathfrak{m}_0,$$

beziehungsweise:

$$b_3(w\,\mathfrak{u}\cdot\mathfrak{e}_2-w'\,\mathfrak{u}\cdot\mathfrak{e}_1)\,\mathfrak{u}\times\mathfrak{m}_0$$

bestimmt. Ist also das Licht präzise transversal, d. h. ist

$$\mathfrak{u}\cdot\mathfrak{e}_1=0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{u}\cdot\mathfrak{e}_2=0,$$

so hat eine transversal gerichtete magnetische Kraft nach diesen Gleichungen keinen Effekt.

Eine longitudinale Komponente nimmt aber nach denselben das Licht nur an, wenn eine elektrostatische Kraft vorhanden ist und die Lichtschwingungen nicht senkrecht zu derselben erfolgen. Obgleich diese longitudinale Komponente der Lichtschwingungen meist ungemein klein sein wird, könnte sie doch merkliche Wirkungen der transversal gerichteten magnetischen Kraft ermöglichen.

Hieraus folgt ein neues experimentelles Motiv. Es muß eine elektromagnetische Doppelbrechung und elektromagnetische Zirkularpolarisation geben, das sind Wirkungen, welche in manchen Medien deutlich sein dürften und davon abhängen, daß sich das Licht in einem Felde fortpflanzt, in welchem eine starke elektrostatische Kraft $\mathfrak{e}_0$ und eine starke magnetostatische Kraft $\mathfrak{m}_0$ gleichzeitig vorhanden sind, und zwar am besten so, daß $\mathfrak{e}_0$ zu $\mathfrak{m}_0$ senkrecht ist.

84. Bei Abwesenheit einer elektrostatischen Kraft ist aber nach den Gleichungen (67) keine Ursache vorhanden, warum das Licht teilweise longitudinal sein müßte und also können diese Gleichungen keinen rein magnetischen Transversaleffekt darstellen.

Die Ursache davon liegt in einer Vernachlässigung, welche wir uns der dadurch bedingten außerordentlich großen Erleichterung der Rechnung wegen gestattet haben. Es dürfte aufgefallen sein, wie einfach die Rechnung in Kapitel 6 sich gestaltete, obgleich es sich doch um die Lösung von nicht weniger als 42 simultanen Differentialgleichungen handelt.

Für diese Einfachheit der Rechnung habe ich die Möglichkeit der Erklärung der rein magnetischen Transversaleffekte geopfert. In § 19 wurde hervorgehoben, daß der Einfachheit wegen darauf verzichtet wurde, die Gleichungen (VII) und (VIII) ganz symmetrisch auszugestalten. Es wurden die derivierten Dyaden

$$a'\nabla, \mathfrak{m} \quad \text{und} \quad b'\nabla, \mathfrak{m}$$

der magnetischen Vektorverteilung $\mathfrak{m}$, welche offenbar nach dem Prinzip der Dualität in (VII), beziehungsweise (VIII) ihren Platz finden sollten, einfach weggelassen, was nur für solche Medien gestattet ist, in welchen die zugehörigen sechs Konstanten a' und b' Null sind. So kommt es, daß aus den Amplitudengleichungen wohl die wichtige elektrische Doppelbrechung erklärt wird, aber die dual entsprechende, allerdings viel seltener zu beobachtende magnetische Doppelbrechung unerklärt bleibt, was doch sicherlich nicht meiner Theorie, sondern der bezeichneten Vernachlässigung zur Last zu legen ist.

Der Zeeman'sche Transversaleffekt beweist, daß Licht, dessen elektrische Schwingungen in der Richtung der magnetostatischen Kraft fallen, keine Wirkung erfährt. Die so linear polarisierte Komponente des emittierten Lichtes bildet deshalb die mittlere Linie des Triplets. Hingegen dürfte das senkrecht zur magnetostatischen Kraft schwingende Licht auch bei Abwesenheit einer elektrostatischen Kraft eine longitudinale Komponente annehmen und zufolgedessen nach obigen Ausführungen der magnetischen Transversalwirkung unterliegen.

25. Elektrische Konvektion des Lichtes.

85. Schließlich möge es gestattet sein, noch auf ein neues experimentelles Motiv hinzuweisen. Im obigen wurde stets die Konstante a_2 gleich Null gesetzt, da in einem Medium, in welchem diese Konstante einen merklichen Wert hat, ein eigentümlicher, noch nie beobachteter elektrischer Longitudinaleffekt nachweisbar sein müßte.

Nun ist aber ein zwingender Grund nicht vorhanden, warum diese Konstante a_2 in keinem Medium von Null verschieden sein sollte, so daß anzunehmen ist, daß dieser Longitudinaleffekt nur deshalb nicht gefunden wurde, weil er noch nicht gesucht worden ist.

Nach den Amplitudengleichungen (67) muß in einem Medium, in welchem a_2 einen beträchtlichen Wert hat, das Licht in der Richtung der elektrostatischen Kraft des Feldes mit anderer Geschwindigkeit sich fortpflanzen, als in der gerade entgegengesetzten Richtung, ein Unterschied, der sich durch Interferenzversuche, eventuell durch Reflexionsversuche leicht feststellen ließe. Insbesondere das Nitrobenzol wäre daraufhin zu untersuchen.

Über das Potential der Spannungskräfte in elastischen Körpern als Maß der Bruchgefahr

von

Dr. **Rudolf Girtler,**

Assistent für Physik an der k. k. Technischen Hochschule in Wien.

(Mit 2 Tafeln und 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 28. Februar 1907.)

I.

Die Festigkeit eines bestimmten Stoffes, d. h. der Widerstand gegen eine Trennung seiner Moleküle ist für den Physiker in demselben Maße interessant wie für den Ingenieur, wenn auch beide ihre Untersuchungen zu einem anderen Endzweck ausführen. Der Techniker betrachtet in der Regel in erster Linie Materialien, welche ihrer Form und ihrem Inhalte nach für seine technischen Konstruktionen von Wichtigkeit sind und legt gewöhnlich den Anschauungen, inwieweit seine Resultate mit den anderen physikalischen Eigenschaften in Zusammenhang stehen, weniger Wert bei. Aber gerade dem letzteren muß der Physiker, der nach einem einheitlichen Naturbilde strebt, die größte Beachtung schenken. Liegen schon deswegen über das, was bei einer bestimmten Angriffsweise von Oberflächen- und äußeren Massenkräften, welche auf den gegebenen Körper wirken, für das Zustandekommen des Bruches maßgebend sei, einander widersprechende Anschauungen beider oben bezeichneten Richtungen vor, so wird die Zahl der Meinungen über diesen Gegenstand noch vermehrt durch die Schwierigkeit der Frage an sich.

Die Mannigfaltigkeit der Einflüsse, welche bei den Experimentaluntersuchungen zu berücksichtigen sind, die Schwierigkeit der Beobachtung, die wirkliche Herstellung jener Bedingungen, welche man theoretisch voraussetzt, sind daran hauptschuldtragend. Auf den letzten Umstand hat Prof. Föppl[1] sehr nachdrücklich hingewiesen. Er hat durch Versuche gezeigt, daß, wenn ein Würfel zwischen zwei Druckplatten gepreßt wird, keine reine Druckelastizitätswirkung eintritt, sondern daß infolge der an den Würfelflächen auftretenden Reibung ein sehr komplizierter Beanspruchungsfall entsteht. Dadurch werden auch alle jene Folgerungen, welche daraus in der falschen Meinung, es liege reine Druckelastizität vor, für die Druckfestigkeit des gepreßten Stoffes gezogen wurden, hinfällig. Da die Reibung nie ganz durch Schmiermittel zu eliminieren ist, so ist die Herstellung reiner linearer Druckelastizität so gut wie unmöglich.

Die Unzulänglichkeit der molekularen Theorie fester Körper, welche bei Gasen ein so schönes Bild ihrer Gesetze gezeitigt hat, läßt es gar nicht erwarten, daß in absehbarer Zeit jene Gesetzmäßigkeit in obige Frage gebracht wird, welche von einer nach allen Richtungen ausgebauten Theorie zu erwarten ist, die auf unzweifelhaften Beobachtungstatsachen im Vereine mit wertvollen Hypothesen ruht. Es muß Schritt für Schritt weiter gekämpft werden und einen solchen Schritt möchte ich im Folgenden gerne unternommen haben.

II.

Ich werde zuerst möglichst kurz die heute gebrauchten Anschauungen über das Maß der Bruchgefahr einer Betrachtung unterziehen.

Unter allen diesbezüglichen Annahmen erfreut sich die von Navier[2] aufgestellte und in der Folge von de Saint-Venant und in Deutschland besonders von F. Grashof verfochtene, wegen ihrer verhältnismäßigen Einfachheit der

---

[1] A. Föppl, Mitteilungen aus dem mech.-techn. Laboratorium in München, Heft 27 bis 29.

[2] L. M. H. Navier, Résistence des corps solides.

weitesten Verwendung. Sie besagt, daß die Bruchgefahr in einem Punkte eines Körpers um so größer sei, je größer die in diesem Punkte auftretende größte Hauptdilatation ist.

Die Erfahrung hat gezeigt — insbesondere sind hier die Versuche W. Voigt's[1] und Wehage's[2] zu erwähnen — daß diese Anschauung bei einem nichtlinearen Spannungszustande sicher falsch ist, und daß bei einem Spannungszustande mit zwei gleichen Hauptdilatationen beide Hauptdilatationen in das Maß der Bruchgefahr eintreten müssen. Voigt zerriß ein Steinsalzprisma und in der Folge ein Stäbchen aus einem Gemische von Stearin, Palmitinsäure und Paraffin zuerst in Luft und dann in komprimierter Kohlensäure und fand die Zerreißungslast in beiden Fällen gleich. Wehage fand, daß ein Stahlzylinder, der normal zur Achse von innen durch eine Flüssigkeit gepreßt wurde, bei gleichzeitigem Zuge parallel zur Achse des Zylinders bei einem kleineren Zuge zerriß, als in dem Falle, wo der Zug parallel zur Achse allein vorhanden war. Das Versuchsresultat Voigt's stimmt also mit dem von Wehage nicht überein, denn nach Wehage müßte der Paraffinstab in Kohlensäure bei einer größeren Last als der in Luft zerrissen worden sein. Voigt zieht aus seinen Versuchen den Schluß, daß die Differenz zwischen den beiden gleichsinnig gerechneten Hauptspannungen normal und parallel zum Zerreißungsquerschnitt eine für den Moment des Zerreißens charakteristische Konstante sein müsse.

Zu einer allgemeineren Ansicht kommt Prof. Mohr,[3] der die Differenz der größten und kleinsten Hauptspannung als Kriterium der Beanspruchung betrachtet und sie aus den Versuchsreihen, welche Bauschinger in München angestellt hatte, schloß.

III.

Es frägt sich nun, inwieweit man überhaupt berechtigt ist, die Deformationsgrößen allein als Maß der Beanspruchung hin-

---

[1] W. Voigt, Wied. Ann., Bd. 53, 1894, p, 43 bis 56; Bd. 67, 1899, p. 452 bis 458.

[2] Wehage, Mitteilungen der techn. Versuchsanstalt zu Berlin, 6. Jahrg., 1888.

[3] O. A. Mohr, Zivilingenieur, 1882.

zustellen. Die Anstrengung in einem Punkte eines festen Stoffes muß offenbar durch eine Funktion der infolge einer Belastung seiner Oberfläche auftretenden Veränderungen im allgemeinen und der physikalischen Eigenschaften im besonderen gemessen werden. Diese Veränderungen werden aber bei einem Körper von bestimmter chemischer Beschaffenheit unter sonst gleichen Umständen verschieden sein, je nachdem seine Temperatur zu Anfang des Versuches variiert, die Art und Zeit der Wirksamkeit der äußeren Kräfte verschieden ist und insbesondere, wenn durch der Zeit nach vorhergehende Beanspruchungen seine molekulare Beschaffenheit geändert wurde. Auf das letztere, zu dem auch die sogenannte elastische Nachwirkung zu rechnen ist, hat Prof. Föppl in bereits zitierter Abhandlung hingewiesen und unter dem Namen »Vorgeschichte des Materials« zusammengefaßt. Die genannten Veränderungen sind der Hauptsache nach: Auftretende innere Reibung R, Temperaturerhöhung, beziehungsweise Erniedrigung und Deformationen λ, die mit der inneren Reibung in einer unbekannten Beziehung stehen müssen. Die innere Reibung zu beurteilen, liegt bis heute außer dem Bereiche der Möglichkeit, ihr Einfluß wird jedoch bei manchen Körpern, wie z. B. bei Blei, ein sehr bedeutender werden. Sie wird bei jenen Eigenschaften eines Stoffes, welche man als zäh, dehnbar etc. bezeichnet, neben den Kohäsionskräften eine wichtige Rolle spielen. Die infolge Volumsänderung auftretenden Änderungen der Temperatur des Körpers ist sicher von zu vernachlässigendem Einfluß. Wenn wir also annehmen, daß ein Körper vorliegt, dessen innere Reibung sehr klein ist, so kann man sagen, daß das Maß der Beanspruchung in einem Punkte eines Körpers eine Funktion der dort auftretenden Deformationen λ sein müsse, was wir symbolisch mit

$$V = f(\lambda) \tag{1}$$

bezeichnen. Sind die Größen λ in Gleichung (1) nur elastischer Natur, dann verstehen wir unter ihnen die aus den elastischen Grundgleichungen folgenden Hauptdilatationen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, durch welche ja der Deformationszustand in einem Punkte vollkommen definiert ist. Die elastischen Grundgleichungen berücksichtigen

bekanntlich die innere Reibung nicht. Die Größen λ können aber auch unelastischer Natur sein, d. h. die äußeren, auf den Körper wirkenden Kräfte sind so groß geworden, daß die Elastizitätsgrenze überschritten wurde.

Unelastische Deformationen können bis heute theoretisch nicht verfolgt werden. Der Zusammenhang zwischen Deformationen und Spannungen ist dann sicher kein linearer, es werden die in einem Punkte des Körpers auftretenden Hauptspannungen p_1, p_2, p_3 in einem anderen als dem linearen Funktionalzusammenhange mit den drei Hauptdilatationen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ stehen. Im Bereiche der unelastischen Deformationen wird die innere Reibung, wenn sie überhaupt in Rechnung gezogen werden muß, von bedeutenderem Einfluß sein als im Gebiete der elastischen Formänderung.

Für elastische Deformationen nimmt man, den Deduktionen Navier's[1] und Poisson's[2] folgend, an, daß die Hauptspannungen linear abhängig seien von den Hauptdilatationen. Es wurde durch J. O. Thompson[3] experimentell gezeigt, daß eine solche Abhängigkeit nur annähernd besteht, und Prof. Finger[4] entwickelte dementsprechend eine Theorie, in welcher die Spannungen auch neben den ersten Potenzen der Deformationselemente solche in der zweiten Potenz enthalten. Ich erwähne das hier kurz, um mich weiter unten darauf berufen zu können. Unter den oben näher auseinandergesetzten Beschränkungen ist also das Maß der Beanspruchung in einem Punkte eines festen Körpers eine Funktion der Größen, welche die Deformation in diesem Punkte charakterisieren. Für gewöhnlich führt man in dieses Maß nur die elastischen Deformationen ein und setzt seine Gültigkeit oberhalb der Elastizitätsgrenze voraus, obwohl in diesem Gebiete bereits nichtelastische Deformationen

---

[1] L. M. H. Navier, Mémoire sur l'équilibre et le monoement des corps solides élastiques. Mémoires de l'Acad. d. Sciences 1824, VII.

[2] S. D. Poisson, Mémoire sur l'équilibre et le monoement des corps élastiques. Mémoires de l'Acad. d. Sciences 1828, VIII.

[3] J. O. Thompson, Über das Gesetz der elast. Dehnung. Wied. Ann. 1891, Bd. 44.

[4] J. Finger, Das Potential der inneren Kräfte etc. Diese Sitzungsber., Bd. CIII, Abt. IIa, 1894.

vorhanden sind. Man sagt also, es sei das Maß der Beanspruchung unterhalb der Elastizitätsgrenze auch ein Maß für die Bruchgefahr.

Das ist darin begründet, — ganz abgesehen davon, daß man berechenbare Größen braucht — daß bei vielen Körpern ein Anwachsen der bestimmten, die Anstrengung des Materials ausdrückenden Größe an gewissen Stellen unterhalb der Elastizitätsgrenze für das unelastische Gebiet eine Verminderung der Widerstandsfähigkeit vorbereitet, wodurch an diesen Stellen der Bruch herbeigeführt wird. Das kann man besonders von feingekühlten Gläsern voraussetzen, überhaupt spröden Körpern, deren Elastizität gering ist.

Nach dem Vorgeschickten würde man meinen, daß man in der Geschichte unserer Frage von allem Anfang an V als Funktion der drei Hauptdilatationen (als jenen Größen, welche die Deformation in einem Punkte charakterisieren) angesehen hätte. Das ist, wie wir in Teil II gezeigt haben, nicht der Fall, mit einer einzigen Ausnahme, die ich jetzt nachträglich besprechen werde.

IV.

E. Beltrami[1] hat zuerst den Gedanken ausgesprochen, daß das Potential der Spannungskräfte pro Volumseinheit als Maß für die Bruchgefahr eines Körpers für einen bestimmten Punkt desselben angesehen werden müsse, ohne daß diese Anschauung zu einer Verbreitung gekommen wäre.

Ehe ich die Gründe entwickle, warum ich mich für Beltrami erkläre, möchte ich noch einzelne Bemerkungen an den Teil II knüpfen. Der Schluß, den Prof. Voigt aus seinen Versuchen zog, ist als der einfachste der am nächsten liegende; man könnte aber ebenso schließen, das Maß der Beanspruchung müsse für jeden einzelnen Körper eine Funktion der Hauptspannungsdifferenz in dem dort bezeichneten Sinne sein. Der Versuchsanordnung liegt auch ein spezieller Spannungszustand zu Grunde, es sind nämlich zwei Hauptspannungen gleich; bei

---

[1] E. Beltrami, Sulle condizioni di resistenza dei corpi elastici. Lomb. Ist. Rend. (2) XVIII (1885); Beiblätter z. d. Ann. d. Physik, 1885.

dem allgemeinsten Spannzustande, wo die drei Hauptspannungen verschieden sind, braucht dasselbe Kriterium für die Bruchgefahr nicht zu gelten, es steht dann vielmehr zu erwarten, daß alle drei Hauptspannungen in die Funktion für die Bruchgefahr eintreten müssen.

Der einfachste Ausdruck, in welchem alle drei Hauptspannungen vertreten sind, ist die kubische Dilatation, sie hat die Eigenschaft, daß sie bei isotropen elastischen Körpern, welche beliebigen äußeren Oberflächenkräften ausgesetzt sind, wenn die Volumskräfte Gravitationskräfte Newton'scher Art sind, nur an der Oberfläche ihren Maximalwert erlangen kann.[1] Es ist aber selbstverständlich, daß auch bei isotropen Körpern der Bruch nicht immer an der Oberfläche beginnen muß, obwohl man das oft beobachten kann.

Anders ist es aber mit dem Potential der Spannungskräfte. Die oben genannten Veränderungen repräsentieren nach dem Prinzip der Erhaltung der Energie eine Energiegröße, die gleich der von den wirkenden Kräften geleisteten sein muß. Hat man also Reibung und Erwärmung vernachlässigt, so kann man sagen, die Energie der äußeren Kräfte setzt sich in potentielle Energie der Spannungskräfte allein um, welche für den Bereich der elastischen Deformation für isotrope Körper pro Volumseinheit die Formel:

$$f = -K[\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2+\theta(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2] \qquad (2)$$

besitzt, wobei K, θ die Kirchhoff'schen Elastizitätskoeffizienten, λ_1, λ_2, λ_3 die Hauptdilatationen vorstellen.

Wenn die potentielle Energie der Spannungskräfte einen bestimmten Wert in einem gegebenen Punkte des Körpers erlangt hat, so tritt in diesem Punkte die Trennung der Teilchen, d. h. der Bruch ein. Es frägt sich nun, ob dort, wo das Potential ein größeres ist, auch die Gefahr für die Trennung der Teilchen eine größere ist. Das ist nämlich die Behauptung Beltrami's, das letzte Wort kann nur durch sehr viele Versuche gesprochen werden.

---

[1] R. Girtler, Zeitschrift für Math. und Physik, Bd. 53, 1906.

Abgesehen davon, daß es von vornherein sehr verständlich ist, zu behaupten, ein Teilchen sei mehr angestrengt, je mehr Arbeit verwendet wurde, um es zu deformieren, — es ist das gewissermaßen das Prinzip der Erhaltung der Energie auf unser Problem angewendet — hat das Potential der Spannungskräfte noch andere Eigenschaften, welche es für die Beurteilung unserer Frage tauglich erscheinen lassen: es enthält die Elastizitätskonstanten explizit, sein Differential hat man mit gutem Grunde als vollständiges anzunehmen, d. h. es ist eine Größe, deren Endwert von dem Wege, auf welchem er erreicht wurde, unabhängig ist; ferner kann man durch entsprechende Zusatzglieder, über die Prof. Finger[1] eingehend geschrieben hat, die schon vor der äußeren Belastungsaufbringung im Körper vorhandenen Spannungen und die Abweichungen vom Hookschen Gesetze, wie ich schon oben erwähnte, zum Ausdrucke bringen. Das Potential enthält also in sich alles, was das elastische Verhalten eines Stoffes charakterisiert.

Kurz will ich hier noch erwähnen, daß nach unserer Anschauung für eine einfache Zugbeanspruchung die Beanspruchung nicht der ersten Potenz der Hauptdilatation, sondern dem Quadrate derselben proportional ist, denn es ist dann:

$$f = -K\lambda_1^2 \frac{1+3\theta}{1+2\theta}. \qquad (3)$$

Ob die Versuchsresultate von Prof. Voigt zu der Ansicht, daß das Potential der Spannungskräfte die Beanspruchung messe, ein Widerspruch sind, läßt sich nicht sagen, da wir über das Potential der Spannungen jenseits der Elastizitätsgrenze nichts Allgemeines wissen; wir können nur sagen, daß es als eine Funktion der herrschenden Spannungen ausdrückbar sein muß, also im Falle der geschilderten Beanspruchung des Paraffinstäbchens als eine Funktion zweier Hauptspannungen. Würde nachgewiesen werden können, daß die fragliche Funktion eine solche der Differenz der beiden Hauptspannungen ist,

[1] J. Finger, Das Potential der inneren Kräfte. Diese Sitzungsber., Bd. CIII, Abt. IIa, 1894.

so stellte sich die Ansicht von Voigt als spezieller Fall derjenigen von Beltrami dar. Das Paraffin ist übrigens ein Körper, der sich dadurch dem Kautschuk nähert, daß seine Poisson'sche Konstante m nahezu nach den Versuchen von Mallock[1] gleich 2 ist. Dieses ganz besondere Verhalten von Paraffin ist vielleicht einer der Gründe, warum das Versuchsresultat von Prof. Voigt in direktem Widerspruche zu dem von Wehage steht.

Wir legen uns nun die Frage vor, ob die Annahme, das Potential der Spannungskräfte sei für die Bruchgefahr maßgebend, nicht im Widerspruche mit der Erfahrungstatsache stehe, nach welcher ein von allen Seiten gleichmäßig gedrückter Körper (in Flüssigkeit unter hohem Druck) erst bei einer im Vergleiche zur reinen Druckfestigkeit sehr großen Belastung Q pro Flächeneinheit oder überhaupt gar nicht zerdrückt werden kann.

Die Versuche von Prof. Föppl[2] in dieser Richtung haben ergeben, daß sehr poröse Körper, wie z. B. Zementwürfel, bei welchen man annehmen kann, daß die Druckflüssigkeit in die Poren eindringt und eine Art Sprengwirkung hervorruft, zerdrückt werden konnten, während sehr dichte Körper, wie Glas, Blei, Kupfer, Zinn unter noch so hohem Flüssigkeitsdrucke nicht zerstört werden konnten und entweder gar keine oder nur eine geringe Deformation konstatiert wurde. Durch reine Druckwirkung — ein Kreiszylinder werde zwischen zwei Druckplatten normal zur Achse gepreßt und die Reibung werde durch Schmierung der Basisflächen so viel als möglich eliminiert — sind die meisten Stoffe zerstörbar oder zum mindesten einer sehr starken bleibenden Deformation zugänglich.

Bei allseits gleichem Flüssigkeitsdrucke $\frac{Q}{cm^2}$ sind die drei Hauptspannungen untereinander gleich $\frac{Q}{cm^2}$ und gegeben durch die Gleichung

$$Q = -2K(1+3\theta)\lambda \qquad (a)$$

---

[1] Mallock, Proc. royal Soc. of London, 1879.

[2] Föppl, Mitteilungen aus seinem Laboratorium, 27 bis 29.

und das Potential der elastischen Kräfte ist für jeden Punkt dasselbe und hat den Wert

$$f_1 = -\frac{3}{4}\frac{Q_1^2}{K(1+3\theta)}. \qquad (b)$$

Für reine Druckbeanspruchung $\frac{Q_2}{cm^2}$ erhalten wir für das elastische Potential

$$f_2 = -\frac{1}{2}Q_2^2\frac{1+2\theta}{(1+3\theta)K}. \qquad (c)$$

Sind Q_1 und Q_2 einander gleich, so ergibt sich aus *(b)* und *(c)*

$$f_1 = \frac{3}{2(1+2\theta)}f_2. \qquad (d)$$

Solange wir uns innerhalb der elastischen Deformationen befinden, wird, weil θ für die meisten Stoffe zwischen 1 und $\frac{1}{2}$ liegt, f_1 zwischen $\frac{1}{2}f_2$ und $\frac{3}{4}f_2$ liegen.

Wir sehen also, daß, wenn der Flüssigkeitsdruck gleich der linearen Druckbelastung wird, das Potential f_2 zwar kleiner als f_1 ist, aber nicht in dem Maße, als die Erfahrung verlangt, nach welcher der Flüssigkeitsdruck bedeutend viel größer sein muß als die reine lineare Druckfestigkeit, um ein Zerdrücken des Materials herbeizuführen.

Wir stehen daher vor einem Widerspruche, der sich aber löst, wenn man bedenkt, daß nach der bestehenden Anschauung über die Konstitution der Materie die Bewegung der Moleküle gegeneinander, wie sie bei Flüssigkeitsdruckwirkung auf die Oberfläche eines Körpers auftreten muß, nur bis zu einer bestimmten Grenzlage möglich sein wird, d. h. die Zusammendrückbarkeit eines beliebigen festen Stoffes wird um so geringer werden, je größer der allseits wirkende Flüssigkeitsdruck wird. Mathematisch ausgedrückt heißt das, die Poissonsche Konstante m wird bei allseits unter Flüssigkeitsdruck stehenden Körpern mit dem fortgesetzten Zusammendrücken

sich der Größe 2 nähern, wodurch f_1 in *(b)* weniger rasch wachsen wird als f_2 in *(c)*, denn bei reiner linearer Druckwirkung ist eine rapide Abnahme der Konstanten m bei zunehmendem Druck nicht nötig, weil ein seitliches Ausweichen des Materials möglich ist. Bei allseits gleichem Flüssigkeitsdruck wird also infolge der Konstitution der Materie das Potential der Spannungskräfte nur bis zu einem bestimmten Grenzwerte F wachsen können, während bei reiner Druckbeanspruchung dem fortgesetzten Anwachsen von f_2 nichts entgegensteht. Ist der Grenzwert F nicht genügend groß, um ein Zerstören der Materie herbeizuführen, so wird, abgesehen von sekundären Einflüssen, wie die oben erwähnte Sprengwirkung, bei vollkommener Isotropie des Materials ein Bruch überhaupt nicht eintreten können. Die verschiedene Variabilität der Poisson'schen Konstanten m, folgend aus der Konstitution der Materie, mit der Art der Beanspruchung des Materials und der Zunahme der äußeren Kräfte, wird insbesondere bei Druckbeanspruchungen von großer Bedeutung sein. Daß die Elastizitätskonstanten bei Voraussetzung der Gültigkeit des Hook'schen Gesetzes überhaupt nicht als konstant zu betrachten sind, darauf haben in neuerer Zeit Prof. Finger und Thompson in bereits zitierter Abhandlung hingewiesen. Man findet dort auch die diesbezüglichen Literaturangaben.

Wir gehen nun daran, einen der häufigst vorkommenden Fälle der Beanspruchung exakt nach der Elastizitätstheorie für isotrope Körper zu berechnen, die Maximalkurven des elastischen Potentials aufzustellen und hierauf experimentell an eigens zu dem Zwecke hergestellten Versuchskörpern zu zeigen, inwieweit sich die Erfahrung mit der Theorie decke, beziehungsweise decken kann.

V.

Ein isotroper Kreiszylinder von der Höhe $2c$ werde zwischen Druckbacken so gepreßt, daß sich die Drucklast $-Q$ gleichförmig auf die Zylinderbasen verteilt, die infolge der zwischen ihnen und den Druckbacken auftretenden Reibung gehindert seien, normal zur Achse auszuweichen. Die Mantel-

fläche des Zylinders sei frei von Kräften, die Schwerkraft werde vernachlässigt.

Wir haben also als wirkende Oberflächenkräfte:

1. Druck $-Q$ gleichmäßig auf die Basen des Zylinders verteilt.
2. Schubspannung an den Basisflächen von zu bestimmender Verteilung.

Als Oberflächenbedingungen bestehen:

1. Längs der Mantelfläche seien die Schubspannungen τ parallel zur Zylinderachse gleich Null.
2. Die in die Richtung des Radius a fallenden Spannungen R_r verschwinden längs der Mantelfläche.
3. Die Druckspannung längs der Zylinderbasen sind konstant gleich $-Q$.
4. Die Peripheriekreise der Basen behalten infolge der auftretenden Reibung ihre Größe unverändert bei.

N. G. Filon[1] hat einen ähnlichen Fall behandelt, er nahm aber als Oberflächenbedingung, daß die Basisebenen des Zylinders bei der elastischen Deformation eben bleiben müssen, woraus sich ergab, daß die Druckverteilung über die Basisebenen nicht gleichmäßig sein konnte. Wie wir weiter unten sehen werden, ist es bei gleichmäßiger Druckverteilung ausgeschlossen, daß die Basen eben bleiben. In den Fällen der Praxis wird im Bereiche der elastischen Deformation ein Mittelding zwischen dem von Filon gelösten und dem von uns zu betrachtenden Fall eintreten, d. h. es werden die Basen weder eben bleiben, noch wird die Druckverteilung über sie eine gleichförmige sein. Um exakt vorzugehen, wären bei jedem einzelnen Fall auch die Elastizitätsverhältnisse des drückenden Körpers heranzuziehen. Da aber nach meiner Meinung eine gleichförmige Druckverteilung durch passende Wahl von Druckplatten- und Zylindermaterial eher zu erreichen ist als das Ebenbleiben der Zylinderbasen durch passende Wahl der

[1] N. G. Filon, »On the elastic equilibrium of circular cylinders under certain practical systems of loads.« Phil. Trans. 1902. 198 A.

Druckverteilung über dieselben und es daher im ersten Fall leichter ist, die der Theorie entsprechenden Voraussetzungen praktisch wirklich herzustellen, wählte ich als eine der Grenzbedingungen gleichmäßige Druckübertragung. Aber noch ein anderer Beweggrund leitete mich bei der Stellung des Problems: Durch die längs der Basisflächen auftretenden Schubspannungen wird eine Größe definiert, welche als statische Reibung bezeichnet wird. In der Definition dieser Reibung kommt ja immer die gleichmäßige Druckübertragung als Voraussetzung vor. Nach dem oben Gesagten ist es klar, daß man nicht für alle Körper von einer Reibung in diesem Sinne sprechen kann. Je gleichartiger die beiden einander reibenden Körper sind, desto angenäherter wird die von uns abzuleitende Beziehung zwischen Druck und Reibung richtig sein.

Was die Methode der Lösung betrifft, so verweise ich in dieser Hinsicht auf die Abhandlungen von N. G. Filon,[1] von Chree[2] und von Pochhammer.[3]

Wir werden uns also gestatten, die einleitenden Gleichungen mit Hinweisung auf die Quellen kürzer auszulegen und erst bei Verwendung der Oberflächenbedingungen eingehendere Betrachtungen zu pflegen.

Bei Einführung zylindrischer Koordinaten lauten die elastischen Grundgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
(\lambda+2\mu)\frac{\partial \nu}{\partial r}+\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial \varphi}-\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z}\right]+\rho R_0 &= \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\\
(\lambda+2\mu)\frac{1}{r}\frac{\partial \nu}{\partial \varphi}+\mu\left[\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial z}-\frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial r}\right]+\rho \Phi_0 &= \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},\\
(\lambda+2\mu)\frac{\partial \nu}{\partial z}+\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial r\mathfrak{B}}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial \varphi}\right]+\rho Z_0 &= \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

[1] N. G. Filon, On the elastic equilibrium of circular cylinders under certain practical systems of Load. Phil. Trans. of London, 1902. 198 A.

[2] Ch. Chree, The equations of an isotropie elastic solid in Polar- and cylindrical coordinates, their solution and application. Cambr. phil. trans., vol. 14.

[3] L. Pochhammer, Beitrag zur Theorie der Biegung von Kreiszylindern. Crelle's Journal, 1876.

Für den Fall, daß die rechten Seiten dieser Gleichungen verschwinden, haben Chree und Pochhammer die allgemeinen Lösungen dieser Differentialgleichungen angegeben. In ihnen ist:

$$\mathfrak{A} = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi},$$

$$\mathfrak{B} = \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial z},$$

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}.$$

u, v, w stellen die Verschiebungen parallel zur Zylinderachse, normal und parallel zum Radius vor, φ, r, z sind die Punktkoordinaten, λ, μ sind die Lamé'schen[1] Elastizitätskonstanten, ν bedeutet die kubische Dilatation, R_0, Φ_0, Z_0 sind die Komponenten der Volumskräfte, welche wir vernachlässigen wollen. Die u, v-Ebene ist in der halben Zylinderhöhe liegend gedacht, die w-Achse fällt mit der Achse des Zylinders zusammen.

Für unser Problem gilt also

$$\mathfrak{A} = 0, \quad \mathfrak{B} = \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \mathfrak{C} = 0,$$

da v verschwindet.

Die kubische Dilatation ν, deren allgemeiner Ausdruck

$$\nu = \frac{1}{r}\frac{\partial ru}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

ist, hat hier den Wert

$$\nu = \frac{1}{r}\frac{\partial ru}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

---

[1] M. G. Lamé, Leçons sur la théorie de l'Estacité.

Wir erhalten daher aus (4):

$$\left.\begin{aligned}(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u}{r}\right)+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial z}+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial r\,\partial z}&=0,\\ (\lambda+\mu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right)+&\\ +(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}&=0.\end{aligned}\right\}\quad(4')$$

Die auftretenden Spannungen reduzieren sich wegen der herrschenden Symmetrie auf

$$\left.\begin{aligned}R_r&=\lambda\nu+2\mu\frac{\partial u}{\partial r},\\ Z_z&=\lambda\nu+2\mu\frac{\partial w}{\partial z},\\ T_t&=\lambda\nu+2\mu\left(\frac{u}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right),\\ Z_z=R_z&=\tau=\mu\left(\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial z}\right).\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

Durch Einsetzen von ν in (5) gehen diese Gleichungen in

$$\left.\begin{aligned}R_r&=(\lambda+2\mu)\frac{\partial u}{\partial r}+\lambda\frac{u}{r}+\lambda\frac{\partial w}{\partial z},\\ Z_z&=\lambda\frac{\partial u}{\partial r}+\lambda\frac{u}{r}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial w}{\partial z},\\ T_t&=(\lambda+2\mu)\frac{u}{r}+\lambda\frac{\partial u}{\partial r}+\lambda\frac{\partial w}{\partial z},\\ \tau&=\mu\left(\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\end{aligned}\right\}\quad(5')$$

über. Die Lösung der Gleichungen (4′) läßt sich auf die Lösung der Differentialgleichung

$$(\vartheta^2+D^2)\,Y=0\qquad(6)$$

zurückführen, wenn man für Y $\frac{\partial u}{\partial z}$, beziehungsweise $\frac{\partial w}{\partial r}$ setzt und ϑ^2 die Operation $\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r$ und D^2 die Operation $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ bedeutet.

Die Gleichung führt aber für zwei Systeme partikulärer Integrale im Prinzip auf die Lösung der zwei Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2R_1}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR_1}{dr}-\left(\frac{1}{r^2}+k^2\right)R_1=0,\\ &\frac{d^2Z_1}{dz^2}+k^2Z_1=0, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

wobei das Produkt $R_1 Z_1$ der Differentialgleichung

$$(\vartheta^2+D^2)R_1Z_1=0 \tag{8}$$

genügt, R_1 eine Funktion von r allein, Z_1 eine Funktion von z allein und k eine zu bestimmende Konstante bedeutet.

Die erste der beiden Gleichungen (7) ist die Bessel'sche Differentialgleichung, führt also auf Zylinderfunktionen zweiter Art, die zweite ist linear homogen zweiter Ordnung und führt auf trigonometrische Funktionen.

Chree[1] hat die allgemeine Lösung für u und v aus (4′) in zwei Lösungsformen angegeben. Die eine derselben ist eine unendliche Reihe, welche nach Potenzen von r und z fortschreitet. Durch eine geistreiche Kombination eines partikulären Falles dieser Lösungsform von Chree mit den partikulären Lösungen von u und v, wie sie sich aus (7) und (8) ergeben, fand Filon die für unser Problem ebenfalls tauglichen partikulen Integrale von (4′).

Berücksichtigt man noch, daß u bei unseren Bedingungen nur eine gerade Funktion von z, w nur eine ungerade Funktion von z sein kann, so vermögen wir die Lösungen für u und v in folgender Form zu schreiben:

---

[1] Ch. Chree, Cambr. phil. trans., vol. 14, Sect. X seiner Abhandlung.

$$\left.\begin{aligned} u &= \bar{a}r+br^3+\bar{c}r^5+drz^2+er^3z^2+frz^4+ \\ &\quad +\sum\left[-\frac{A_1}{K}I_1(Kr)-\frac{C}{K}rI_0(Kr)\right]\cos(Kz), \\ w &= gz+hz^3+iz^5+kr^2z+lr^2z^3+mr^4z+ \\ &\quad +\sum\left[\frac{A_2}{K}I_0(Kr)+\frac{C}{K}rI_1(Kr)\right]\sin(Kz), \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

worin

$$I_n(Kr)=\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(Kr)^{n+2s}}{2^{n+2s}\Pi(s)\Pi(s+n)}$$

und $\bar{a}, b, \bar{c}, d, e, f, g, h, i, k, l, m, A_1, A_2, C_2, K$ zu bestimmende Konstante sind.

Aus der Bedingung, daß (9) den Gleichungen (4′) genügen müssen, ergeben sich die Bedingungen:

$$\frac{2C}{K}=-\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}(A_1-A_2), \quad (10)$$

$$2(\lambda+\mu)d+2k\mu+3(\lambda+2\mu)h=0, \quad (11)$$

$$4(\lambda+\mu)e+8m\mu+3(\lambda+2\mu)l=0, \quad (12)$$

$$2(\lambda+\mu)f+5i(\lambda+2\mu)+\mu l=0, \quad (13)$$

$$4(\lambda+2\mu)b+d\mu+(\lambda+\mu)k=0, \quad (14)$$

$$12(\lambda+2\mu)\bar{c}+e\mu+2m(\lambda+\mu)=0, \quad (15)$$

$$4(\lambda+2\mu)e+3(\lambda+\mu)l+6f\mu=0. \quad (16)$$

Die Gleichungen (5′) gehen über in:

$$\left.\begin{aligned} Z_z &= 2\lambda\bar{a}+(\lambda+2\mu)g+z^4[2f\lambda+5i(\lambda+2\mu)]+ \\ &\quad +z^2[2d\lambda+3h(\lambda+2\mu)]+r^2z^2[4e\lambda+3l(\lambda+2\mu)]+ \\ &\quad +r^2[4b\lambda+k(\lambda+2\mu)]+r^4[6\bar{c}\lambda+(\lambda+2\mu)m]+ \\ &\quad +\sum\left\{(\lambda+2\mu)A_2-\lambda A_1-\lambda\frac{2C}{K}\right\}I_0(Kr)\cos(Kz)+ \\ &\quad +2\mu CrI_1(Kr)\cos(Kz), \end{aligned}\right.$$

$$
\left.\begin{aligned}
R_r &= 2(\lambda+\mu)\bar{a}+\lambda g+r^2[2b(2\lambda+3\mu)+k\lambda]+\\
&\quad +r^4[2\bar{c}(3\lambda+5\mu)+m\lambda]+z^2[2d(\lambda+\mu)+3h\lambda]+\\
&\quad +z^2r^2[2(2\lambda+3\mu)e+3\lambda l]+z^4[2f(\lambda+\mu)+5i\lambda]+\\
&\quad +\sum -\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\left\{(2\lambda+3\mu)A_1+\mu A_2\right\}I_0(Kr)\cos(Kz)+\\
&\quad +2\mu\left\{\frac{A_1}{Kr}-Cr\right\}I_1(Kr)\cos(Kz),\\
T_t &= 2(\lambda+\mu)\bar{a}+\lambda g+r^2[2b(2\lambda+\mu)+k\lambda]+\\
&\quad +r^4[2(3\lambda+2\mu)\bar{c}+m\lambda]+r^2z^2[2e(2\lambda+\mu)+3l\lambda]+\\
&\quad +z^2[2d(\lambda+\mu)+3h\lambda]+z^4[2f(\lambda+\mu)+5i\lambda]+\\
&\quad +\sum\left\{A_1\left[\frac{\mu^2}{\lambda+2\mu}I_0-\frac{2\mu}{Kr}I_1(Kr)\right]-\right.\\
&\quad \left.-A_2I_0(Kr)\frac{\mu^2}{\lambda+2\mu}\right\}\cos Kz,\\
\tau &= \mu[2(d+k)rz+2(l+2f)rz^3+2(e+2m)r^3z]+\\
&\quad +\mu\Sigma(A_1+A_2)I_1(Kr)\sin(Kz)+2CrI_0(Kr)\sin(Kz).
\end{aligned}\right\}\quad(17)
$$

Aus den Oberflächenbedingungen ergibt sich:

Wenn $z=\pm c$, muß $Z_z=-Q$ für jeden Wert von r, d. h. es müssen die folgenden vier Gleichungen bestehen:

$$K=\frac{2n+1}{2c}\pi \quad (n \text{ eine ganze positive Zahl}), \tag{18}$$

$$m(\lambda+2\mu)+6\bar{c}\lambda=0, \tag{19}$$

$$(\lambda+2\mu)(3lc^2+k)+\lambda(4b+4ec^2)=0, \tag{20}$$

$$2\lambda\bar{a}+(\lambda+2\mu)g+2\lambda(dc^2+c^4f)+$$
$$+(\lambda+2\mu)(3hc^2+5ic^4)=-Q. \tag{21}$$

Es muß ferner, wenn a der größte Zylinderradius ist, τ für $r=a$ verschwinden, d. h.:

$$0 = 2(d+k)az+2(l+2f)az^3+2(e+2m)a^3z+$$
$$+\sum_0^\infty [(A_1+A_2)I_1(Ka)+2CaI_0(Ka)]\sin(Kz), \quad (22)$$

und zwar für jeden Wert von z. Wir entwickeln z und z^3 in eine Fourier'sche Reihe:

$$\left.\begin{aligned} z &= \sum_0^\infty (-1)^n \frac{8c}{(2n+1)^2\pi^2}\sin\frac{2n+1}{2c}\pi z, \\ z^3 &= \sum_0^\infty (-1)^n \frac{24c^3}{(2n+1)^2\pi^2}\left(1-\frac{8}{(2n+1)^2\pi^2}\right)\cdot \\ &\qquad \cdot\sin\frac{2n+1}{2c}\pi z. \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

Mit der Bedingung (18) ergibt sich daraus die Beziehung:

$$(-1)^n[2(d+k)a+2(e+2m)a^3]\frac{8c}{(2n+1)^2\pi^2}+$$
$$+2(l+2f)a\cdot\frac{24c^3}{(2n+1)^2\pi^2}\left(1-\frac{8}{(2n+1)^2\pi^2}\right)(-1)^n =$$
$$= -[(A_1+A_2)I_1(Ka)+2CaI_0(Ka)]. \quad (24)$$

Weiters soll R_r für $r=a$ für jeden Wert von z verschwinden, was, weil nach (18) $\cos(Kc)$ für jeden Wert von n Null ist, die drei Bedingungen:

$$2(\lambda+\mu)\bar{a}+\lambda g = -a^2[2b(2\lambda+3\mu)+k\lambda]-$$
$$-a^4[2\bar{c}(3\lambda+5\mu)+m\lambda], \quad (25)$$

$$(-1)^n\frac{4c^2}{(2n+1)\pi}\left(1-\frac{8}{(2n+1)^2\pi^2}\right)[2(\lambda+\mu)d+3h\lambda+$$
$$+a^2\{2(2\lambda+\mu)e+3l\lambda\}]+$$
$$+(-1)^n\cdot\frac{4c^4}{(2n+1)\pi}\left[1-\frac{48}{(2n+1)^2\pi^2}+\frac{384}{(2n+1)^4\pi^4}\right]\times$$

$$\times[2f(\lambda+\mu)+5i\lambda] = \frac{\mu}{2\mu+\lambda}\{(2\lambda+3\mu)A_1+\mu A_2\}I_0(Ka)-$$

$$-2\mu\left[\frac{A_1 I_1(Ka)}{Ka}+\frac{Ka}{2}\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}(A_1-A_2)I_1(Ka)\right], \quad (26)$$

$$2(\lambda+\mu)\bar{a}+\lambda g+a^2[2b(2\lambda+3\mu)+k\lambda]+$$
$$+a^4[2\bar{c}(3\lambda+5\mu)+m\lambda]+c^2[2d(\lambda+\mu)+3h\lambda]+$$
$$+c^2a^2[2(2\lambda+3\mu)e+3\lambda l]+c^4[2f(\lambda+\mu)+5i\lambda]=0 \quad (27)$$

nach sich zieht.

(25) und (26) ergeben sich leicht, wenn z^2 und z^4 in eine Fourier'sche Reihe entwickelt worden sind:

$$\left.\begin{aligned} z^2 &= \sum_0^\infty (-1)^n \frac{4c^2}{(2n+1)\pi}\left(1-\frac{8}{(2n+1)^2\pi^2}\right)\cdot \\ &\qquad \cdot\cos\frac{2n+1}{2c}\pi z, \\ z^4 &= \sum_0^\infty (-1)^n \frac{4c^4}{(2n+1)\pi}\left(1-\frac{48}{(2n+1)^2\pi^2}+\right. \\ &\qquad \left.+\frac{384}{(2n+1)^4\pi^4}\right)\cos\frac{2n+1}{2c}\pi z \end{aligned}\right\} (25')$$

und dabei auch die Bedingung (10) beachtet wurde.

Endlich soll die Größe u für $r=a$ und $z=c$, um auch Punkt 4 (siehe oben) der Oberflächenbedingungen zu erfüllen, einer bestimmten Länge σ gleich sein; setzen wir σ gleich Null, so tritt unsere Aufgabe in Erscheinung.

$$\sigma = \bar{a}a+ba^3+\bar{c}a^5+dac^2+ea^3c^2+fac^4. \quad (28)$$

Hiemit wären die Oberflächenbedingungen erschöpft.

Aus den Gleichungen (10) bis (28) können die Konstanten gerechnet werden.

Zunächst ergibt sich aus (19):

$$\bar{c} = -\frac{m}{6}\frac{\lambda+2\mu}{\lambda} \quad (\alpha)$$

aus (15):

$$e = \frac{2m}{\lambda}(3\lambda+4\mu), \tag{β}$$

aus (12):

$$l = -\frac{8m}{3}\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda}, \tag{γ}$$

aus (16):

$$f = -\frac{4m}{3}(5\lambda+6\mu), \tag{δ}$$

aus (13):

$$i = \frac{8}{15}\frac{m}{\lambda}(5\lambda+4\mu). \tag{ε}$$

Infolge (25) lautet (27):

$$[2d(\lambda+\mu)+3h\lambda]+a^2[2(2\lambda+3\mu)e+3\lambda l]+ \\ +c^2[2f(\lambda+\mu)+5i\lambda] = 0. \tag{27a}$$

Eliminiert man aus (27a) und (11) das h, so erhält man die erste Beziehung zwischen d und k. Verbindet man (20) mit (14) unter Berücksichtigung von (α) bis (ε), so ergibt sich durch Elimination von b die zweite Beziehung zwischen d und k. Es können also d und k berechnet werden; das Resultat ist:

$$d = \frac{4mc^2(45\lambda^2+70\lambda\mu+24\mu^2)}{3\lambda(5\lambda+4\mu)} - \\ -\frac{2ma^2(13\lambda+12\mu)(3\lambda+4\mu)}{\lambda(5\lambda+4\mu)}, \tag{ζ}$$

$$k = \frac{4mc^2(55\lambda^2+102\mu\lambda+48\mu^2)}{3\lambda(5\lambda+4\mu)} - \frac{2ma^2(13\lambda+12\mu)}{(5\lambda+4\mu)}. \tag{η}$$

b ergibt sich aus (14):

$$b = -\frac{mc^2(55\lambda^2+92\mu\lambda+36\mu^2)}{3\lambda(5\lambda+4\mu)} + \\ +\frac{ma^2(13\lambda+12\mu)(\lambda+2\mu)}{2\lambda(5\lambda+4\mu)}. \tag{ϑ}$$

Endlich folgt aus (11):

$$h = -\frac{8mc^2(45\lambda^2+80\mu\lambda+36\mu^2)}{9\lambda(5\lambda+4\mu)} + \\ + \frac{4ma^2(13\lambda+12\mu)(3\lambda+2\mu)}{3\lambda(5\lambda+4\mu)}. \quad (\varkappa)$$

Setzt man in (25) die Werte (α) bis (ε) ein, so erhalten wir:

$$2(\lambda+\mu)\bar{a}+\lambda g = -\frac{2ma^4(109\lambda^2+196\mu\lambda+88\mu^2)\mu}{(3\lambda(5\lambda+4\mu)} + \\ + \frac{2mc^2a^2\mu(145\lambda^2+252\mu\lambda+108\mu^2)}{3\lambda(5\lambda+4\mu)} \quad (25a)$$

und aus (21) folgt durch Substitution derselben Werte:

$$2\lambda\bar{a}+(\lambda+2\mu)g = \frac{160mc^4(\lambda+\mu)(3\lambda+2\mu)\mu}{3\lambda(5\lambda+4\mu)} - \\ - \frac{16ma^2c^2\mu(13\lambda+12\mu)(\mu+\lambda)}{\lambda(5\lambda+4\mu)} - Q. \quad (21a)$$

Aus ($25a$) und ($21a$) folgt:

$$\bar{a} = \frac{-ma^4(\lambda+2\mu)(109\lambda^2+196\mu\lambda+89\mu^2)}{3\lambda(5\lambda+4\mu)(3\lambda+2\eta)} - \\ - \frac{80mc^4(\lambda+\mu)}{3(5\lambda+4\mu)} + \frac{mc^2a^2(145\lambda^2+252\mu\lambda+108\mu^2)(\lambda+2\mu)}{3\lambda(5\lambda+4\mu)(3\lambda+2\mu)} + \\ + \frac{8ma^2c^2(13\lambda+12\mu)(\mu+\lambda)}{(5\lambda+4\mu)(3\lambda+2\mu)} + \frac{\lambda Q}{2\mu(3\lambda+2\mu)}, \quad (\lambda)$$

$$g = \frac{2ma^4(109\lambda^2+196\mu\lambda+88\mu^2)}{3(5\lambda+4\mu)(3\lambda+2\mu)} + \frac{160mc^4(\lambda+\mu)^2}{3\lambda(5\lambda+4\mu)} - \\ - \frac{(\lambda+\mu)Q}{\mu(3\lambda+2\mu)} - \frac{16ma^2c^2(13\lambda+12\mu)(\lambda+\mu)^2}{\lambda(5\lambda+4\mu)(3\lambda+2\mu)} - \\ - \frac{2mc^2a^2(145\lambda^2+252\mu\lambda+108\mu^2)}{3(5\lambda+4\mu)(3\lambda+2\mu)}. \quad (\mu)$$

Aus (26) folgt mit Benützung von (25), (27) und (α) bis (ϰ):

$$(-1)^n \frac{64mc^4\mu(7\lambda+6\mu)}{3\lambda(2n+1)\pi}\left(1-\frac{28}{(2n+1)^2\pi^2}+\frac{192}{(2n+1)^4\pi^4}\right)=$$

$$=\left[\frac{\mu Ka(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}I_1(Ka)+\frac{2\mu}{Ka}I_1(Ka)-\frac{\mu(2\lambda+3\mu)}{2\mu+\lambda}I_0(Ka)\right]A_1-$$

$$-\left[\frac{\mu^2}{(2\mu+\lambda)}I_0(Ka)+\mu Ka\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}I_1(Ka)\right]A_2. \quad (A)$$

Aus (24) ergibt sich mit Hinblick auf (10):

$$(-1)^n\frac{8}{(2n+1)^2\pi^2}\left[\frac{8mc^3a(99\lambda^2+172\mu\lambda+72\mu^2)}{3\lambda(5\lambda+4\mu)}-\right.$$

$$\left.-\frac{128ma^3c(\lambda+\mu)^2}{\lambda(5\lambda+4\mu)}\right]-$$

$$-\frac{1024mac^3(\lambda+\mu)}{\lambda(2n+1)^2\pi^2}\left(1-\frac{8}{(2n+1)^2\pi^2}\right)\cdot(-1)^n=$$

$$=A_1\left[\frac{Ka(\lambda+\mu)}{(\lambda+2\mu)}I_0(Ka)-I_1(Ka)\right]-$$

$$-A_2\left[\frac{Ka(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}I_0(Ka)+I_1(Ka)\right]. \quad (B)$$

Schreiben wir *(A)* und *(B)* in der abgekürzten Form:

$$4mM=A_1O+A_2P, \quad (A')$$

$$4mN=A_1Q+A_2R, \quad (B')$$

worin:

$$M=(-1)^n\frac{16c^4\mu(7\lambda+6\mu)}{3\lambda(2n+1)\pi}\cdot$$

$$\cdot\left(1-\frac{28}{(2n+1)^2\pi^2}+\frac{192}{(2n+1)^4\pi^4}\right), \quad (29)$$

$$N = (-1)^n \frac{16ac}{(2n+1)^2\pi^2\lambda(5\lambda+4\mu)} \cdot$$

$$\cdot\left[\frac{c^2(99\lambda^2+172\mu\lambda+72\mu^2)}{3} - 16a^2(\lambda+\mu)^2\right] -$$

$$-(-1)^n\left(1-\frac{8}{(2n+1)^2\pi^2}\right)\frac{256(\lambda+\mu)ac^3}{\lambda(2n+1)^2\pi^2}, \quad (30)$$

$$O = -\frac{\mu}{2\mu+\lambda}(2\lambda+3\mu)I_0(Ka)+\frac{2\mu}{Ka}I_1(Ka)+$$

$$+\frac{\mu Ka(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}I_1(Ka), \quad (31)$$

$$P = -\frac{\mu^2}{2\mu+\lambda}I_0(Ka) - \mu Ka\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}I_1(Ka), \quad (32)$$

$$Q = \frac{Ka(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}I_0(Ka) - I_1(Ka), \quad (33)$$

$$R = -\frac{Ka(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}I_0(Ka) - I_1(Ka). \quad (34)$$

Also ist abgekürzt geschrieben:

$$A_1 = 4m\frac{MR-NP}{OR-PQ}, \quad (\nu)$$

$$A_2 = 4m\frac{ON-QM}{OR-PQ}, \quad (\varrho)$$

worin die Werte von (29) bis (34) einzusetzen sind. Bis jetzt wurden alle Konstanten durch m ausgedrückt, m aber kann aus (28) gefunden werden.

Setzt man darin die Werte für $\bar{a}$, b, $\bar{c}$, d, e, f ein, so erhält man m:

$$m = -\frac{1}{4}\left(\sigma - \frac{\lambda a Q}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\right)\cdot$$

$$\frac{6\lambda(5\lambda+4\mu)(3\lambda+2\mu)}{10a^3c^3(7\lambda^3+34\mu\lambda^2+34\mu^2\lambda^2+12\mu^3)+a^5(\lambda+2\mu)(\lambda+\mu)\times(29\lambda+28\mu)}. \quad (\tau)$$

Die Spannungen ergeben sich aus (17) mit Hilfe der gefundenen Werte:

$$Z_z = -Q+4m\Bigg\{\frac{40c^4(\lambda+\mu)(3\lambda+2\mu)\mu}{3\lambda(5\lambda+4\mu)} -$$

$$-\frac{4a^2c^2\mu(13\lambda+12\mu)(\mu+\lambda)}{(5\lambda+4\mu)\lambda}+\frac{16\mu(\lambda+\mu)}{3\lambda}z^4+$$

$$+\frac{4(\lambda+\mu)\mu}{3\lambda(5\lambda+4\mu)}[3a^2(13\lambda+12\mu)-2c^2(25\lambda+18\mu)]z^2-$$

$$-\frac{8\mu(\lambda+\mu)}{\lambda}r^2z^2+\frac{8\mu(\lambda+\mu)}{\lambda}r^2c^2+$$

$$+\sum\Bigg\{\frac{A_2}{4m}\mu\Bigg[\frac{3\lambda+4\mu}{\lambda+2\mu}I_0(Kr)+\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}(Kr)I_1(Kr)\Bigg]\cos(Kz)+$$

$$+\sum\frac{A_1}{4m}\mu\Bigg[-\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}I_0(Kr)-\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}KrI_1(Kr)\Bigg]\Bigg\}\cos(Kz)\Bigg\}, \quad (35)$$

$$R_r = 4m\Bigg\{-\frac{a^4(109\lambda^2+196\mu\lambda+88\mu^2)}{6\lambda(5\lambda+4\mu)}+$$

$$+\frac{a^2c^2\mu(145\lambda^2+252\mu\lambda+108\mu^2)}{6\lambda(5\lambda+4\mu)}-$$

$$-\frac{r^2c^2\mu(145\lambda^2+252\mu\lambda+108\mu^2)}{6\lambda(5\lambda+4\mu)}+$$

$$+\frac{a^2r^2\mu(91\lambda^2+162\mu\lambda+72\mu^2)}{4\lambda(5\lambda+4\mu)}-\frac{r^4\mu(11\lambda+10\mu)}{12\lambda}+$$

$$+\frac{2z^2c^2\mu(7\lambda+6\mu)}{3\lambda}-\frac{z^2a^2\mu(13\lambda+12\mu)}{\lambda}+$$

$$+\frac{z^2r^2\mu(13\lambda+12\mu)}{\lambda}-\frac{2z^4\mu(7\lambda+6\mu)}{3\lambda}+$$

$$+\sum\Bigg\{\frac{A_1}{4m}\Bigg[\frac{2\mu}{Kr}I_1(Kr)+\frac{\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}I_1(Kr)Kr-\frac{\mu(2\lambda+3\mu)}{2\mu+\lambda}I_0(Kr)\Bigg]+$$

$$+\sum\frac{A_2}{4m}\Bigg[-I_0(Kr)\frac{\mu^2}{2\mu+\lambda}-\frac{\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}KrI_1(Kr)\Bigg]\Bigg\}\cos(Kz)\Bigg\}, \quad (36)$$

$$T_t = 4m\left\{-\frac{a^4(109\lambda^2+196\mu\lambda+88\mu^2)\mu}{6\lambda(5\lambda+4\mu)}+\right.$$

$$+\frac{a^2c^2\mu(145\lambda^2+252\mu\lambda+108\mu^2)}{6\lambda(5\lambda+4\mu)}-$$

$$-\frac{r^2c^2\mu(35\lambda^2+68\mu\lambda+36\mu^2}{6\lambda(5\lambda+4\mu)}+\frac{a^2r^2\mu(65\lambda^2+86\mu\lambda+24\mu^2)}{4\lambda(5\lambda+4\mu)}-$$

$$-\frac{r^4\mu(7\lambda+2\mu)}{12\lambda}+z^2c^2\frac{2\mu(7\lambda+6\mu)}{3\lambda}-\frac{z^2a^2\mu(13\lambda+12\mu)}{\lambda}+$$

$$+\frac{r^2z^2\mu(7\lambda+4\mu)}{\lambda}-z^4\frac{2\mu}{3\lambda}(7\lambda+6\mu)+$$

$$+\sum\left\{\frac{A_1}{4m}\left[\frac{\mu^2}{\lambda+2\mu}I_0(Kr)-\frac{2\mu}{Kr}I_1(Kr)\right]-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{A_2}{4m}I_0(Kr)\frac{\mu^2}{\lambda+2\mu}\right\}\cos(Kz)\right\}, \quad (37)$$

$$\tau = 4\mu m\left\{\frac{2c^2(99\lambda^2+172\mu\lambda+72\mu^2)rz}{3\lambda(5\lambda+4\mu)}-\right.$$

$$-\frac{4a^2(13\lambda+12\mu)(\lambda+\mu)rz}{\lambda(5\lambda+4\mu)}-\frac{32}{3\lambda}(\lambda+\mu)rz^3+\frac{4(\lambda+\mu)}{\lambda}r^3z+$$

$$+\sum\left\{\frac{A_1}{4m}\left[-\frac{Kr(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}I_0(Kr)+I_1(Kr)\right]+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{A_2}{4m}\left[\frac{Kr(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}I_0(Kr)+I_1(Kr)\right]\right\}\times\sin(Kz)\right\}. \quad (38)$$

Wir wollen jetzt unsere Formeln für den Fall reiner Druckbeanspruchung, wobei also von der an den Zylinderbasen auftretenden Reibung abgesehen wird, spezialisieren. Dann sind die drei Hauptdilatationen

$$\lambda_1 = -\frac{Q(\lambda+\mu)}{\mu(3\lambda+2\mu)}, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{\lambda Q}{2\mu(3\lambda+2\mu)}.$$

Für λ_2 können wir aber schreiben

$$\lambda_2 = \frac{du}{dr} = \frac{\lambda Q}{2\mu(3\lambda+2\mu)}.$$

Integrieren wir die letzte Gleichung von 0 bis a, so erhalten wir die Verschiebung eines Punktes der Zylindermantelfläche in der Richtung des Radius, wenn auf die Zylinderbasen die gleichmäßig verteilte Last $-Q$ wirkt

$$\int_0^a du = \sigma_1 = \int_0^a \frac{\lambda Q dr}{2\mu(3\lambda+2\mu)} = \frac{\lambda Q a}{2\mu(3\lambda+2\mu)}.$$

Für diesen Wert von σ wird aber aus (35) bis (38), wenn der Wert für m aus (τ) eingesetzt gedacht ist:

$$Z_z = -Q, \quad R_r = T_t = \tau = 0,$$

was eine Probe für die Richtigkeit unserer Rechnung ist.

Nun gehen wir daran, unseren allgemeinen Fall auf ein besonderes Beispiel anzuwenden. Für die leichtere Berechnung der Bessel'schen Funktionen zweiter Art empfiehlt es sich, mit Rücksicht auf Gleichung (18), die Höhe $2c$ des Zylinders gleich πa zu setzen. Das Verhältnis der Höhe des Zylinders zum Durchmesser ist dann $1 \cdot 57 : 1$.

σ nehmen wir Punkt (4) unserer ursprünglichen Oberflächenbedingungen folgend gleich 0.

Ferner sei

$$\lambda = 2\mu,$$

was $\Theta = 1$ und $\bar{m} = 3$ entspricht, wenn $\bar{m}$ die sogenannte Poisson'sche Konstante ist.

Mit diesen Werten ergeben sich:

$$m = +\frac{aQ}{32\mu}\frac{0 \cdot 2003}{a^5}, \qquad \bar{c} = -\frac{aQ}{40}\frac{0 \cdot 0834}{a^5},$$

$$l = \frac{aQ}{16\mu}\frac{1 \cdot 015}{a^5};$$

$$
\left.\begin{aligned}
e &= -\frac{aQ}{16\mu}\frac{1\cdot0682}{a^5}, \qquad f = -\frac{aQ}{32}\cdot\frac{2\cdot136}{a^5}, \\
& \qquad\qquad w_2 = \frac{aQ}{40\mu}\frac{0\cdot9347}{a^5}; \\
w_1 &= -\frac{aQ}{24\mu}\frac{2\cdot2497}{a^3}, \qquad b = -\frac{aQ}{24\mu}\frac{1\cdot5338}{a^3}, \\
& \qquad\qquad d = \frac{aQ}{16\mu}\cdot\frac{1\cdot3295}{a^3}; \\
k &= \frac{aQ}{16\mu}\frac{5\cdot0104}{a^5}, \qquad a = -\frac{aQ}{8\mu}\frac{0\cdot1323}{a} + \frac{Q}{8\mu}, \\
& \qquad\qquad g = \frac{aQ}{8\mu}\frac{1\cdot0256}{a} - \frac{3Q}{8\mu}.
\end{aligned}\right\} (39)
$$

Zur Berechnung von A_1 und A_2 benötigen wir die Werte (29) bis (34):

$$
\left.\begin{aligned}
M &= (-1)^n \frac{10a^4\mu}{3(2n+1)}\left(\pi^3 - \frac{28\pi}{(2n+1)^2} + \frac{192}{(2n+1)^4\pi}\right), \\
N &= (-1)^n \frac{2a^4}{(2n+1)^2.7\pi}\left[\frac{\pi^2}{3}\cdot 203 - 144\right] - \\
& \qquad -(-1)^n\left(\pi - \frac{8}{(2n+1)\pi}\right)\frac{48a^4}{(2n+1)^2}, \\
O &= -\frac{7\mu}{4}I_0(2n+1) + \mu\cdot\frac{8+3(2n+1)^2}{4(2n+1)}I_1(2n+1), \\
P &= -\frac{\mu}{4}I_0(2n+1) - \frac{3}{4}\mu(2n+1)I_1(2n+1), \\
Q &= -I_1(2n+1) + \frac{3}{4}(2n+1)I_0(2n+1), \\
R &= -I_1(2n+1) - \frac{3(2n+1)}{4}I_0(2n+1).
\end{aligned}\right\} (40)
$$

Die daraus sich ergebenden Werte von A_1 und A_2 sind in folgender Tabelle zusammengestellt; es ergab sich leider dabei die Notwendigkeit, verschiedene Werte von I_1 und I_0 zu berechnen, da die Bessel'schen Funktionen zweiter Art, soweit mir bekannt, nur bis zum Argumentwerte 6 berechnet sind. Die berechneten Funktionswerte sind:

$I_0(7)$	$=$ 168·594904,	$I_1(7)$	$=$ 156·039096,
$I_0(9)$	$=$ 1093·590156,	$I_1(9)$	$=$ 1030·918409,
$I_0(11)$	$=$ 7268·431797,	$I_1(11)$	$=$ 6948·858628,
$I_0(13)$	$=$ 49433·14485,	$I_1(13)$	$=$ 47502·98721,
$I_0(15)$	$=$ 339651·567,	$I_1(15)$	$=$ 328129·904,
$I_0(17)$	$=$ 2353951·893,	$I_1(17)$	$=$ 2284589·231.

Ferner ergeben sich aus (35) bis (38):

$$Z_z = -Q + \frac{aQ}{8}\left[\frac{5\cdot8859}{a} + \frac{1\cdot6024z^4}{a^5} - \frac{6\cdot3391z^2}{a^3} - \right.$$
$$\left. - \frac{2\cdot4036r^2z^2}{a^5} + \frac{5\cdot9301}{a^3}r^2\right] - \frac{aQ}{8}\sum\ldots \quad (35a)$$

$$R_r = \frac{aQ}{8}\left[\frac{2\cdot4142}{a} - \frac{2\cdot1471r^2}{a^3} - \frac{0\cdot2671r^4}{a^5} - \frac{0\cdot5112z^2}{a^3} + \right.$$
$$\left. + \frac{3\cdot8057z^2r^2}{a^5} - \frac{1\cdot3353z^4}{a^5}\right] - \frac{aQ}{8}\sum\ldots \quad (36a)$$

$$T_t = \frac{aQ}{8}\left[\frac{2\cdot414}{a} - \frac{0\cdot5112z^2}{a^3} + \frac{3\cdot8057z^2r^2}{a^5} - \frac{1\cdot3353z^4}{a^5} - \right.$$
$$\left. - \frac{0\cdot1030r^2}{a^3} - \frac{0\cdot1335r^4}{a^5}\right] - \frac{aQ}{8}\sum\ldots \quad (37a)$$

$$\tau = -\frac{aQ}{8}\left[-\frac{6\cdot2920}{a^3}rz + \frac{3\cdot2048rz^3}{a^5} - \frac{1\cdot2018r^3z}{a^5}\right] -$$
$$- \frac{aQ}{8}\sum\ldots \quad (38a)$$

Tabelle 1

$2c = \pi a.$

$n =$	0	1	2	3	4
$\frac{M}{a^4\mu}$	13·85708	−24·43001	18·390334	− 13·91947	11·085049
$\frac{N}{a^4}$	19·075770	9·952667	− 2·930639	2·05430	− 1·254891
$\frac{O}{\mu}$	− 0·661429	2·989274	53·323138	568·746791	5274·00925
$\frac{P}{\mu}$	− 0·740385	−10·115281	− 98·068626	− 861·354041	− 7232·096739
Q	0·384391	7·028414	77·813878	729·084182	6350·815459
R	− 1·514709	−14·935154	− 126·485162	−1041·162374	− 8412·652277
$\frac{MR}{a^4\mu}$	−20·989449	364·865962	−2326·104338	14492·428792	−93254·662965
$\frac{-NP}{a^4\mu}$	14·123414	100·674023	− 385·472366	1769·479604	− 9075·49306
$\frac{ON}{a^4\mu}$	−12·617267	29·751249	− 209·594006	1168·376531	− 6618·306804
$\frac{-QM}{a^4\mu}$	− 5·326537	171·704224	−1431·023206	10148·465371	−70399·101007
$\frac{OR}{\mu}$	1·001872	−44·645268	−6744·585642	−592157·7728	−44368406·467
$\frac{-PQ}{\mu}$	0·284597	71·094383	7631·100100	627999·6039	45929711·8199
$\frac{8\mu A_1}{Q}$	− 1·069337	3·5255492	− 0·612655	+ 0·090878	− 0·0131278
$\frac{8\mu A_2}{Q}$	− 2·793804	− 1·525638	− 0·370683	+ 0·063245	− 0·0098806

für A_1 und A_2.

$\lambda = 2\mu$, $\sigma = 0$.

5	6	7	8
−0·176815	− 7·817420	−6 8036785	6·020128
0·837344	− 0·606107	0·456036	0·355475
45871·75645	383954·07653	3140821·8071	25277872·087
− 59145·191399	− 475512·419212	−3776374·312	−29717000·6857
53015·703697	434470·16679	3492950·236	27728297·392
− 66913·420953	− 529476·14821	−4149210·044	32297475·854
614052·085534	−4139137·36635	28229890·868985	−194434933·57
49524·870813	− 288211·4063	1722162·6302	− 10563650·93
38410·439656	− 232717·2555	1432327·8103	− 8985651·5492
486515·307703	−3396435·796	23764910·177	−166927897·162
−306943612·24	−203294524215·65	−13031929220778	−816411438973200
3135623939·079	206595961954·5	13190687366459	824001829677297
+ 0·002008	−0·000269	0·0000377906	− 0·0000054096
+ 0·001588	−0·0002201	+ 0·0000317896	− 0·0000046421

Die Punkte nach den Summenzeichen ersetzen die aus Tabelle 1 zu berechnenden Ausdrücke, in welche noch folgende aus Tabellen nicht entnehmbare Bessel'sche Funktionswerte eintreten:

$$I_1\left(\frac{13}{2}\right) = 97{\cdot}73492, \qquad I_0\left(\frac{13}{2}\right) = 107{\cdot}01052,$$

$$I_1\left(\frac{27}{4}\right) = 123{\cdot}463482, \qquad I_0\left(\frac{27}{4}\right) = 133{\cdot}817911,$$

$$I_1\left(\frac{33}{4}\right) = 506{\cdot}43374, \qquad I_0\left(\frac{33}{4}\right) = 540{\cdot}32436.$$

Die Hauptspannungen sind:

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= T_t, \\ p_2 &= \frac{Z_z+R_r}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(Z_z-R_r)^2+4\tau^2}, \\ p_3 &= \frac{Z_z+R_r}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(Z_z-R_r)^2+4\tau^2}. \end{aligned}\right\} \quad (41)$$

Daraus folgen die drei Hauptdilatationen λ_1, λ_2, λ_3 mit den Werten:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2\mu}\left[p_1 - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}(p_1+p_2+p_3)\right] = \\ &\qquad = \frac{1}{2\mu}\left[T_t - \frac{\lambda}{(3\lambda+2\mu)}(T_t+Z_z+R_r)\right], \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2\mu}\left[p_2 - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}(p_1+p_2+p_3)\right] = \frac{1}{2\mu}\left[\frac{Z_z+R_r}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}\sqrt{(Z_z-R_r)^2+4\tau^2} - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}(T_t+Z_z+R_r)\right], \\ \lambda_3 &= \frac{1}{2\mu}\left[p_3 - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}(p_1+p_2+p_3)\right] = \frac{1}{2\mu}\left[\frac{Z_z-R_r}{2} - \right. \\ &\qquad \left. - \frac{1}{2}\sqrt{(Z_z-R_r)^2+4\tau^2} - (T_t+Z_z+R_r)\right]. \end{aligned}\right\} \quad (42)$$

Daher ist das elastische Potential

$$f = -\mu\left[\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2+\frac{\lambda}{2\mu}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2\right]:$$

$$f = -\frac{\lambda}{2(3\lambda+2\mu)^2}(T_t+Z_z+R_r)^2 -$$

$$-\frac{\left[\frac{2(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu}T_t-\frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}(Z_z-R_r)\right]^2}{4\mu}-$$

$$-\frac{1}{8\mu}[(Z_z-R_x)^2+4\tau^2]-\frac{1}{2\mu}\left[\frac{\lambda^2}{(3\lambda+2\mu)^2}T_t^2+\right.$$

$$\left.+\frac{(\lambda+2\mu)^2}{4(3\lambda+2\mu)^2}(Z_z+R_r)^2-\frac{(\lambda+2\mu)\lambda}{(3\lambda+2\mu)^2}(Z_z+R_r)T_t\right]. \quad (42)$$

Ist $\lambda = 2\mu$, so wird

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{1}{8\mu}[3T_t-Z_z-R_r],\\ \lambda_2 &= \frac{1}{8\mu}[R_r+Z_z-T_t+2\sqrt{(Z_z-R_r)^2+4\tau^2}],\\ \lambda_3 &= \frac{1}{8\mu}[R_r+Z_z-T_t-2\sqrt{(Z_z-R_r)^2+4\tau^2}],\end{aligned}\right\} \quad (41a)$$

und

$$f = -\frac{1}{64\mu}[(3T_t-Z_z-R_r)^2+2(R_r+Z_z-T_t)^2+$$
$$+8(Z_z-R_r)^2+32\tau^2+(R_r+Z_z+T_t)^2]. \quad (42a)$$

Wir setzen

$$\left.\begin{aligned}3T_t-Z_z-R_r &= A,\\ R_r+Z_z-T_t &= B,\\ Z_z-R_r &= C,\\ R_r+Z_z+T_t &= E,\\ \tau &= D.\end{aligned}\right\} \quad (43)$$

Daher können wir schreiben:

$$f = \frac{1}{64\,\mu^2}[A^2+2B^2+8C^2+E^2+32D^2]. \qquad (42b)$$

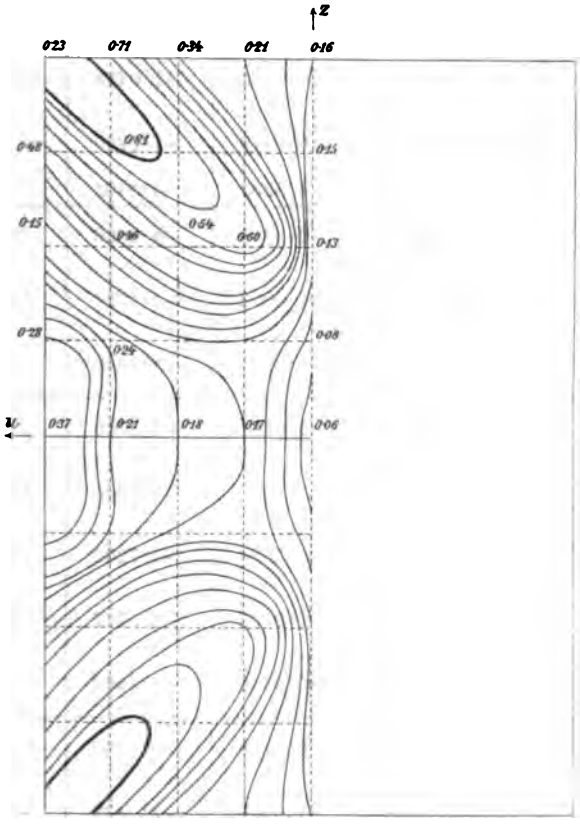
A, B, C, E ergeben sich aus (35a) bis (38a) mit:

$$\left.\begin{aligned}
A &= Q+\frac{aQ}{8}\Big[-\frac{1\cdot0575}{a}+\frac{5\cdot3167z^2}{a^3}+\frac{10\cdot015z^2r^2}{a^5}- \\
&\quad -\frac{4\cdot27306z^4}{a^5}-\frac{4\cdot0919r^2}{a^3}-\frac{0\cdot1334r^4}{a^5}\Big]-\frac{aQ}{8}\sum\cdots \\
B &= -Q+\frac{aQ}{8}\Big[\frac{5\cdot8859}{a}+\frac{1\cdot6024z^4}{a^5}-\frac{6\cdot3391z^2}{a^3}- \\
&\quad -\frac{2\cdot4036r^2z^2}{a^5}+\frac{3\cdot8859r^2}{a^3}-\frac{0\cdot1336r^4}{a^5}\Big]-\frac{aQ}{3}\sum\cdots \\
C &= -Q+\frac{aQ}{8}\Big[\frac{3\cdot4717}{a}+\frac{2\cdot9377z^4}{a^5}-\frac{5\cdot8278z^2}{a^3}- \\
&\quad -\frac{6\cdot2093r^2z^2}{a^5}+\frac{8\cdot0772r^2}{a^3}+0\cdot2671\frac{r^4}{a^5}\Big]-\frac{aQ}{8}\sum\cdots \\
E &= -Q+\frac{aQ}{8}\Big[+\frac{10\cdot7142}{a}-7\cdot3615\frac{z^2}{a^3}-\frac{1\cdot068z^4}{a^5}+ \\
&\quad +\frac{5\cdot2078z^2r^2}{a^5}+\frac{3\cdot6800}{a^3}r^2-\frac{0\cdot4006r^4}{a^5}\Big]-\frac{aQ}{8}\sum\cdots
\end{aligned}\right\} \qquad (43a)$$

In folgender Tabelle 2 sind die Werte von A, B, C, D, E, f, u, w, T, nach (43a), (37a) und (9) für verschiedene Werte von r und z zusammengestellt.

Die Zahlen der folgenden Tabelle 2 sind dann, wenn für sie die Berechnung Bessel'scher Funktionswerte notwendig war, nur bis zur zweiten Dezimalstelle als richtig zu betrachten.

In den beiden folgenden Zeichnungen sind die Kurven gleichen elastischen Potentials (Fig. 1) und die Gestalt des Zylinders nach der elastischen Deformation (Fig. 2, p. 546) dargestellt.



$\lambda = 2\mu, \quad \sigma = 0.$

Fig. 1.

In Fig. 1 wurde die Maximalkurve des elastischen Potentials, das die Größe $-0{\cdot}81\,\frac{Q^2}{\mu}$ besitzt, stark hervorgehoben. Aus dem Vorlauf der Kurven ersieht man, daß die Flächen gleichen Potentials gegen die Basen des Zylinders zu teilweise annähernd Kegelflächen mit der Zylinderachse als Rotationsachse sind,

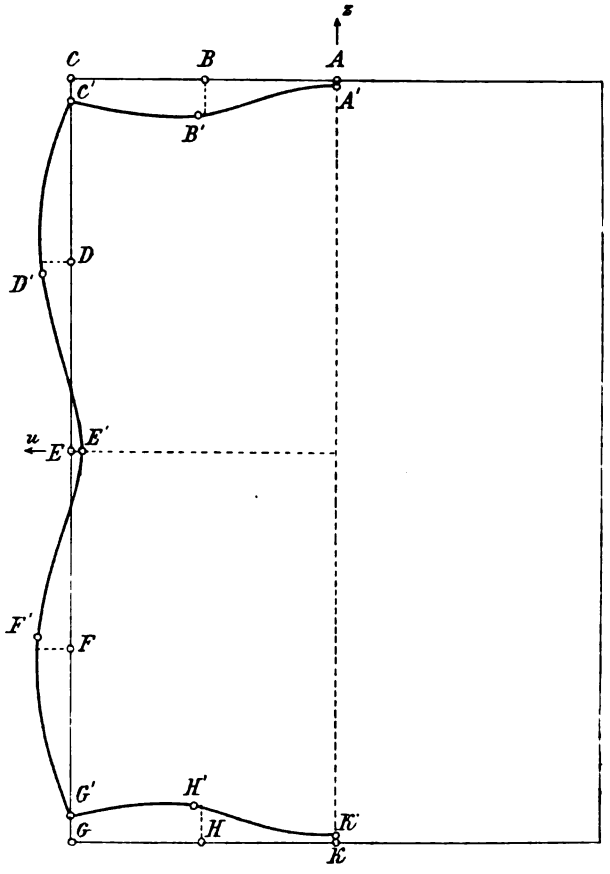
$\lambda = 2\mu$ Tabelle 2

z	r	$A:Q$	$B:Q$	$C:Q$	$D:Q$
0	0	0·8678	−0·2643	−0·5660	—
0	$\frac{a}{4}$	1·2108	−0·9173	−1·0453	0
0	$\frac{a}{2}$	1·1618	−0·9173	−1·0453	0
0	$\frac{3a}{4}$	1·0905	−0·9779	−1·0759	0
0	a	1·0834	−1·3262	−1·4462	0
$\frac{c}{4}$	0	0·9576	−0·3815	−0·6696	0
$\frac{c}{4}$	$\frac{3a}{4}$	1·506	−1·0052	−1·1124	0·1864
$\frac{c}{4}$	a	1·5203	−1·3364	.1·2446	0
$\frac{c}{2}$	0	1·0901	−0·6761	−0·8756	0
$\frac{c}{2}$	$\frac{a}{4}$	2·4841	−1·3372	−1·8565	0·1258
$\frac{c}{2}$	$\frac{a}{2}$	2·5072	−1·2394	−1·7236	0·2280
$\frac{c}{2}$	$\frac{3a}{4}$	2·5139	−1·0729	−1·5777	0·1932
$\frac{c}{2}$	a	2·6657	−0·4445	−0·6660	0
$\frac{3c}{4}$	0	0·7614	−0·9766	−0·8696	0
$\frac{3c}{4}$	$\frac{3a}{4}$	3·3618	−1·0648	−2·1122	−0·1835
$\frac{3c}{4}$	a	3·8445	−0·5945	−0·9734	0
c	0	−0·7440	−0·9972	−0·1276	0
c	$\frac{a}{4}$	−0·5831	−1·0158	−0·1840	−0·3416
c	$\frac{a}{2}$	−0·1015	−1·0647	−0·3062	−0·6575
c	$\frac{3a}{4}$	0·6964	−1·1451	−0·6265	−1·0710
c	a	1·804	−1·2683	−1·000	0

für f, u, w und T_t. $\sigma = 0$

$E:Q$	$f:\frac{Q^2}{\mu}$	$u:\frac{Qa}{\mu}$	$w:\frac{Qa}{\mu}$	$T_t:Q$
0·3392	−0·055	0	0	0·3018
−0·568	−0·1716	—	—	0·1574
−0·6744	−0·1846	—	—	0·1227
−0·9112	−0·205	—	—	0·0563
−1·4920	−0·3713	−0·1292	0	−0·1214
0·1936	−0·0756	—	—	0·2879
0·5600	−0·2437	—	—	0·2505
0·600	−0·2827	—	—	0·0918
−0·2792	−0·1262	—	—	0·207
−0·1984	−0·5988	—	—	0·5734
+0·0264	−0·5422	—	—	0·6339
0·3632	−0·4608	—	—	0·7205
0·9832	−0·1450	0·4005	−0·1450	1·1105
1·1944	−0·1556	—	—	−0·1084
1·1360	−0·8051	—	—	1·1304
2·7224	−0·4754	—	—	1·6303
−2·7432	−0·1594	0	−0·0962	−0·8721
−2·6120	−0·2058	—	—	−0·7995
−2·224	−0·3407	−0·0349	−0·5037	−0·5827
−1·5984	−0·7102	—	—	−0·2146
−0·7312	−0·2344	0	−0·2973	0·2698

gegen die Mitte zu jedoch Zylinderflächen ähneln mit derselben Achse wie die genannten Kegel. Dieses theoretische Ergebnis steht in einer merkwürdigen Übereinstimmung mit der Tatsache,



$\lambda = 2\mu, \quad \sigma = 0.$

Fig. 2.

daß annähernd homogen hergestellte Würfel, deren Basen einer analogen Druckwirkung ausgesetzt werden, wie wir bei unserem Zylinder angenommen haben, beim Bruch in solche Kegel und Zylinder zerfallen.[1] Bevor ich nun die Versuchsresultate mitteile, welche ich selbst erhalten habe, möchte ich noch einiges über die Reibung an den Zylinderbasen sagen.

[1] C. Bach, Elastizitäts- und Festigkeitslehre, p. 156.

Nach dem eingangs dieses Teiles Gesagten können wir von Reibung nur in einem beschränkten Sinne sprechen, nämlich nur von jenen Fällen, in welchen längs der Berührungsfläche der reibenden Körper eine gleichmäßige, normal auf sie stehende Drucküübertragung stattfindet. Nehmen wir also solche Stoffe, für welche eine gleichmäßige Drucküübertragung annähernd möglich ist, so wird die Reibung R als Integral der über die Berührungsflächen verbreiteten Schubspannung aufgefaßt werden können, in unserem betrachteten Beispiel also als Integral der Schubspannungen über die Basisfläche des Zylinders. Die in Formel (38) nach Einsetzen von m aus (τ) vorkommende Größe σ ist selbst offenbar eine Funktion von Q und müßte der Zusammenhang mit Q durch Beobachtungen festgestellt werden. σ wird für die zwei drückenden Materialien charakteristisch sein.

Die Sache allgemein zu packen, d. h. die theoretische Herleitung der Reibung für nicht gleichmäßige Drucküübertragung, ist mit ungeheueren theoretischen Schwierigkeiten verknüpft.

Nach (38) ist

$$\tau = \left(\sigma - \frac{\lambda a Q}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\right) Z\{rS + Tr^3 + \Sigma r V I_0(Kr) + \\ + W I_1(Kr)\}. \quad (44)$$

Z, S, T, V, W sind nur Funktionen von a, c, also der Dimensionen des Zylinders und der Elastizitätskonstanten λ, μ, und haben die Bedeutung

$$\left.\begin{aligned} Z &= -\frac{6\mu\lambda(5\lambda+4\mu)(3\lambda+2\mu)}{10a^3c^2(7\lambda^3+34\mu\lambda^2+34\mu^2\lambda^2+12\mu^3)+a^5(\lambda+2\mu)(\lambda+\mu)(29\lambda+28\mu)}, \\ S &= \frac{2c^3(99\lambda^2+172\mu\lambda+72\mu^2)}{3\lambda(5\lambda+4\mu)} - \frac{4a^2(13\lambda+12\mu)(\lambda+\mu)c}{\lambda(5\lambda+4\mu)} - \frac{32c^3}{3\lambda}(\lambda+\mu), \\ T &= \frac{4(\lambda+\mu)c}{\lambda}, \\ V &= -\frac{MR-NP}{OR-PQ}\frac{K(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} + \frac{ON-QM}{OR-PQ}\frac{K(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}, \\ W &= \frac{MR-NP}{OR-PQ} + \frac{ON-QM}{OR-PQ}. \end{aligned}\right\} (45)$$

M, N, O, P, Q, R sind aus (29) bis (34) entnehmbar.
Nach Obigem ist die Reibung

$$R = \int_0^{2\pi}\int_0^a \tau\, dr\, d\varphi .$$

Zur Ausführung des Integrals $\int r I_0(Kr)\,dr$ berücksichtige man, daß

$$KrI_0 = KrI_1' + I_1,$$

daher

$$\int_0^a KrI_0\,dr = \int_0^a KrI_1'\,dr + \int_0^a I_1\,dr$$

und das erste Integral rechts partiell integriert:

$$= aI_1(Ka) - \int_0^a I_1(Kr)\,dr + \int_0^a I_1(Kr)\,dr,$$

daher

$$\int_0^a rI_0(Kr)\,dr = \frac{a}{K} I_1(Kr).$$

Ferner ist, da $I_0' = I_1$ ist:

$$\int_0^a I_1(Kr)\,dr = \int_0^a I_1(Kr)\,\frac{d(Kr)}{K} = \frac{1}{K} I_0(Ka).$$

Demgemäß erhalten wir, wenn wir auch noch die übrigen leicht zu berechnenden Integrale auswerten:

$$R = \left[\sigma - \frac{\lambda a Q}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\right]\left[\frac{a^4\pi}{2} TZ + \frac{a^2\pi}{2} SZ + \right.$$
$$\left. + \Sigma V \frac{2\pi}{K} aI_1(Ka) + \frac{W.V}{K} 2\pi I_0(Ka)\right]. \quad (46)$$

Der zweite eckige Klammerausdruck ist bei gegebenem Zylinder konstant und sei gleich Λ gesetzt; daher:

$$R = \left[\sigma - \frac{\lambda a Q}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\right]\Lambda, \quad (46a)$$

worin σ als experimentell zu bestimmende Funktion von Q betrachtet werden muß.

Da σ sicher dem Drucke Q nicht proportional ist, so ist R auch nicht dem Druck proportional. Nur bei sehr hohen Drucken, wo man annehmen kann, daß σ verschwindet, wird R dem Q proportional gesetzt werden dürfen. Aus den Ausdrücken (36) bis (38) für R_r, T_t; τ sehen wir, daß diese Spannungen der Reibung R proportional sind.

Fassen wir das Vorhergehende kurz zusammen, so ergab sich:

1. Die Annahme, daß das Potential der Spannungskräfte ein Maß für die Beanspruchung in einem Punkte eines Körpers sei, für die Erwägungen physikalischer Natur sprechen, braucht in keinem Widerspruche mit den bisherigen Versuchsresultaten, insbesondere den von Prof. Voigt erhaltenen, zu stehen; um jedoch gewisse Erscheinungen, die am Schlusse des Teiles IV besprochen wurden, näher zu erklären, ist die Annahme der Nichtkonstanz der Poisson'schen Größe m notwendig.

2. Eine gleichmäßige Drucksübertragung auf die Basen eines Zylinders zieht eine Krümmung derselben notwendig nach sich, während das Ebenbleiben der Basen die Voraussetzung ungleichmäßiger Drucksübertragung in sich schließt (Gleichung 18, Fig. 2, Hinweis auf N. G. Filon).

3. Die Reibung, als Integral der Schubspannungen längs einer Berührungsfläche von Zylinder und einem zweiten gleichmäßig den Druck übertragenden Körper betrachtet, ist dem Druck nicht proportinal (Gleichung 46 *a*).

4. Die bei einer im Teil V näher geschilderten Belastung eines isotropen Kreiszylinders auftretenden Spannungen R_r T_t und τ sind der Reibung an den Basisebenen proportional [(36) bis (38) und Gleichung (46 *a*)].

VI.

Wir haben im Teil V die Kurven gleichen elastischen Potentials eines Zylinders unter den dort näher auseinandergesetzten Oberflächenbedingungen und Kraftwirkungen berechnet, wobei das Verhältnis des Basisdurchmessers des Zylinders zur Höhe $d : h = 1 : 1 \cdot 57$ und $\lambda = 2\mu$, also $m = 3$ war.

Im Folgenden bringen wir die Resultate von Versuchen, die wir mit Glaszylindern, deren Basisdurchmesser zur Höhe angenähert oder genau in demselben angegebenen Verhältnisse stand, erhalten haben. Wir wählten als Material Glas, weil man von diesem Material, wenn es feingekühlt wie Jenenser Glas ist, am ehesten Isotropie voraussetzen kann; ferner ist nach den Versuchen von Winkelmann mit Jenenser Glas die Poissonsche Größe m für die meisten Sorten zwischen $2 \cdot 5$ und 3 gelegen, wodurch wir uns dem berechneten Spezialfall nähern. Drittens hat das deformierte Glas erfahrungsgemäß sehr kleine Dilatationen selbst bei sehr hoher Belastung, wodurch eine der Voraussetzungen der angewendeten Elastizitätsgleichungen sehr angenähert bis zum vollkommenen Bruche des Materials bestehen bleibt, daher die aus den Versuchen gezogenen Schlüsse gesicherter erscheinen als bei Verwendung von vielen anderen, technisch wichtigen Stoffen, bei welchen die Umstände, welche das Potential der Spannungskräfte bestimmen, viel komplizierter liegen. Man kann auch sagen, daß bei Glas Elastizitätsgrenze und Bruch sehr nahe aneinander liegen werden.

Freilich setzen die Elastizitätsgleichungen auch die Gültigkeit des Hook'schen Gesetzes voraus, das sicher auch innerhalb der Elastizitätsgrenzen nur angenähert besteht; aber die hiedurch notwendig werdenden Korrekturen werden bei sehr kleinen Dilatationen sicher weniger ins Gewicht fallen als bei verhältnismäßig großen, wie z. B. den bei Gußeisen. Ferner kann man bei Glas das erste Auftreten der Sprünge und das Fortschreiten der Zerstörung des Materials bei wachsendem Druck sehr gut verfolgen.

Da endlich nach unserer Anschauung der Hauptgrund der nicht gleichmäßigen Druckübertragung zwischen Druckplatte und Zylinder in der Verschiedenartigkeit der Krümmung von Druckplatte und Zylinderbasen zu suchen ist, so muß, um eine gleichmäßige Druckübertragung der theoretischen Voraussetzung gemäß praktisch wirklich angenähert herzustellen, ein Material gewählt werden, deren Krümmung überhaupt nicht sehr ins Gewicht fällt; und dafür halte ich wieder homogenes Glas am tauglichsten.

Die Druckplatten bestanden aus gehärtetem Stahl und hatten einen Durchmesser von 7·9 *cm*. Die untere der Druckplatten war durch Kugelkontakt beweglich gemacht, die obere war normal auf ihre Fläche beweglich. Der Druck wurde hydraulisch hergestellt. Es ergab sich aus den Versuchen, daß die geringste Nichtparallelität der Druckplatten schon eine sehr bedeutende Exzentrizität des Druckes längs der Zylinderbasen zur Folge hatte. Die verwendeten Glaszylinder waren aus verschiedenen Glassorten hergestellt:

a) aus Flaschenglas,

b) aus böhmischem Kristallglas,

c) aus Jenenser Glas *O* Nr. 3452.

Die Basisflächen wurden bei den unter *b)* und *c)* genannten Gläsern vom Optiker parallel zueinander und normal auf die Erzeugenden geschliffen. Die Untersuchungen wurden mit der Druckfestigkeitsmaschine des mechanisch-technischen Laboratoriums des Prof. Kirsch der hierortigen technischen Hochschule ausgeführt und bin ich dem Konstrukteur dieses Institutes Herrn Dr. Gessner für seine diesbezüglichen Bemühungen zu Dank verpflichtet.

Bevor ich zur Spezialbetrachtung übergehe, will ich jetzt über das Allgemeine in den von mir vorgenommenen Versuchen berichten. Die Zylinder aus Flaschenglas brachen bei 10 bis 15 Tonnen Druck auf eine Druckfläche von 19 cm^2 mit einer kleinen Detonation plötzlich in tausend nach allen Seiten auseinanderspringende Trümmer. Der Grund davon wird in den schon von allem Anfang an im Glase vorhandenen Spannungen zu suchen sein und war auch eine Gesetzmäßigkeit des Zerspringens nach bestimmten Flächen deswegen von vornherein nicht zu erwarten. Böhmisches Kristallglas und insbesondere das Jenenser Glas *O* Nr. 3452 zeigten, wenn die Stahldruckplatte ohne Zwischenlage direkt mit den Basen der Zylinder in Berührung stand, auf eine Fläche von 16 bis 17 cm^2 die ersten Sprünge, welche entweder — und das in den weitaus meisten Fällen — an der Basisfläche selbst oder — und das höchst selten — in der Mantelfläche in einer zur Basisfläche parallelen Ebene in der unmittelbaren Nähe des Basiskreises lagen.

Die ersten Sprünge an den Basisflächen hatten mehr oder weniger konzentrische Richtung (siehe Tafel I, Fig. 3 und 4). Bei weiterer Druckzunahme setzten sich zuerst die konzentrischen Sprünge der Basen längs des gegen die Basisflächen zu liegenden Teiles der Mantelfläche in Zylindererzeugenden fort und drangen auch längs konaxialen Ebenen gegen die Mittel- oder zu ihr parallelen Achse des Zylinders hin vor, und zwar um so weiter, je mehr sie sich von den Basen entfernten (siehe Tafel II, Fig. 7, die Parallelen zur Zylinderachse). Erst bei ziemlich hohem Druck trat zu den konzentrischen Sprüngen ein mehr oder weniger kreisförmig angeordneter Sprung in der Basisebene mit beiläufig um einen halben Zentimeter kleineren Radius als der Umfangskreis, und zwar ausnahmslos bei den Versuchen mit Jenenser Glas hinzu; bei böhmischem Kristallglas zeigte sich der kreisförmige Sprung in der Mehrheit der Fälle (siehe Tafel I, Fig. 4, 5, 6).

Nach dem Auftreten dieses Kreises sprang das Glas auch an der Mantelfläche in zu den Basiskreisen mehr oder weniger parallelen Linien (siehe Fig. 7, Tafel II, die Parallelen zum Basiskreis).

Man konnte so den Druck bis 40 *t* und etwas darüber fortsetzen, ohne daß das Glas vollkommen in Trümmer auseinander fiel. Weiter wurde mit Ausnahme zweier Fälle, von welchen der eine weiter unten beschrieben ist, die Belastung nicht geführt, um der vollständigen Zertrümmerung auszuweichen, wodurch eine Wiedergabe der Sprungfiguren unmöglich geworden wäre.

Aus dem Vorhergehenden glauben wir Folgendes schließen zu dürfen: Die konzentrischen Sprünge zu Anfang des Versuches deuten darauf hin, daß die Druckverteilung keine gleichmäßige gewesen ist, sondern daß im Zentrum der Sprünge anfänglich ein maximaler Druck herrschte. Dieser maximale Druck war auch oft etwas exzentrisch, wie aus den Abbildungen deutlich zu ersehen ist. Erst bei gesteigerter Druckzunahme wurde die Druckverteilung eine gleichmäßigere und es trat dann auch immer an den Basisflächen der bereits beschriebene Kreis auf, welcher nach unserer Anschauung dem dort vorhandenen maximalen Potential entspricht (siehe Fig. 1). Dementsprechend

müssen auch die aus Fig. 7, Tafel II, ersichtlichen, zum Basiskreis parallelen Linien Kurven gleichen Spannungspotentials für gleichmäßige Druckübertragung sein.

Wurde zwischen Zylinderbasen und Druckplatten eine 0·58 *cm* starke Bleiplatte von etwas größerem Durchmesser als der der Basis eingeschaltet, so zeigte sich im Gegensatz zu früher bis 40 *t* auf eine Fläche von 17 cm^2 überhaupt kein Sprung, nur die Bleiplatten wurden schüsselförmig deformiert (siehe Tafel II, Fig. 9). Bei etwas über 40 *t* trat der Bruch plötzlich ein, und zwar zerfiel der Zylinder längs der Mantelfläche in einzelne Säulen *A, B, C, D, E* (siehe Fig. 8, ein Teil der Säulen ist leider herausgefallen), und gegen die Zylinderachse nahm die Zersplitterung immer mehr zu. Die Bleiplatten haben also insofern einen günstigen Einfluß, als sich bis 40 *t* Belastung überhaupt keine Trennung des Materials längs Sprüngen zeigte. Die mutmaßlichen Gründe für dieses merkwürdige Verhalten werden wir in dem speziellen Teil geben, zu dem wir uns nun wenden.

Wir heben aus der größeren Anzahl von Versuchen, die wir anstellten, die Haupttypen heraus:

1. Zylinder aus grünem Flaschenglas. Basisdurchmesser 5·0 *cm*, Höhe 9·0 *cm*, Druckplatten direkt mit den Basen in Berührung. Totale Zersplitterung bei 8 *t*.

2. Zylinder aus Jenenser Glas *O* Nr. 3452. Basisdurchmesser $d = 44{\cdot}7$ *mm*, Höhe $h = 70{\cdot}2$ *mm*, $d:h = 1:1{\cdot}57$; Druckplatten direkt mit den Basen in Berührung. Bei 15 *t* Belastung Auftreten der radialen Sprünge (siehe Tafel I, Fig. 3). Druckverteilung nicht gleichmäßig.

3. Zylinder aus Jenenser Glas *O* Nr. 3452. Basisdurchmesser $d = 45{\cdot}1$ *mm*, Höhe $h = 70{\cdot}85$ *mm*, $d:h = 1:1{\cdot}57$; Druckplatten direkt mit den Basen in Berührung. Bei 36 *t* Belastung Sprungfiguren auf den Basen wie Fig. 4 und 6, Tafel II, zeigt. Druck war etwas exzentrisch. Sprungfiguren auf der Mantelfläche, siehe Tafel II, Fig. 7, in welcher deutlich die mit den Erzeugenden zusammenfallenden und auf ihnen normalen Sprünge ersichtlich sind.

4. Zylinder aus böhmischem Kristallglas. Durchmesser $4 \cdot 7\ cm$, Höhe $h = 7 \cdot 1\ cm$, $d : h = 1 : 1 \cdot 51$. Druckplatten direkt mit den Basen in Berührung. Druck 40 t und etwas exzentrisch, dementsprechend auch der Sprungkreis nicht geschlossen.

5. Zylinder aus böhmischem Kristallglas. Zwischenlage von Bleiplatten, deren Durchmesser $5 \cdot 49\ cm$ und Höhe $0 \cdot 58\ cm$ sind. Durchmesser des Zylinders $d = 4 \cdot 925\ cm$, Höhe $h = 7 \cdot 312\ cm$, $d : h = 1 : 1 \cdot 48$. Der Zylinder brach bei 40 t anscheinend plötzlich. Die aus Fig. 9, Tafel II, ersichtliche deformierte Bleiplatte zeigte an den Stellen, welche um die Achse des Zylinders (an der Stelle *B*) lagen, eine größere Dicke als gegen den (an den Stellen *A*) Rand zu. Das Blei hat bekanntlich die Eigenschaft, unter hohem Drucke wie eine zähe Flüssigkeit zu fließen. Betrachtet man Fig. 2, nach welcher bei gleichmäßiger Druckverteilung der Teil der Basen, der um die Achsen sich befindet, höher liegt als jener in der Nähe der Mantelfläche, so ist die besprochene verschiedene Dicke der Bleiplatte — gleichmäßige Druckverteilung vorausgesetzt — damit zu erklären, daß das Blei infolge der Gestalt des deformierten Zylinders gegen die Ränder zu abfließen konnte, gegen die Achse des Zylinders aber am Abfließen gehindert war. Daß die Druckverteilung aber im letzten Augenblick vor dem Bruche eine nahezu gleichförmige war, dafür spricht Fig. 8, wo wir deutlich die kreisförmige Anordnung der äußeren Säulen wahrnehmen können. Vor dieser gleichförmigen Druckverteilung muß wieder eine solche vorhanden gewesen sein, welche die radialen, aus der Figur deutlich ersichtlichen Sprünge bewirkte. Zum Unterschied aber von den Fällen 2, 3, 4 muß die Zeitdauer während der Wechsel von ungleichmäßiger in gleichmäßige Druckverteilung sehr kurz gewesen sein, so kurz, daß es dem Beobachter beinahe plötzlich vor sich zu gehen schien.

Was vor diesem Wechsel für eine Druck- und daher Reibungsverteilung auf den Zylinderbasen herrschte und die Ursache war, daß das Glas erst bei 40 t jäh zerbrach, kann aus den Beobachtungen nicht einmal vermutet werden. Der Vollständigkeit halber möchte ich noch erwähnen, daß die Zylinderbasen in allen beschriebenen Versuchen an den Basen unpoliert gewesen sind.

Schluß.

Wir können uns nicht verhehlen, daß die im vorhergehenden ausgesprochene Behauptung, nach welcher die Glaszylinder nach Kurven gleichen Spannungspotentials gesprungen seien, insofern etwas Hypothetisches anhaftet, als wir über die Druckverteilung auf den Basen eigentlich nur Vermutungen aussprechen konnten. Allerdings kann diesen Vermutungen durch keine beobachtbare Tatsache widersprochen werden und es wäre gewiß höchst absonderlich, wenn es noch eine andere ungleichmäßige Druckverteilung, respektive bei gleichmäßiger Druckverteilung geometrische Örter anderer Funktionen geben würde, die so ganz der Theorie entsprechend sich praktisch wirklich zeigen. Der volle Beweis für die Richtigkeit unserer Anschauung, daß das Potential der Spannungskräfte wirklich als Maß der Bruchgefahr gelten könne, müßte durch weitere Beobachtungsweisen unter anderen Verhältnissen erbracht werden. Doch glaube ich, wenigstens einen kleinen Ansporn nach vorwärts gegeben zu haben.

Fig. 9.

Büschel- und oszillierende Spitzenentladung in Helium, Argon und anderen Gasen

von

Dr. **Karl Przibram.**

Aus dem Institute für theoretische Physik an der k. k. Universität in Wien.

(Mit 5 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 21. März 1907.)

Frühere Untersuchungen[1] über die Büschelentladung haben zu dem Schlusse geführt, daß das positive Büschel das negative um so mehr an Ausdehnung übertrifft, je rascher sich in dem betreffenden Gase[2] die negativen Ionen im Verhältnis zu den positiven bewegen, ein Verhalten, daß sich etwa so erklären läßt: je rascher sich die Ionen von einer Elektrode, an der sie erzeugt werden, wegbewegen, umso unwahrscheinlicher ist es, daß an dieser Elektrode ein genügend großes Potentialgefälle eintritt, um eine größere Strecke des Gases zu durchschlagen.

Es hat nun Edmunds[3] die Beweglichkeit der Ionen in Helium bestimmt und für die positiven Ionen $v_+ = 1 \cdot 42$, für die negativen $v_- = 2 \cdot 03$ gefunden; das Verhältnis also $\frac{v_-}{v_+} = 1 \cdot 43$. Wenn der oben ausgesprochene Satz richtig ist, so müßte also in diesem Gase das positive Büschel das negative eher noch mehr übertreffen, als dies in Luft der Fall ist, da in Luft das Verhältnis der Beweglichkeiten nach Zeleny[4] $\frac{v_-}{v_+} = 1 \cdot 375$ ist.

---

[1] Diese Sitzungsberichte, *113*, 464 (1904); *113*, 1491 bis 1507 (1904).

[2] In schlechtleitenden Flüssigkeiten scheint eine ähnliche Beziehung zu bestehen: Diese Sitzungsberichte, *114*, 1461 bis 1476 (1905).

[3] J. J. Thomson, Conduction of Electricity through Gases, 2. Auflage, Cambridge 1906, p. 80.

[4] Ebenda, p. 58.

Ich habe deshalb die Büschelentladung in Helium untersucht und bei dieser Gelegenheit die ganze Frage nochmals aufgenommen, indem ich teils ältere Versuche wiederholte, teils auf neue Gase ausdehnte. Da ferner nach v. Wesendonk[1] die merkwürdigen, an Spitzen, die mit einem Teslapol verbunden sind, beobachteten polaren Wirkungen mit dem Überwiegen des positiven Büschels zusammenhängen, so muß auch bei diesen Versuchen die Reihe der Gase, wie sie schon Himstedt aufgestellt hat, sich mit derjenigen decken, die man erhält, wenn man sie nach fallenden $\frac{v_-}{v_+}$ anordnet, so daß auch diese Versuche zur Prüfung herangezogen werden können. Ich bemerke gleich hier, daß die zu schildernden Versuche die aufgestellte Behauptung durchaus bestätigen. Zur Ausmessung der Büschel wurde wie in einer älteren Arbeit[2] die Entladung direkt über die photographische Platte geschickt. Als Elektrizitätsquelle dient eine kleine Wimshurstmaschine von 26 *cm* Scheibendurchmesser mit zwei Verstärkungsflaschen von zirka 4 *cm* Durchmesser und 8 *cm* Beleghöhe. Die Versuchselektroden sind mit den äußeren Belegen verbunden, die inneren mit den Konduktoren der Maschine (Kugeln von 12 *mm* Durchmesser), so daß bei jedem Funken zwischen den letzteren auch eine Entladung über die Platte geht. Die Änderung des Abstandes der Konduktoren gestattet, die zur Wirkung kommende Spannung beliebig zu regulieren. Der Rezipient, in welchem die Aufnahme gemacht wird, ist ein flaches Glasgefäß von 14 *cm* Höhe, 10·5 *cm* Breite und 0·5 *cm* Tiefe; es ist unten offen und trägt oben einen Dreiweghahn, der eine Verbindung mit der Atmosphäre oder mit einem Gasbehälter herstellen läßt. Die photographische Platte wird in das Gefäß eingeführt und durch einen nachgeschobenen kleinen Kautschukpropfen festgehalten. Die Elektroden sind Platindrähte, die sich federnd auf die Platte legen. Das Gefäß wird in einen größeren Behälter mit Quecksilber eingesenkt, wobei die Luft verdrängt wird. Dann wird der Hahn umgelegt, das Gas bis zur Erreichung des Atmo-

[1] Phys. Zeitschr., *4*, 465 (1903).

[2] Diese Sitzungsberichte, *108*, 1161 bis 1171 (1899).

sphärendruckes eingelassen und nach erfolgter Entladung wieder in den Gasbehälter zurückgepreßt. Hierauf wird der Hahn wieder umgelegt und das Gefäß aus dem Quecksilber herausgehoben, die Platte herausgenommen und entwickelt. Das wiederholte Versenken der Platte in Quecksilber beeinträchtigt zwar die Schönheit der Bilder vom photographischen Standpunkte ein wenig, übt jedoch keine wesentliche störende Wirkung aus.

Zur Untersuchung der Spitzenausströmung dient ein Apparat, der einem früher beschriebenen[1] ähnlich ist. Die Spitze ist ein bis auf wenige Millimeter in Glas eingeschmolzener Platindraht, der mit einem Pol einer kleinen Teslaanordnung verbunden ist. (Der andere Pol ist isoliert.) Ihr gegenüber befindet sich ein verstellbares Quecksilberniveau, dessen Ladung mittels eines wenig empfindlichen Elektroskopes geprüft wird. Die Gasfüllung geschieht wieder durch Quecksilberverdrängung. Störend wirken die starken Wandladungen. Das Gefäß konnte aber wegen der geringen Gasmengen, die zur Verwendung kamen, nicht weiter genommen werden und bei Verwendung eines die Spitze ganz umschließenden Metallzylinders als zweite Elektrode wäre die sehr wünschenswerte Möglichkeit, den Abstand zu verändern, weggefallen. Da es sich ferner bei diesen Versuchen bloß um Vergleichung der Gase untereinander und nicht um absolute Messungen handelt, so genügt der angegebene Apparat vollkommen.

Das Helium wurde von Thomas Tyrer & Co. in London in Röhren zu 100 cm^3 bezogen. Gleich der erste Versuch, die Büschelentladung in diesem Gase zu photographieren, schien die gehegte Erwartung zu erfüllen. Die Entladung war, der geringen elektrischen Festigkeit[2] des Heliums entsprechend, sehr ausgedehnt, das sehr schön verästelte positive Büschel übertraf das rundliche, unzerteilte negative eher mehr als in Luft. Es stellte sich jedoch heraus, daß bei diesem Versuche eine beträchtliche Menge Luft eingedrungen war; er mußte daher

---

[1] Phys. Zeitschr., *4*, 581 bis 583 (1903).

[2] Ramsay & Collie, Strutt, siehe J. J. Thomson, l. c., p. 449; Ewers, Ann. d. Phys., *17*, 781 bis 860 (1905).

mit einer frischen Heliumprobe wiederholt werden. Die größere Reinheit des Gases äußerte sich in einer noch größeren Ausdehnung der ganzen Entladungserscheinung, es erschien aber jetzt gegen alle Erwartung das negative Büschel auf Kosten des positiven vergrößert.

Allein die Ähnlichkeit der so erhaltenen Entladungsbilder mit den Bildern in verdünnter Luft (Verschwommenheit, Breite der Büscheläste etc.) sowie der Umstand, daß von Stellen des Anodendrahtes, die weiter von der Kathode entfernt sind, sehr lange positive Büschelfäden ausgehen, weckten die Vermutung, daß man es hier mit einer Zurückdrängung des positiven Büschels durch die von der Kathode herkommenden Ionenschwärme zu tun hat. So wird bei Verdünnung der Luft das positive Büschel immer mehr zurückgedrängt,[1] was sich nach den hier vertretenen Anschauungen leicht erklärt, da durch die Ionen, welche die negative Entladung in die Nähe der Anode bringt, hier durch bloße Leitung ein reichlicher Elektrizitätsausgleich stattfindet, so daß das Gefälle nicht mehr für so lange Büschel ausreicht. Ist dies auch im Helium der Fall, so muß das richtige Verhältnis der Büschel zu erhalten sein, wenn man beide Büschel für sich allein, ohne Beeinflussung von Seite des anderen, beobachtet. Es wurde deshalb jetzt nur eine Elektrode mit der Maschine verbunden, die andere isoliert gehalten. Und jetzt ergab sich in der Tat das erwartete Resultat: die Anode gab ein prachtvolles verästeltes Büschel (Fig. 1), die Kathode nur einen runden Fleck (Fig. 2). Die größte Ausdehnung des positiven Büschels betrug 49 *mm*, des negativen 7 *mm*, das Verhältnis also gleich 7. Der Versuch wurde mit gleichem Resultate wiederholt; das Verhältnis der Büschel ergab sich zu 7·5. Vergleichsaufnahmen in Luft lieferten unter gleichen Bedingungen die Zahlen 24 *mm*, 3·5 *mm*, 6·8 (Fig. 3). Der Abstand der Konduktoren der Maschine war in diesen Fällen 1 *cm*.

In Übereinstimmung zeigte sich ferner das Verhalten des Heliums gegen die oszillierende Spitzenentladung. War der oben beschriebene Apparat mit Luft gefüllt, so empfing das

[1] Diese Sitzungsberichte, *108*, 1165 (1899); *113*, 461 (1904).

Quecksilber bei einem Abstand von zirka 33 *mm* von der Spitze stets eine starke positive Ladung. Ein beiläufiges Maß für die Aufladung gibt die Zeit, die vom Einschalten des Tesla-

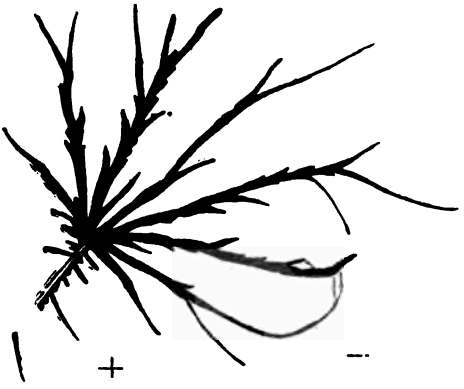


Fig. 1.

apparates bis zum Anschlagen der Elektroskopblättchen an die Schutzplatten vergeht. Wurde nun Helium eingefüllt, so war

Fig. 2.

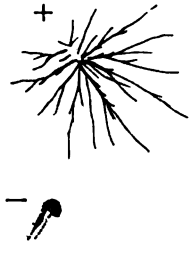


Fig. 3.

die Aufladung auch positiv. Im folgenden gebe ich einige Messungen der angegebenen Zeit:

Luft	stark	+	,	Blättchen	schlagen	an	nach	zirka 3″
Helium .	»	+	,	»	»	»	»	2″, 3″
Luft	»	+	,	»	»	»	»	1·5″, 2″
Helium .	»	+	,	»	»	»	»	3·5″
Luft	»	+	,	»	»	»	»	1·5″, 2·5″
Helium .	»	+	,	»	»	»	»	1″.

Aus diesen und ähnlichen Versuchen geht hervor, daß Helium die positive Spitzenausströmung in ganz ähnlicher Weise begünstigt wie die Luft, wie nach dem Verhältnis $\frac{v_-}{v_+}$ und nach der Untersuchung der Büschelgröße zu erwarten war. Es dürfen bei diesen Versuchen die leuchtenden Büschel, welche man im Dunkeln von der Spitze ausgehen sieht, nicht ganz bis zum Quecksilber hinüberreichen, da sonst Unregelmäßigkeiten auftreten. Bei der Leichtigkeit, mit der die Entladung im Helium erfolgt, ist hier besonders darauf zu achten.

Um möglichst viele untereinander vergleichbare Resultate zu erhalten, wurden die schon früher untersuchten Gase: Luft, Sauerstoff, Wasserstoff und Kohlendioxyd wieder geprüft. Die folgende Tabelle gibt unter A die Funkenlänge zwischen den Maschinenkonduktoren in Millimetern, unter B_+ und B_- die Durchmesser des positiven, respektive negativen Büschels, senkrecht zur Verbindungslinie der Elektroden gemessen, in Millimetern, unter $\frac{B_+}{B_-}$ schließlich das Verhältnis der beiden Größen.

Luft	$A = 2\,mm$			$3\,mm$			$5\,mm$			$10\,mm$			$20\,mm$		
	B_+	B_-	$\frac{B_+}{B_-}$	B_+	B_-	$\frac{B_+}{B_-}$	B_+	B_-	$\frac{B_+}{B_-}$	B_+	B_-	$\frac{B_+}{B_-}$	B_+	B_-	$\frac{B_+}{B_-}$
Luft	5	1·5	3·3	12	3·5	3·4	16·5	4·5	3·7	22	5	4·4	43	10	4·3
	—	—	—	—	—	—	—	—	—	28	6	4·7	—	—	—
O_2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	8	4	2	17	5·5	3·1
H_2	—	—	—	—	—	—	14	7	2	31	10	3·1	—	—	—
	—	—	—	—	—	—	—	—	—	28	9	3·1	—	—	—
CO_2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	9	5	1·8	—	—	—

Die mit der oszillierenden Spitzenentladung in diesen Gasen erhaltenen Resultate decken sich mit denen von Harvey & Hird[1] und Himstedt.[2] Es ergaben sich nämlich die folgenden Ausschläge:

[1] Phil. Mag. (5), *36*, 45 (1893).

[2] Wied. Ann., *52*, 473 (1894).

Luft	stark	+, in zirka 2″ an.
O_2		+, » » 13″ »
H_2	sehr schwach	—, schlägt nicht an.
CO_2	stark	—, in zirka 8″ an.

In der ersten Arbeit von Zeleny[1] über das Verhältnis der Ionenbeweglichkeiten ist dieses Verhältnis noch für N_2O und C_2H_2 angegeben. Es wurden deshalb auch diese Gase untersucht. Es ergaben sich die folgenden Zahlen:

	$A = 10$ mm			20 mm		
	B_+	B_-	$\frac{B_+}{B_-}$	B_+	B_-	$\frac{B_+}{B_-}$
N_2O	12	4	3	—	—	—
	8·5	4	2·1	—	—	—
C_2H_2	—	—	—	10	10	1·0
	—	—	—	15	13	1·2

Die zu verschiedenen Malen in N_2O erhaltenen Bilder weichen stark voneinander ab. In Acetylen muß, seiner großen Festigkeit[2] entsprechend, zur Erzielung guter Büschel A groß gewählt werden. Es treten hiebei leicht Funken auf, welche die Platte schwärzen, wodurch die Wiedergabe der Bilder erschwert wird. Fig. 4 gibt wenigstens in den wesentlichsten Zügen die Umrisse einer solchen Entladung in Acetylen. Die Ähnlichkeit der beiden Büschel ist hier sehr auffallend.

Fig. 4.

Bei der oszillierenden Spitzenentladung gibt N_2O eine sehr schwache positive Ladung, C_2H_2 eine sehr starke negative, wie von den untersuchten Gasen sonst nur CO_2.

Berücksichtigt man noch die Angaben Himstedt's[3] über das Verhalten von NH_3 und Leuchtgas gegen die oszillierende

[1] Phil. Mag., *46*, 120 (1898); J. J. Thomson, l. c., p. 52.

[2] Natterer, diese Sitzungsberichte, *98*, 990 bis 1001 (1889).

[3] L. c.

Spitzenentladung, so sind alle Gase untersucht, für welche das Verhältnis der Ionenbeweglichkeiten bisher wenigstens annähernd bekannt ist. Auf den Stickstoff komme ich später noch zu sprechen.

Um einer weiteren Prüfung der eingangs aufgestellten Behauptung vorzuarbeiten, wurde die Büschel- und oszillierende Spitzenentladung auch noch in Kohlenoxyd und in Argon untersucht.

In CO sind die erhaltenen Bilder recht undeutlich. Das beste ergibt bei $A = 10\,mm$, $B_+ = 11$, $B_- = 4$, $\frac{B_+}{B_-} = 2 \cdot 8$. Die oszillierende Spitzenentladung gibt eine schwache positive Ladung, aber sehr schwankend und launenhaft.

Das Argon wurde von derselben Quelle bezogen wie das Helium. Die Büschelentladung ist sehr schön entwickelt, in der Ausdehnung[1] zwischen Luft und Helium stehend. Die Vergrößerung gegen Luft betrifft jedoch fast nur das positive Büschel; das negative ist unscheinbar und übertrifft kaum dasjenige in Luft. Drei Aufnahmen ergaben folgende Resultate:

	$A = 5\,mm$			$10\,mm$		
	B_+	B_-	$\frac{B_+}{B_-}$	B_+	B_-	$\frac{B_+}{B_-}$
Argon	40	8	5	46	6	7·7
	—	—	—	50	6	8·3

Eigentümlich ist auf diesen Bildern das Auftreten schöner Schichtungen in den Büschelästen, wie sie sonst bei Atmosphärendruck nur sehr selten zu beobachten sind (Fig. 5).

Wird in Argon die oszillierende Spitzenentladung eingeleitet, so schlagen die Blättchen des Elektroskopes sofort heftig an, so daß die Zeit mit der Stopuhr kaum mehr fest-

[1] Über die elektrische Festigkeit des Argons siehe Bouty, Compt. rend., *138*, 616 bis 618 (1904). Minimumpotential: Ewers, l. c.

zustellen ist. Die Aufladung ist positiv und nach der Heftigkeit der Ausschläge stärker als in Luft und Helium.

Die mitgeteilten Zahlen sollen nun zur Prüfung der eingangs aufgestellten Behauptung verwendet werden, wobei auch noch die älteren Ergebnisse herangezogen werden mögen. Besteht der behauptete Zusammenhang, so muß die Reihe der

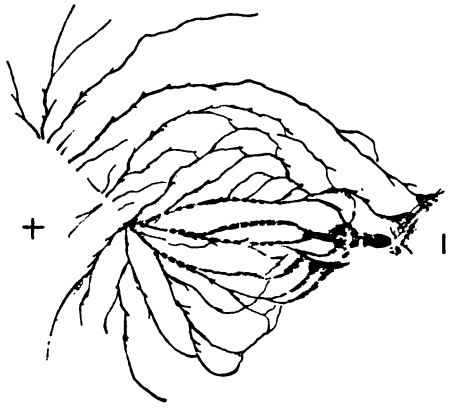


Fig. 5.

Gase, geordnet nach fallendem $\frac{v_-}{v_+}$, sich decken mit der Reihe, geordnet nach fallendem $\frac{B_+}{B_-}$. Eine flüchtige Prüfung zeigt zunächst, daß in der Tat den größten Werten von $\frac{v_-}{v_+}$ (Luft, He) die größten Werte von $\frac{B_+}{B_-}$ entsprechen, und den kleinsten Werten von $\frac{v_-}{v_+}$ (CO_2, C_2H_2) die kleinsten. Zur vollständigen Einordnung ist aber noch folgendes zu bemerken. G. Wiedemann[1] hat darauf hingewiesen, daß, da das negative Büschel im allgemeinen das kleinere ist, jede Größenänderung an ihm weniger hervortreten wird und daß sich daraus die größere Ähnlichkeit beider Büschel in den schwerer zu durchschlagenden Gasen, wie Sauerstoff, Leuchtgas oder Chlorwasserstoff erklären ließe. Wohl reicht dieser Umstand zur Erklärung nicht aus, da z. B. auch bei gleicher Größe des

[1] Elektrizität, IV. Bd., § 836.

negativen Büschels in Luft und CO_2 doch das positive im erstgenannten Gas weit größer ist als im zweiten, oder in Wasserstoff trotz seiner geringeren Festigkeit die beiden Büschel ähnlicher sind als in Luft, doch ist der ungleichen Ausdehnung oder der verschiedenen elektrischen Festigkeit der Gase Rechnung zu tragen. Man hat also nicht die Büschel bei gleichem A, sondern bei gleichem B_- zu vergleichen. Bei den älteren Aufnahmen, bei denen A in der Regel größer als $20\,mm$ war, wurde die verschiedene Festigkeit schon teilweise durch Veränderung von A kompensiert, so daß sie untereinander vergleichbare Resultate lieferten. Würde man bei gleichem A vergleichen, so fiele z. B. der Sauerstoff ganz aus der Reihe. Damit dürfte ein scheinbarer Widerspruch aufgeklärt sein, der zwischen der hier aufgestellten Behauptung und den Angaben Faraday's über die Büschel in verschiedenen Gasen besteht. Die Stelle,[1] aus der so ziemlich alle späteren Angaben über den Einfluß der Gasart auf die Büschelentladung geschöpft sind, lautet: »In Luft ist die Überlegenheit des positiven Büschels wohl bekannt. In Stickstoff ist sie ebenso groß oder sogar größer als in Luft. In Wasserstoff verliert das positive Büschel einen Teil seiner Überlegenheit, indem es nicht so gut ist als in Stickstoff oder Luft, während das negative Büschel nicht beeinträchtigt erscheint. In Sauerstoff ist das positive Büschel gedrungen und ärmlich, während das negative nicht kleiner wird. Die beiden waren so ähnlich, daß das Auge häufig eines vom anderen nicht unterscheiden konnte, und diese Ähnlichkeit blieb bestehen, wenn der Sauerstoff allmählich verdünnt wurde. In Leuchtgas sind die Büschel schwer zu erzeugen im Vergleich zum Stickstoff und das positive dem negativen nicht sehr überlegen in seinem Charakter, weder bei gewöhnlichen, noch bei niedrigen Drucken. In Kohlensäuregas trat diese Annäherung im Charakter auch auf. In Chlorwasserstoffgas war das positive Büschel nur wenig besser als das negative und beide schwer zu erzeugen im Vergleich zur Leichtigkeit in Stickstoff und Luft.« Zahlen sind nicht angegeben, so daß man es hier wohl nur mit subjektiven Schätzungen zu tun hat. Es dürfte daher dem Vergleiche

[1] Experimental Researches, I. Bd., § 1476.

desselben Büschels in verschiedenen Gasen weniger Gewicht beizulegen sein als dem Vergleiche beider Büschel im selben Gas. Ich habe stets gefunden, daß unter sonst gleichen Umständen auch das negative Büschel in O_2 kleiner ausfiel als in Luft, was bei den Faraday'schen Versuchen wohl nur wegen der Schwierigkeit des direkten Vergleiches nicht festgestellt werden konnte. So finde ich auch stets in Wasserstoff eine Vergrößerung des negativen Büschels gegen Luft, während nach Faraday keine wesentliche Änderung eintritt.

Vergleicht man nun die Büschel in verschiedenen Gasen nicht bei gleichen äußeren Bedingungen, sondern bei gleicher Ausdehnung der negativen Büschel, so ergibt sich $\frac{B_+}{B_-}$ in Sauerstoff lange nicht so klein, als nach Faraday zu erwarten wäre und es ist anzunehmen, daß Faraday bei verstärkter Elektrizitätszufuhr auch einen größeren Unterschied zwischen den beiden Büscheln im Sauerstoff beobachtet hätte. Reitlinger[1] hat gezeigt, daß die Lichtenberg'schen Figuren in Luft, O_2, H_2 und CO_2 mit den zitierten Faraday'schen Beobachtungen übereinstimmen. Ich habe die Versuche wiederholt, wobei ich die zur Anwendung kommende Spannung variierte, und erhielt Resultate, die sich mit den photographischen Bildern vollständig decken.

In der folgenden Tabelle sind die Gase nach fallendem $\frac{v_-}{v_+}$ geordnet. Die erste Kolumne gibt den Namen des Gases, die zweite das Verhältnis $\frac{v_-}{v_+}$ nach den älteren Angaben Zeleny's, die dritte die neueren Werte nach Zeleny und den Wert für He nach Edmunds, die vierte das Verhältnis $\frac{B_+}{B_-}$ für $A = 10\,mm$, die fünfte dasselbe für $A = 20\,mm$, die sechste die früher erhaltenen Werte dieses Verhältnisses, wobei, wie schon bemerkt, A größer als $20\,mm$ war und nach der Festigkeit des Gases verändert wurde. Die siebente und achte geben das Verhältnis bei gleicher Größe des negativen Büschels, und zwar für einen Durchmesser zwischen 5·5 und $7\,mm$ und zwischen

[1] Diese Sitzungsberichte, *43*, 25 (1861).

10 und 12 *mm*. Die Zahlen der neunten Kolumne schließlich bedeuten Ordnungszahlen, welche das Verhalten der Gase gegen die oszillierende Spitzenentladung charakterisieren sollen, indem die an der Spitze stehenden Gase bei einer bestimmten Elektrodendistanz starke positive Ladungen vermitteln, die letzten starke negative.

Gas	$\frac{v_-}{v_+}$	$\frac{v_-}{v_+}$	$\frac{B_+}{B_-}$					
			$A = 10$ mm	$A = 20$ mm	A 20 mm $\wedge$	B_- zirka 6 mm	B_- zirka 11 mm	
Ar.....	—	—	8	—	—	8	—	1
He	—	1·43	7·2	—	—	—	7·5	2
Luft	1·24	1·375	4·7	4·3	4·5	4·7	4·3	
O_2	1·24	1·32	2	3·1	4·1	3·1	—	3
N_2	1·23	—	—	—	3·2	—	—	6
Leuchtgas ..	1·15	—	—	—	—	—	—	5
H_2	1·14	1·19	3·1	—	3·5	2·0	3·1	
N_2O	1·105	—	2·5	—	—	—	—	4
NH_3	1·045	—	—	—	—	—	—	7
CO_2	1·00	1·07	1·8	—	2·6	1·8	—	
C_2H_2	0·985	—	—	1·1	—	—	1·0	

Ein Blick auf die letzten drei Kolumnen lehrt, wie weitgehend die Übereinstimmung im Verhalten der Gase gegen Büschel- und oszillierende Spitzenentladung ist: je länger das positive Büschel im Vergleich zum negativen ist, umso größer die positive Ladung, die ein Leiter in einem bestimmten Abstand von der Spitze am Teslapol erhält, womit die Anschauung v. Wesendonk's vollkommen gerechtfertigt erscheint.

Aber auch der Zusammenhang mit dem Verhältnis der Beweglichkeiten scheint mir unverkennbar. Wenn man auch vielleicht den geringen Unterschieden unter den mittleren Gliedern der Reihe nicht allzuviel Gewicht beilegen darf — bei

dem etwas unsicheren N_2O kommt hier auch eine Umstellung vor — so ist doch die übereinstimmende Stellung der ersten und letzten Glieder sehr auffallend und ich lege daher besonderes Gewicht auf die in He und C_2H_2 gewonnenen Resultate als neue Stützen der aufgestellten Regel.

Das Verhalten des Stickstoffes muß noch erörtert werden. Nach Faraday sind in diesem Gase die polaren Unterschiede der Büschel dieselben, wenn nicht noch größere, als in Luft. Meine älteren Bilder ergaben aber ein kleineres Verhältnis. Die Himstedt'schen Versuche sprechen auch für ein Zurückdrängen des positiven Büschels im Stickstoff. Der Zeleny'sche Wert 1·23 für $\frac{v_-}{v_+}$ ist kaum kleiner wie der für Luft; dies wäre mit der Faraday'schen Beobachtung in Übereinstimmung, während die neueren Versuche einen kleineren Wert erwarten ließen. Die Ursache dieser Widersprüche ist wohl darin zu suchen, daß alle Entladungserscheinungen gerade im Stickstoff außerordentlich stark von Verunreinigungen, besonders durch Sauerstoff, beeinflußt werden.[1] Es muß übrigens noch erwähnt werden, daß die hier angeführten Werte von $\frac{v_-}{v_+}$ gar nicht die wirklich maßgebenden sein müssen. J. Frank[2] hat gezeigt, daß bei der Spitzenentladung die Ionenbeweglichkeit in der Nähe der Spitze eine weit größere ist als die von Chattock[3] gefundene und daß das Verhältnis $\frac{v_-}{v_+}$ für Luft, im Felde der Entladung selbst gemessen, sich zu 3·8 ergibt. Es ist nun sehr gut denkbar, daß dieses Verhältnis der anfänglichen Beweglichkeiten von Gas zu Gas nicht streng parallel verläuft mit dem gewöhnlichen Beweglichkeitsverhältnis. Leider liegen vollständige Angaben nur für Luft vor. Für Stickstoff konnte nur die Beweglichkeit der positiven Ionen = 9·2 bestimmt werden;

---

[1] Warburg, Ann. d. Phys., *2*, 307 (1900); Strutt, siehe J. J. Thomson, l. c., p. 448.

[2] Ann. d. Phys., *21*, 972 bis 1000 (1906).

[3] Phil. Mag., *48*, 401 (1899); mit Walker und Dixon, Phil. Mag. (4), *1*, 79 (1901).

von der Beweglichkeit der negativen ließ sich nur aussagen, daß sie größer als 16 ist.

In der Tabelle findet sich auch das Argon eingetragen. Wenn die bisher gefundene Übereinstimmung als stichhältig betrachtet werden kann und das Verhältnis der Ionenbeweglichkeiten also wirklich immer der ausschlaggebende Faktor für die polaren Unterschiede der Büschel ist (daß es ein Faktor ist, scheint mir nicht mehr bezweifelt werden zu können), so ist aus den Beobachtungen in Argon zu schließen, daß dieses Gas auch in Bezug auf das Verhältnis $\frac{v_-}{v_+}$ an der Spitze steht und daß dieses Verhältnis größer als 1·43 gefunden werden wird. Die mit CO erhaltenen Resultate sind zu unsicher, um diesem Gase einen bestimmten Platz in der Reihe anzuweisen, doch dürfte es sich zwischen O_2 und H_2 einordnen.

Die Ergebnisse der vorliegenden und früherer Arbeiten zusammenfassend, läßt sich der Satz aussprechen: Ordnet man die Gase nach fallenden Verhältnissen der Beweglichkeiten der negativen und positiven Ionen $\frac{v_-}{v_+}$, so fällt in dieser Reihe im großen und ganzen auch das Verhältnis der Ausdehnung des positiven Büschels zu der des negativen $\frac{B_+}{B_-}$ und nimmt gleichzeitig auch der positive Charakter der Teslaausströmung ab. Eine ionentheoretische Begründung für dieses Verhalten ist früher gegeben worden.[1] Die Gültigkeit des Satzes vorausgesetzt, läßt sich vorhersagen, daß $\frac{v_-}{v_+}$ für Argon sich größer ergeben wird als für irgend eines der bisher untersuchten Gase.

[1] Diese Sitzungsberichte, *113*, 1491 bis 1507 (1904).

Absolute Messungen der nächtlichen Ausstrahlung in Wien

von

J. Krčmář und Dr. R. Schneider.

(Mit 1 Tafel.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 21. März 1907.)

Um zur Lösung der Frage über den Gang der nächtlichen Ausstrahlung beizutragen, haben wir an der k. k. Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik in Wien, Hohe Warte, einige kontinuierliche Reihen von Messungen in wolkenlosen Sommernächten ausgeführt.

Bei den Messungen wurde das Ångström'sche elektrische Kompensationsaktinometer[1] benützt, bei dem die Intensität der Ausstrahlung in Grammkalorien pro Quadratzentimeter und Minute gegeben ist durch

$$Q = \text{konst.}\, i^2(1+\alpha t),$$

wo

i = Intensität des Kompensationsstromes in Milliampère,
α = Temperaturkoeffizient des Widerstandes der Streifen,
t = die Temperatur derselben in Graden Celsius.

Bei dem Apparate Nr. 1,[2] mit dem die Messungsreihen vom 31. Juli bis 1. August und 14. bis 15. August 1906 aus-

---

[1] Knut Ångström, Über die Anwendung der elektrischen Kompensationsmethode zur Bestimmung der nächtlichen Ausstrahlung. Nova acta reg. soc. scient. Upsal. Ser. IV, vol. I, Nr. 2.

[2] Derselbe wurde als erster derartiger Apparat von Herrn Prof. Angström in Upsala dem Direktor der k. k. Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik, Herrn Hofrat Prof. J. M. Pernter, freundschaftlich verehrt.

geführt wurden, betrug die Konstante nach vorläufigen Angaben des Herrn Prof. Ångström 16·4; die Änderungen des Widerstandes der Streifen mit der Temperatur wurden hier nicht berücksichtigt.

Bei dem zweiten Apparate, Nr. 7, mit dem am 31. August, 1. bis 2., 2. bis 3., 3. bis 4. und 4. September gemessen wurde, beträgt die Konstante 10·5 und $\alpha = 0{\cdot}0022$.

Es sei hier noch erwähnt, daß der Apparat Nr. 1 schon längere Zeit vorher in Verwendung stand und dadurch die berußten Plättchen etwas durch Staub gelitten haben, was aber, wie sich zeigte, keinen merklichen Einfluß auf den Gang der Ausstrahlung hat.

Bei den Messungen wurde der Apparat zirka 26 *m* hoch über dem Erdboden auf dem Turme des Observatoriums so exponiert, daß er noch zirka 2 *m* über die höchste Plattform hinausragte. Die Seehöhe der Anstalt beträgt 202 *m*. Der Horizont von dieser Stelle aus ist nach allen Richtungen fast frei, nur in W—N durch ganz niedrige Berge unbedeutend beschränkt.

Was die Beobachtungen anbelangt, möge folgendes bemerkt werden. Es wurde jede Viertelstunde gemessen, und zwar fünf ganze Nächte hindurch und drei halbe, wo die weiteren Messungen durch Eintritt der Bewölkung verhindert wurden. Der Gang der Ausstrahlung ist aus den vollständigen Nächten berechnet worden, und zwar umfaßt er die Zeit von 8^h p. bis $3^h\ 45^m$ a. (Wiener Zeit).

Bei der Berechnung des mittleren Ganges haben wir zuerst die ersten zwei, mit dem Apparat Nr. 1 gemessenen Reihen ausgelassen und nur die drei mit dem Apparat Nr. 7 gewonnenen benützt, die folgenden mittleren Gang zeigen:

Zeit	Ausstrahlung	Zeit	Ausstrahlung
$8^h\ 00^m$ p.	0·164	$9^h\ 30^m$ p.	0·173
8 15	0·168	9 45	0·166
8 30	0·171	10 00	0·168
8 45	0·171	10 15	0·169
9 00	0·169	10 30	0·165
9 15	0·174	10 45	0·165

Zeit	Ausstrahlung	Zeit	Ausstrahlung
11h 00m p.....	0·162	1h 30m a.....	0·145
11 15	0·160	1 45	0·143
11 30	0·158	2 00	0·144
11 45	0·154	2 15	0·136
12 00	0 146	2 30	0·133
0 15 a.....	0·146	2 45	0·132
0 30	0 147	3 00	0·132
0 45	0·147	3 15	0·130
1 00	0·146	3 30	0·129
1 15	0·143	3 45	0·129

Die Untersuchung der ersten zwei in dieser Tabelle ausgelassenen Nächte ergab denselben Gang, so daß auch dieselben in die weitere Betrachtung eingezogen wurden. Die so gewonnenen Werte sind in der nächsten Tabelle enthalten, denen zugleich der korrespondierende Gang der Lufttemperatur, der relativen Feuchtigkeit und des Dampfdruckes beigefügt ist. Diese Elemente wurden in der Turmhütte, 21·3 *m* über dem Erdboden, jede Stunde direkt abgelesen und für die Zwischentermine aus den sich dort befindlichen Registrierinstrumenten gewonnen.

Die Nächte fallen ziemlich nahe aneinander und die Sonne ging an diesen Tagen durchschnittlich um $6^h\,58^m$ unter und um $5^h\,6^m$ auf. Die Werte beginnen also zirka eine Stunde nach Sonnenuntergang. Die Ausstrahlung hat hier eine ziemlich stark ansteigende Tendenz bis gegen 9^h p., wo sie ihr Maximum erreicht. Zwischen 11 bis 12^h p. zeigt sich eine rasche Abnahme derselben, dann bleibt sie bis 2^h a. gleich und nimmt sogar einen kleinen Anlauf zu einem sekundären Maximum, nach dem dann eine kontinuierliche Abnahme bis gegen Sonnenaufgang folgt. Bei den einzelnen Messungsreihen, wie man in den Tabellen sieht, wird diese Abnahme zirka drei Viertelstunden vor Sonnenaufgang auffallend rascher und ebenfalls zirka drei Viertelstunden nach dem Sonnenuntergang erfolgt ein ganz symmetrischer, rascher Anstieg der Ausstrahlung. Es liegt nahe, anzunehmen, daß das in der Strahlung der oberen Luftschichten seinen Grund habe, denn die mit dem Ausstrahlungsapparate

Zeit	Ausstrahlung	Temperatur (Grad Celsius)	Relative Feuchtigkeit	Dampfdruck
8h 00m p.	0·146	22·6	56	11·4
8 15	0·151	22·6	58	11·6
8 30	0·154	22·2	59	11·7
8 45	0·155	21·9	59	11·6
9 00	0·153	21·6	60	11·6
9 15	0·156	21·4	62	11·7
9 30	0·155	21·1	63	11·8
9 45	0·151	20·9	64	11·8
10 00	0·149	20·8	65	11·8
10 15	0·153	20·5	65	11·8
10 30	0·150	20·5	66	11·8
10 45	0·151	20·5	66	11·9
11 00	0·149	20·4	67	11·9
11 15	0·146	19·9	68	11·7
11 30	0·141	19·7	69	11·7
11 45	0·139	19·4	70	11·6
12 00	0·134	19·0	70	11·5
0 15 a.	0·134	18·9	71	11·5
0 30	0·134	18·8	72	11·6
0 45	0·133	18·6	72	11·5
1 00	0·133	18·5	72	11·5
1 15	0·132	18·6	72	11·5
1 30	0·132	18·5	74	11·8
1 45	0·132	18·2	76	11·8
2 00	0·133	17·9	77	11·8
2 15	0·127	17·5	79	11·7
2 30	0·124	17·3	79	11·6
2 45	0·124	17·2	79	11·6
3 00	0·124	17·1	79	11·6
3 15	0·123	17·0	80	11·7
3 30	0·121	16·9	82	11·8
3 45	0·120	16·5	83	11·7

gewonnenen Werte sind bekanntlich die Differenzen der absoluten Strahlung S und der Himmelsstrahlung H. Diese Strahlung der noch nach dem Sonnenuntergange bestrahlten Luftschichten nimmt mit der allmählich unter den Horizont sinkenden Sonne immer mehr und mehr ab, so daß das S immer größer wird. In analoger Weise wird sich schon einige Zeit vor dem Sonnenaufgang die Strahlung der bestrahlten Luftschichten durch die Verminderung der Ausstrahlungswerte S bemerkbar machen.

Betrachtet man den korrespondierenden mittleren Gang der Lufttemperatur, so sieht man, daß im allgemeinen mit abnehmender Temperatur die Ausstrahlung abnimmt. Bei den einzelnen Tagen zeigen sich in dem Zusammenhang einige Details, die später erwähnt werden.

Die relative Feuchtigkeit steigt im allgemeinen während der in Betracht gezogenen Zeit und dort, wo die Ausstrahlung gleich bleibt, scheint auch die Feuchtigkeit konstant zu bleiben.

Der Dampfdruck ändert sich im Laufe der Nacht so wenig, daß ein Einfluß des Wasserdampfgehaltes der Atmosphäre auf den Gang der Ausstrahlung in einzelnen Nächten nicht genügend ersichtlich ist.

Von den einzelnen Messungsreihen sei folgendes hervorgehoben:

Der Eintritt des Maximums der Ausstrahlung schwankt zwischen der neunten und zehnten Stunde abends. Die rasche Abnahme vor Mitternacht ist nicht in allen Nächten gleich stark ausgeprägt und in der Nacht vom 1. auf den 2. September hat sie sich erst zwischen 1 bis 2^h a. eingestellt. In der Regel hat dieser Abfall der Ausstrahlung ein deutliches, etwas verspätetes Sinken der Temperatur zur Folge. Mit der steigenden relativen Feuchtigkeit scheint die Intensität der Ausstrahlung abzunehmen, ebenso mit dem steigenden Wasserdampfgehalte der Luft. Das wurde deutlich bei Gelegenheit anderer Messungsreihen (besonders am 17. Juli 1906) beobachtet, wo der Dampfdruck um 1^h a. um mehr als 11% gesunken ist und die Ausstrahlung gleichzeitig um 17% stieg. Der Himmel war dabei wolkenlos, erst zirka eine Stunde darauf fing die Wolkenbildung an.

Die Windgeschwindigkeit wie auch die Windrichtung änderten sich im Laufe der Messungen sehr unbedeutend, doch erwies es sich, daß die kleinsten Werte so wie bei den ersten mit dem Apparat Nr. 1 ausgeführten Messungsreihen, so auch bei den mit dem zweiten Apparat ausgeführten auf die Windstille fallen. Bei Nordwind ist die Ausstrahlung größer als beim Südwind, der von der Stadt herkommt und viel Rauch und Staub mit sich bringt.

Ein interessantes Beispiel dafür bietet uns die Nacht vom 2. auf den 3. September, wo sich der schwache Wind nach 3^h a. plötzlich von Süden nach Norden gedreht hat. Die Ausstrahlung ist gleichzeitig, ganz gegen ihren normalen, zu dieser Zeit abfallenden Verlauf, bedeutend gestiegen. Näheres darüber, wie auch über den Zusammenhang der anderen meteorologischen Elemente mit der Ausstrahlung, läßt sich wohl erst auf Grund weiterer Messungen sagen, die in Ausführung begriffen sind.

Aus den drei letzten vollständigen Messungsreihen wollen wir auch die Summe der von einer horizontalen Fläche von einem Quadratzentimeter ausgestrahlten Wärme für die einzelnen Stunden bestimmen (siehe nachfolgende Tabelle).

Es hat also im Mittel in diesen drei Septembernächten $71 \cdot 1\,g$-Kal. pro Quadratzentimer in den $7^3/_4$ Stunden von 8^h p. bis $3^h\,45^m$ a. ausgestrahlt. Die einzelnen Nachtsummen nehmen ab, während die mittlere Temperatur und Dampfdruck steigen. Aus der mittleren Summe der nächtlichen Ausstrahlung ergibt sich pro Minute und Quadratzentimeter der Wert $0 \cdot 153\,g$-Kal.

Es möge der Wert mit ähnlichen Messungen verglichen werden, wobei selbstverständlich auf die Verschiedenheit der Umstände (Apparate, Jahreszeit, Seehöhe, Temperatur etc.), unter welchen diese Messungen angestellt wurden, Rücksicht zu nehmen ist:

Maurer[1] fand im Mittel aus drei Juninächten bei einer mittleren Temperatur seiner kalorimetrischen Platte von 15° C.

---

[1] J. Maurer, Über die nächtliche Strahlung und ihre Größe in absolutem Maße. Sitzungsber. der kgl. Preuß. Akad. der Wiss., mathem.-naturw. Klasse, Berlin 1887, p. 502.

Datum	Ausstrahlung in Gramm-Kalorien pro Quadratzentimeter horizontale Fläche und Stunde								Summe	Mittlere Luft-temperatur	Mittlerer Dampfdruck
	8—9h p.	9—10h	10—11h	11—12h	12—1h a.	1—2h	2—3h	3—3h45			
1. bis 2. Sept.	10·23	9·97	9·51	10·00	10·08	9·62	8·79	5·83	74·03	17·7	10·2
2. » 3. »	10·38	10·45	10·30	9·31	8·73	8·24	7·99	5·97	71·37	18·2	11·3
3. » 4. »	9·73	10·25	10·09	10·09	7·60	8·07	7·49	5·73	67·82	19·4	11·4
Mittel....	10·11	10·22	9·97	9·39	8·80	8·64	8·09	5·84	71·07	18·4	11·0

den Wert 0·130 *g*-Kal. J. M. Pernter[1] fand am Sonnblick (3095 *m*) am 29. Februar um 8h p. 0·201 *g*-Kal., während gleichzeitig W. Trabert in Rauris (900 *m*) 0·151 *g*-Kal. pro Minute gemessen hat. Zufälligerweise

[1] J. M. Pernter, Messungen der Ausstrahlung auf dem Hohen Sonnblick im Februar 1888. Diese Sitzungsber., Abt. IIa., Bd. XCVII, 1888.

hat Homen[1] zu derselben Jahreszeit im Jahre 1896 in Wikkarais im südlichen Finnland seine kontinuierlichen Messungen angestellt, wobei er viel niedrigere Werte bekommen hat, und zwar betrug in der Nacht vom 1. auf den 2. September die mittlere Intensität der Ausstrahlung in der Zeit von $5^h\ 20^m$ p. bis $5^h\ 50^m$ a. $0{\cdot}067\,g$-Kal. pro Minute und Quadratzentimeter, in der Nacht vom 2. auf den 3. September in der Zeit von $5^h\ 40^m$ p. bis $5^h\ 10^m$ a. $0{\cdot}084\,g$-Kal., wogegen am 14. bis 15. August in der Zeit von $6^h\ 10^m$ p. bis $6^h\ 20^m$ a. $0{\cdot}158\,g$-Kal. gefunden wurden.

In neuester Zeit hat F. M. Exner[2] im Juni am Sonnblick im Mittel $0{\cdot}19\,g$-Kal. bekommen bei mittlerer Temperatur von $-1{\cdot}1°$ C.; das Maximum der Ausstrahlung scheint dort auf 1^h a. zu fallen.

Zum Schlusse möge auf Grund des früher berechneten Wertes der Ausstrahlung $\Sigma = 0{\cdot}153\,g$-Kal. pro Minute und Quadratzentimeter diejenige Wärmemenge bestimmt werden, welche eine horizontale Fläche pro Quadratzentimeter und Minute in einer klaren Septembernacht durch Rückstrahlung von der nicht erleuchteten Atmosphäre wieder empfängt.

Es ergibt sich nämlich nach der Stefan'schen Formel für die absolut ausgesandte Strahlung der Plättchen bei $18{\cdot}6°$ C. der Wert ($\alpha = 0{\cdot}00367$):

$$S = 0{\cdot}723 \times 10^{-10} \times 273^4 (1+\alpha\Theta)^4 = 0{\cdot}523\,g\text{-Kal.}\ (cm^2,\ \text{Min.}),$$

so daß also für die Wärmestrahlung der Atmosphäre pro Quadratzentimeter und Minute:

$$S - \Sigma = 0{\cdot}37\,g\text{-Kal.}$$

resultieren, ein Wert, der mit dem von Maurer[3] auf einem ganz anderen Wege gefundenen ($0{\cdot}39$) gut übereinstimmt und

---

[1] Homén Theodor, Der tägliche Wärmeumsatz im Boden und die Wärmestrahlung zwischen Himmel und Erde. Leipzig 1897, p. 141.

[2] Exner Felix M., Messungen der Sonnenstrahlung und der nächtlichen Ausstrahlung auf dem Sonnblick. Meteorol. Zeitschr., 38, 1903, p. 409.

[3] Annalen der schweizerischen meteorol. Zentralanstalt, 1885, Bd. XXII.

natürlich höher ist als die für den 3095 *m* hohen Sonnblick von J. M. Pernter und F. M. Exner berechneten Werte.

Berechnet man weiter die absolute Strahlung für jede Stunde, indem man in die Stefan'sche Formel die entsprechenden Temperaturen einsetzt, so zeigen die gewonnenen Werte einen mit der beobachteten Ausstrahlung ziemlich parallel abfallenden Verlauf, mit Ausnahme des Anfanges bis zirka 10^h p., wo vielleicht der normale Verlauf der Ausstrahlung durch die schon früher erwähnte Strahlung der oberen Luftschichten gestört wird.

Da an der meteorologischen Zentralanstalt auch die Sonnenstrahlung mit dem Ångström'schen elektrischen Kompensationspyrrheliometer regelmäßig gemessen wird, so bietet sich die Gelegenheit, einen Vergleich zwischen der Sonnenstrahlung und der Ausstrahlung zu ziehen. Auf Grund jener Messungsreihen der Sonnenstrahlung wurde die gesamte, einer horizontalen Fläche pro Quadratzentimeter in diesen Tagen von der Sonne zugekommenen Wärme berechnet und es ergaben sich für den 1. September 318, für den 2. September 321 und für den 3. September 311 *g*-Kal. direkter Insolation pro Tag.

Berücksichtigt man, daß die diffuse Wärmestrahlung (nach Trabert[1]) zirka 40 Prozent der direkten Insolation beträgt, so erhält man für die erwähnten Tage 445, respektive 449 und 435 *g*-Kal.

Und wenn man zur genäherten Berechnung der gesamten, in 24 Stunden ausgestrahlten Wärme die in der Nachtzeit von 8^h p. bis $3^h\ 45^m$ a. gefundene mittlere Intensität der Ausstrahlung annimmt, so bekommt man für die erwähnten Tage folgende Summen der ausgestrahlten Wärme:

Für den 1. September.....	230 *g*-Kal.	pro Quadratzentimeter.
» » 2. »	221 »	» »
» » 3. »	210 »	» »

Man erhält also für den 1. September eine positive Wärmebilanz von 215 *g*-Kal., für den 2. September 228 und für den 3. September 225, im Mittel also 223 *g*-Kal. pro Tag.

---

[1] Trabert W., Benützung des täglichen Temperaturganges zur Ermittlung der diffusen Wärmestrahlung. Hann-Band d. Met. Zeit., 1906, p. 336.

Zusammenfassung.

In wolkenlosen Septembernächten zeigt die Ausstrahlung in Wien ein Maximum zwischen 9 bis 10^h p., eine raschere Abnahme gegen Mitternacht und dann langsames Sinken bis zum Sonnenaufgang. Der Zusammenhang des Ganges mit den meteorologischen Elementen ist aus den bisherigen Messungsreihen noch nicht genügend klar.

Im Mittel aus drei klaren Nächten hat eine horizontale Fläche von 1 cm^2 in der Zeit von 8^h p. bis $3^h\,45^m$ a. 71·1 g-Kal. ausgestrahlt, was der Intensität von 0·153 g-Kal. pro Quadratzentimeter und Minute entspricht.

Daraus ergibt sich für die Strahlung der nicht erleuchteten Atmosphäre der Betrag von 0·37 g-Kal. gegen eine horizontale Fläche von 1 cm^2 pro Minute.

Wenn man auch für den Tag die gleiche Intensität der Ausstrahlung annimmt wie in der Nacht, so war in diesen Tagen die mittlere Wärmebilanz +223 g-Kal. pro Quadratzentimeter.

Wien, im März 1907.

K. k. Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik.

Erste Messungsreihe.

Datum	Zeit	$Q = \frac{g\text{-Kal.}}{\text{Min. } cm^2}$	Bewölkung 0—10	Wind 0—10	Lufttemperatur ° C.	Relative Feuchtigkeit in Prozent	Dampfdruck in Millimeter	Anmerkungen
31. VII. 1906	8h 00m p.	0·1100	1	N_1	24·4	49	11·2	Cu tief am Horizont in N.
	8 15	0·1237	0—1	N_{1-2}	24·4	50	11·3	
	8 30	0·1302	0—1	N_{1-2}	24·5	51	11·6	
	8 45	0·1314	0—1	N_{1-2}	23·3	54	11·5	Einziger Cu in N, tief am Horizont. ∞^1 in SW.
	9 00	0·1323	0—1	N_{1-2}	22·9	55	11·4	
	9 15	0·1328	0—1	N_{1-2}	22·6	56	11·4	
	9 30	0·1334	0—1	N_{1-2}	22·4	58	11·7	
	9 45	0·1328	0	N_{1-2}	22·3	59	11·8	Wolken gänzlich verschwunden. ∞^1 in SW.
	10 00	0·1341	0	N_{1-2}	22·2	60	11·9	
	10 15	0·1340	0	N_{1-2}	22·1	61	12·1	
	10 30	0·1334	0	N_1	22·0	61	12·0	∞^{1-2} in SW.
	10 45	0·1323	0	N_1	22·1	62	12·3	
	11 00	0·1310	0	N_1	22·0	62	12·2	
	11 15	0·1256	1—2	N_1	21·9	62	12·1	∞^2 in S und SW. Sterne leuchten matter. Cu in E.

Datum	Zeit	$Q = \frac{g\text{-Kal.}}{\text{Min. } cm^2}$	Bewölkung	Wind	Luftemperatur	Relative Feuchtigkeit in Prozent	Dampfdruck in Millimeter	Anmerkungen
31. VII. 1906	11h 30m p.	0·1227	2	N_1	21·8	64	12·4	∞^2 in S und SW. Cu tief am Horizont in E.
	11 45	0·1213	2	N_{0-1}	21·2	65	12·1	Ci-Cu in E bis W tief am Horizont. ∞^2.
	12 00	0·1207	2	N_1	20·7	66	11·9	Ci-Cu ein wenig höher am Horizont. ∞^1.
1. VIII. 1906	0h 15m a.	0·1202	2	N_1	21·0	65	12·0	
	0 30	0·1193	2	N_1	21·2	66	12·3	Sterne leuchten noch ein wenig matter.
	0 45	0·1182	0—1	N_1	20·9	67	12·3	
	1 00	0·1190	0—1	N_1	20·7	66	12·0	∞^1 in SW. Rote Mondscheibe.
	1 15	0·1176	0—1	N_1	20·8	65	11·9	
	1 30	0·1143	0—1	N_1	21·0	67	12·4	
	1 45	0·1185	0	N_{0-1}	20·8	68	12·4	Wolken ganz verschwunden.
	2 00	0·1247	0	N_0	20·4	70	12·5	∞^1 um Horizont.
	2 15	0·1130	0	N_{0-1}	20·2	72	12·7	

1. VIII. 1906	$2^h\ 30^m$ a.	0·1116	0	N_0	19·9	71	12·3	∞^1 um Horizont, fast Windstille.
	2 45	0·1171	0	N_0	20·0	71	12·4	∞^{1-2} um Horizont, fast Windstille.
	3 00	0·1185	0—1	N_0	20·1	70	12·2	∞^1 Wolken tief am Horizont in E.
	3 15	0·1185	1	N_0	20·0	72	12·6	
	3 30	0·1110	1	N_0	19·9	76	13·1	∞^1 $\equiv^1$ Wolken tief am Horizont in S und E.
	3 45	0·1100	1	N_1	18·8	79	12·7	∞^1 $\equiv^1$ und Rauch. Wolken tief am Horizont in S und E.
	4 00	0·1068	1—2	N_1	18·7	79	12·6	
	4 15	0·1003	1—2	N_1	18·7	78	12·5	
	4 30	0·0998	2	N_1	18·7	77	12·3	∞^1 $\equiv^1$, höher am Horizont Ci, in W ein Cu.
	4 45	0·0954	2	N_1	18·6	79	12·5	Blutrote Sonnenscheibe noch sehr tief.
	5 00	0·0817	2	N_{0-1}	18·4	80	12·6	

Zweite Messungsreihe.

Datum	Zeit	$Q = \frac{g\text{-Kal.}}{\text{Min. } cm^2}$	Bewölkung	Wind	Lufttemperatur	Relative Feuchtigkeit in Prozent	Dampfdruck in Millimeter	Anmerkungen
3. VIII. 1906	$12^h\ 00^m$	0·1000	0	— 0	20·5	79	14·1	∞_0 sehr klarer Mond.
	0 15 a.	0·1019	0	— 0	20·8	82	15·0	∞_0
	0 30	0·1049	0	— 0	21·3	85	16·0	∞_0
	0 45	0·0980	0	— 0	21·0	88	16·2	∞_0
	1 00	0·0970	0	— 0	20·4	89	15·8	∞_0
	1 15	0·0960	0	— 0	20·0	91	15·8	∞_0
	1 30	0·0960	0	— 0	19·8	92	15·8	∞_0
	1 45	0·0955	0	— 0	19·4	92	15·4	∞_0
	2 00	0·0955	0	— 0	19·4	91	15·3	∞_0
	2 15	0·0950	0	— 0	19·4	91	15·3	∞_0
	2 30	0·0947	0	— 0	19·5	91	15·3	∞_0

							∞_0
3. VIII. 1906	$2^h\,45^m$ a.	0·0947	0	— 0	19·4	90	15·1
	3 00	0·0942	0	— 0	19·4	90	15·1
	3 15	0·0908	0	— 0	19·5	90	15·1 Mond untergegangen.
	3 30	0·0901	0	— 0	19·5	90	15·1 ∞_0
	3 45	0·0874	0	— 0	19·3	89	14·8 ∞_{0-1}
	4 00	0·0864	0	— 0	19·3	90	15·0 ∞_{0-1}
	4 15	0·0850	0	— 0	19·2	89	14·7 ∞_{0-1}
	4 30	0·0843	0	— 0	19·3	89	14·8 ∞_{0-1}
	4 45	0·0831	0	— 0	19·5	89	14·9 $\infty_{0-1} \equiv_0$ Sonnenaufgang.
	4 50	0·0774	0	NE_{0-1}	—	—	— $\infty_1 \equiv_0$
	4 55	0·0758	0	NE_{0-1}	—	—	— $\infty_1 \equiv_{0-1}$
	4 58	0·0725	0	NE_{0-1}	—	—	— $\infty_0 \equiv_{0-1}$
	5 00	0·0719	0	— 0	19·7	88	15·0 $\infty_0 \equiv_{0-1}$

Dritte Messungsreihe.

Datum	Zeit	$Q = \frac{g\text{-Kal.}}{\text{Min. } cm^2}$	Bewölkung	Wind	Lufttemperatur	Relative Feuchtigkeit in Prozent	Dampfdruck in Millimeter	Anmerkungen
14.VIII. 1906	6h 52m p.	0·1173	1	SE_3	24·3	57	12·8	Sonnenuntergang.
	7 00	0·1171	0	SE_3	24·0	59	13·1	
	7 3	0·1204	0	SE_3	—	—	—	Rot in W.
	7 5	0·1207	0	SE_3	—	—	—	
	7 8	0·1279	0	SE_3	—	—	—	
	7 11	0·1264	0	SE_3	—	—	—	Nur wenig noch rot.
	7 15	0·1305	0	SE_3	23·7	60	13·1	Rot gänzlich verschwunden.
	7 20	0·1276	0	SE_3	—	—	—	
	7 23	0·1328	0	SE_3	—	—	—	
	7 30	0·1299	0	SE_3	23·5	62	13·3	
	7 35	0·1305	0	SE_3	—	—	—	
	7 39	0·1325	0	SE_3	—	—	—	Ganz klar.
	7 43	0·1273	0	SE_3	—	—	—	
	7 45	0·1287	0	SE_3	23·2	64	13·5	
	7 49	0·1258	0	SE_3	—	—	—	

14. VIII. 1906								
	$7^h\ 54^m$ p.	0·1256	0	SE_3	—	—	—	
	7 58	0·1290	0	SE_3	—	—	—	
	8 00	0·1270	0	SE_3	23·2	64	13·5	
	8 15	0·1284	0	SE_3	23·1	64	13·4	
	8 30	0·1292	0	SE_3	23·0	64	13·4	
	8 45	0·1321	0	SE_3	22·9	63	13·1	
	8 48	0·1241	0	ESE_3	—	—	—	
	9 00	0·1269	0	ESE_3	22·5	65	13·2	
	9 15	0·1264	0	ESE_3	22·2	67	13·3	
	9 30	0·1261	0	ESE_3	22·0	69	13·5	
	9 45	0·1227	0	ESE_3	21·5	71	13·5	Ganz klar.
	10 00	0·1264	0	ESE_3	21·4	72	13·6	
	10 15	0·1261	0	ESE_3	21·3	74	13·9	
	10 30	0·1253	0	SSE_3	21·1	74	13·7	
	10 45	0·1264	0	SSE_3	21·0	74	13·6	
	11 00	0·1276	0	SSE_3	21·0	74	13·6	
	11 15	0·1214	0	SSE_3	20·8	74	13·5	
	11 18	0·1185	0	SSE_3	—	—	—	
	11 30	0·1066	0	SSE_3	20·6	75	13·5	
	11 45	0·1124	0	SSE_2	20·0	75	13·0	
	12 00	0·1076	0	SSE_2	19·6	75	12·7	

Datum	Zeit	$Q = \frac{g\text{-Kal.}}{\text{Min. } cm^2}$	Bewölkung	Wind	Lufttemperatur	Relative Feuchtigkeit in Prozent	Dampfdruck in Millimeter	Anmerkungen
15.VIII. 1906	$0^h\ 15^m$ a.	0·1089	0	SSE_2	19·3	76	12·7	Ganz klar.
	0 30	0·1108	0	SSE_2	19·2	76	12·6	
	0 45	0·1029	0	SSE_2	19·3	77	12·8	$0^h\ 55^m$ Mond aufgegangen.
	1 00	0·1081	0	SSE_2	19·4	78	13·0	
	1 15	0·1097	0	SSE_2	19·4	79	13·2	
	1 30	0·1124	0	SSE_2	19·3	80	13·3	
	1 45	0·1124	0	SSE_2	19·3	81	13·5	
	2 00	0·1108	0	SSE_2	19·2	81	13·4	Ganz klar.
	2 15	0·1116	0	SSE_2	19·2	81	13·4	
	2 30	0·1076	0	SSE_2	19·1	81	13·3	
	2 45	0·1060	0	SSE_2	19·0	83	13·5	
	3 00	0·1065	0	SSE_1	18·9	84	13·6	

15.VIII.1906	3h 15m a.	0·1073	0	SSE_0	18·8	86	13·9	∞_0
	3 30	0·1076	0	SSE_{0-1}	18·6	87	13·8	∞_0
	3 35	0·1037	0	SSE_1	—	—	—	∞_0
	3 40	0·1016	0	SSE_1	—	—	—	∞_0
	3 45	0·0998	0	SSE_1	18·2	87	13·5	∞_0
	3 50	0·0977	0	SSE_0	—	—	—	∞_0
	4 00	0·0972	0	SSE_0	18·0	88	13·5	∞_0
	4 10	0·0965	0	SSE_0	—	—	—	∞_0
	4 15	0·0945	0	SSE_0	18·0	86	13·2	∞_0
	4 30	0·0910	0	— 0	18·1	86	13·3	∞_0
	4 40	0·0898	0	— 0	—	—	—	∞_0
	4 45	0·0872	0	— 0	18·0	86	13·2	∞_0
	4 50	0·0804	0	— 0	—	—	—	∞_0
	4 55	0·0741	0	— 0	—	—	—	4h 57m Sonnenaufgang.
	5 00	0·0661	0	— 0	17·9	86	13·1	∞_0
	5 05	0·0626	0	— 0	—	—	—	∞_0

Vierte Messungsreihe

den 31. August 1906.

Datum	Zeit	$Q = \frac{g\text{-Kal.}}{\text{Min. } cm^2}$	Bewölkung	Wind	Lufttemperatur	Relative Feuchtigkeit in Prozent	Dampfdruck in Millimeter	Anmerkungen
31. VIII. 1906	7h 00m p.	0·1766	0	ENE_{0-1}	20·7	48	8·7	6h 45m Sonnenuntergang.
	7 15	0·1771	0	»	20·3	51	9·0	
	7 30	0·1756	0	»	20·1	51	8·9	
	7 40	0·1732	0	»	—	—	—	
	7 45	0·1735	0	— 0	20·0	52	9·0	
	7 50	0·1744	0	— 0	—	—	—	Vollkommen klare Nacht.
	8 00	0·1710	0	— 0	19·6	55	9·3	
	8 15	0·1735	0	— 0	19·4	55	9·2	
	8 30	0·1584	0	— 0	19·3	55	9·1	
	8 45	0·1542	0	— 0	19·2	56	9·3	
	9 00	0·1575	0	— 0	19·3	59	9·8	

31. VIII. 1906	9h 15m p.	0·1623	0	— 0	18·5	61	9·7	Vollkommen klare Nacht.
	9 30	0·1650	0	— 0	18·3	61	9·6	
	9 45	0·1643	0	— 0	18·2	62	9·6	
	10 00	0·1623	0	WSW_{0-1}	18·0	63	9·7	
	10 15	0·1580	0	»	17·9	63	9·6	
	10 30	0·1602	0	»	17·2	66	9·6	
	10 45	0·1607	0	»	17·2	66	9·6	
	11 00	0·1570	0	»	17·2	65	9·5	
	11 15	0·1612	0	»	17·3	65	9·5	
	11 30	0·1570	0	»	17·3	66	9·7	
	11 45	0·1536	0	»	17·2	66	9·6	
1. IX. 1906	12 00 a.	0·1544	0	»	17·1	69	10·0	
	12 15	0·1533	0	»	17·1	69	10·0	
	12 30	0·1512	0	»	17·1	69	10·0	

Fünfte Messungsreihe

vom 1. auf den 2. September 1906.

Datum	Zeit	$Q = \frac{g\text{-Kal.}}{\text{Min. } cm^2}$	Bewölkung	Wind	Lufttemperatur	Relative Feuchtigkeit in Prozent	Dampfdruck in Millimeter	Anmerkungen
1. IX. 1906	$8^h\ 00^m$ p.	0·1658	0	W_1	21·1	56	10·4	$6^h\ 40^m$ Sonnenuntergang.
	8 15	0·1729	0	SW_1	20·6	57	10·3	
	8 30	0·1740	0	»	20·4	58	10·3	
	8 45	0·1713	0	»	20·3	58	10·2	
	9 00	0·1763	0	»	20·0	60	10·4	
	9 15	0·1768	0	»	19·5	62	10·4	
	9 30	0·1691	0	»	19·2	62	10·2	
	9 45	0·1503	0	»	19·2	63	10·4	
	10 00	0·1611	0	»	19·0	65	10·6	Ganz klarer Himmel.
	10 15	0·1601	0	»	18·5	65	10·3	
	10 30	0·1549	0	»	18·4	65	10·2	
	10 45	0·1569	0	»	18·4	65	10·2	
	11 00	0·1628	0	»	18·3	65	10·2	
	11 15	0·1657	0	»	18·1	67	10·3	
	11 30	0·1646	0	»	17·6	67	10·0	
	11 45	0·1686	0	»	17·6	67	10·0	

2. IX. 1906	12h 00m a.	0·1690	0	SW_{0-1}	17·5	67	10·0	Ganz klarer Himmel.
	12 15	0·1687	0	»	17·6	67	10·0	
	12 30	0·1673	0	»	17·8	68	10·3	
	12 45	0·1684	0	»	17·6	67	10·0	
	1 00	0·1669	0	»	17·5	67	10·0	
	1 15	0·1644	0	»	17·6	67	10·0	
	1 30	0·1634	0	»	17·5	73	10·8	
	1 40	0·1577	0	»	—	—	—	
	1 45	0·1554	0	»	16·7	76	10·7	
	1 50	0·1536	0	»	—	—	—	
	2 00	0·1531	0	»	16·2	78	10·7	
	2 15	0·1493	0	»	15·4	79	10·3	
	2 30	0·1476	0	»	15·3	78	10·1	
	2 40	0·1436	0	»	—	—	—	
	2 45	0·1438	0	— 0	15·1	79	10·1	
	2 50	0·1444	0	— 0	—	—	—	
	3 00	0·1402	0	— 0	15·1	79	10·1	
	3 10	0·1345	0	— 0	—	—	—	
	3 15	0·1321	0	— 0	14·9	79	10·0	
	3 20	0·1304	0	SE_1	—	—	—	
	3 30	0·1264	0	»	14·8	81	10·1	
	3 45	0·1222	0	»	14·4	83	10·2	

Sechste Messungsreihe

vom 2. auf den 3. September 1906.

Datum	Zeit	$Q = \frac{g\text{-Kal.}}{\text{Min. } cm^2}$	Bewölkung	Wind	Lufttemperatur	Relative Feuchtigkeit in Prozent	Dampfdruck in Millimeter	Anmerkungen
2. IX. 1906	7h 00m p.	0·1672	0	S_1	23·3	50	10·6	∞_0 zirka 6h 40m Sonnenuntergang.
	7 15	0·1691	0	»	23·1	51	10·7	
	7 30	0·1710	0	»	22·8	53	10·9	
	7 45	0·1743	0	»	22·6	54	11·0	Ganz klar.
	8 00	0·1722	0	»	23·3	55	11·0	
	8 15	0·1740	0	»	21·9	58	11·5	
	8 30	0·1762	0	»	21·4	60	11·4	∞_1
	8 45	0·1744	0	»	21·1	61	11·3	
	9 00	0·1641	0	»	21·0	61	11·3	
	9 15	0·1736	0	»	21·0	63	11·6	
	9 30	0·1778	0	»	20·6	65	11·7	
	9 45	0·1773	0	»	20·2	66	11·6	
	10 00	0·1709	0	»	20·0	66	11·5	Ganz klar.
	10 15	0·1760	0	»	20·0	66	11·5	
	10 30	0·1713	0	»	20·0	68	11·8	
	10 45	0·1723	0	»	19·9	70	12·1	
	11 00	0·1647	0	»	19·3	72	12·0	

2. IX. 1906	11h 15m p.	0·1609	0	S_1	18·6	72	11·4	
	11 30	0·1559	0	»	18·6	73	11·6	
	11 45	0·1497	0	»	18·4	74	11·6	
	12 00	0·1418	0	»	17·4	75	11·1	
3. IX. 1906	0 15 a.	0·1451	0	»	17·2	76	11·1	
	0 30	0·1515	0	»	17·1	77	11·2	
	0 45	0·1458	0	»	16·8	78	11·1	Ganz klar.
	1 00	0·1372	0	»	16·8	80	11·4	
	1 15	0·1322	0	»	16·9	80	11·4	
	1 30	0·1392	0	»	16·4	80	11·1	
	1 45	0·1400	0	»	16·1	80	11·0	
	2 00	0·1408	0	»	16·0	80	10·8	
	2 15	0·1367	0	»	15·9	81	10·8	
	2 30	0·1293	0	»	15·9	82	11·0	∞_1
	2 45	0·1302	0	»	15·7	82	10·9	
	3 00	0·1316	0	»	15·3	82	10·6	
	3 15	0·1297	0	»	15·2	83	10·7	
	3 30	0·1337	0	N_{0-1}	15·2	84	10·8	
	3 45	0·1374	0	»	15·1	84	10·7	
	4 00	0·1456	0	»	14·9	85	10·7	Ganz klar.
	4 15	0·1494	0	»	14·8	84	10·5	
	4 30	0·1377	0	»	15·0	84	10·7	
	4 45	0·1318	0	»	15·3	86	11·1	
	5 00	0·1311	0	»	15·1	85	10·8	
	5 15	0·1247	0	»	14·9	85	10·7	Monduntergang $\infty^1 \equiv_0$
	5 20	0·1241	0	»	14·9	85	10·7	Sonnenaufgang 5h 17m a.

Siebente Messungsreihe

vom 3. auf den 4. September 1906.

Datum	Zeit	$Q = \frac{g\text{-Kal.}}{\text{Min. } cm^2}$	Bewölkung	Wind	Luftemperatur	Relative Feuchtigkeit in Prozent	Dampfdruck in Millimeter	Anmerkungen
3. IX. 1906	$6^h\ 22^m$ p.	0·1491	0	SSE_1	25·0	42	9·9	Sonne noch am Horizont.
	6 24	0·1491	0	»	—	—	—	Sonne verschwunden.
	6 30	0·1440	0	»	24·7	47	10·9	
	6 32	0·1480	0	»	—	—	—	
	6 34	0·1508	0	»	—	—	—	
	6 37	0·1529	0	»	—	—	—	
	6 45	0·1558	0	»	24·4	49	11·2	
	7 00	0·1595	0	»	24·4	50	11·3	
	7 15	0·1587	0	»	24·1	51	11·3	Ganz klar.
	7 30	0·1601	0	»	23·4	52	11·1	
	7 45	0·1564	0	»	23·1	54	11·3	
	8 00	0·1550	0	»	22·1	55	10·9	
	8 15	0·1576	0	»	21·8	60	11·6	
	8 30	0·1621	0	»	21·9	60	11·7	

3. IX. 1906	8h 45m p.	0·1667	0	SSE_1	21·9	60	11·7	
	9 00	0·1683	0	SW_1	21·8	61	11·8	
	9 15	0·1700	0	»	21·6	62	11·9	
	9 30	0·1710	0	»	21·5	62	11·8	
	9 45	0·1719	0	»	21·3	62	11·7	Ganz klar.
	10 00	0·1721	0	»	21·2	61	11·4	
	10 15	0·1708	0	»	21·2	61	11·4	
	10 30	0·1678	0	»	21·2	61	11·4	
	10 45	0·1670	0	»	21·3	60	11·3	
	11 00	0·1581	0	SW_{0-1}	21·2	61	11·4	∞_1
	11 15	0·1543	0	»	20·2	64	11·2	∞_1
	11 30	0·1521	0	»	19·9	65	11·2	∞_1
	11 45	0·1420	0	»	19·8	67	11·5	
	12 00	0·1275	0	»	19·6	69	11·7	
4. IX. 1906	0 15 a.	0·1248	0	»	19·5	70	11·8	
	0 30	0·1233	0	— 0	18·9	71	11·6	
	0 45	0·1278	0	— 0	18·4	71	11·2	Ganz klar.
	1 00	0·1333	0	— 0	18·3	71	11·1	
	1 15	0·1345	0	— 0	18·3	71	11·1	
	1 30	0·1343	0	— 0	18·2	72	11·2	
	1 45	0·1352	0	— 0	17·9	75	11·4	

Datum	Zeit	$Q = \frac{g\text{-Kal.}}{\text{Min. } cm^2}$	Bewölkung	Wind	Luft-temperatur	Relative Feuchtigkeit in Prozent	Dampfdruck in Millimeter	Anmerkungen
4. IX. 1906	$2^h\,00^m$ a.	0·1366	0	— 0	17·6	77	11·5	Ganz klar.
	2 15	0·1226	0	— 0	16·6	80	11·2	
	2 30	0·1232	0	— 0	16·4	81	11·2	
	2 45	0·1223	0	— 0	16·3	82	11·3	
	3 00	0·1250	0	— 0	16·3	82	11·3	
	3 15	0·1270	0	— 0	16·2	82	11·2	
	3 30	0·1279	0	— 0	16·2	82	11·2	
	3 45	0·1288	0	— 0	16·0	83	11·2	
	4 00	0·1296	0	— 0	16·1	82	11·2	
	4 15	0·1256	0	— 0	16·0	82	11·1	
	4 30	0·1320	0	SW_{0-1}	16·0	82	11·1	∞_{0-1}
	4 45	0·1254	0	SW_{0-1}	16·1	82	11·2	
	5 00	0·1228	0	— 0	15·7	85	11·3	Sonnenaufgang $\infty^2 \equiv_{0-1}$
	5 08	0·1210	0	— 0	15·6	86	11·3	$\equiv_{0-1}$

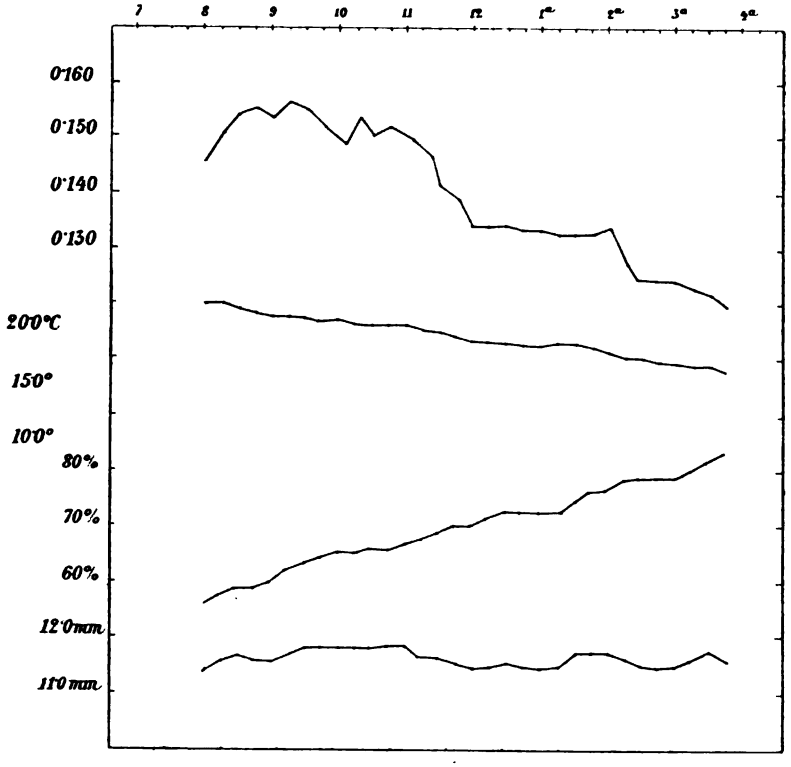
Achte Messungsreihe

vom 4. September 1906.

Datum	Zeit	$Q = \frac{g\text{-Kal.}}{\text{Min. } cm^2}$	Bewölkung	Wind	Lufttemperatur	Relative Feuchtigkeit in Prozent	Dampfdruck in Millimeter	Anmerkungen
4. IX. 1906	7h 00m p.	0·1510	0	W_{1-2}	23·2	58	12·8	6h 30m Sonnenuntergang.
	7 11	0·1546	0	W_{1-2}	—	—	—	
	7 15	0·1510	0	W_{1-2}	23·2	58	12·3	
	7 30	0·1580	0	W_2	23·2	59	12·5	Wind zugenommen.
	7 45	0·1603	0	W_2	23·1	59	12·4	
	8 00	0·1575	0	W_{2-3}	23·1	59	12·4	Mondaufgang.
	8 15	0·1628	0	W_{2-3}	23·1	59	12·4	
	8 20	0·1647	0	W_{2-3}	—	—	—	
	8 30	0·1588	0	W_3	23·1	59	12·4	
	8 45	0·1628	0	W_3	23·1	59	12·4	
	9 00	0·1642	0	W_3	23·1	59	12·4	Ganz klar.
	9 15	0·1687	0	W_3	23·0	59	12·3	
	9 30	0·1732	0	W_3	23·0	59	12·3	
	9 45	0·1723	0	W_3	23·0	59	12·3	

Datum	Zeit	$Q = \frac{g\text{-Kal.}}{\text{Min. } cm^2}$	Bewölkung	Wind	Lufttemperatur	Relative Feuchtigkeit in Prozent	Dampfdruck in Millimeter	Anmerkungen
4. IX. 1906	$10^h\,00^m$ p.	0·1674	0	W_3	23·1	58	12·0	
	10 15	0·1844	0	W_3	22·2	59	11·7	
	10 30	0·1687	0	W_3	22·0	59	11·6	
	10 45	0·1672	0	W_3	21·5	60	11·4	
	11 00	0·1643	0	W_3	21·4	60	11·4	
	11 15	0·1659	0	W_3	21·1	61	11·3	Ganz klar.
	11 30	0·1630	0	W_3	21·0	60	11·1	
	11 45	0·1588	0	W_3	21·1	61	11·3	
	12 00	0·1542	0	W_3	20·8	62	11·3	
5. IX. 1906	0 15 a.	0·1521	0	W_3	20·8	62	11·3	
	0 30	0·1533	0	W_3	20·7	60	11·2	
	0 45	0·1500	0	W_3	20·7	60	11·2	Mehr Rauch ober der Stadt.

Mittlerer Gang der nächtlichen Ausstrahlung.



Über die nichtarchimedischen Größensysteme

von

Hans Hahn in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 7. März 1907.)

Das Studium der nichtarchimedischen Größensysteme geht zurück auf P. Du Bois-Reymond[1] und O. Stolz.[2] Ausführlich finden sich einige hieher gehörende Fragen behandelt in der von der Accademia dei Lincei preisgekrönten Schrift von R. Bettazzi: Teoria delle grandezze.[3] In seinen mathematisch und philosophisch bedeutungsvollen »Fondamenti di geometria«[4] baute sodann G. Veronese eine Geometrie auf ohne Benützung des archimedischen Axioms und kam später, anläßlich verschiedener gegen sein Werk gerichteter Einwände, wiederholt auf den Gegenstand zurück.[5] Weitere Untersuchungen über nichtarchimedische Größensysteme rühren von T. Levi-Civita her,[6] der sich eine arithmetische Darstellung des Veronese'schen Kontinuums zum Ziele setzte und dabei zu Resultaten von großer Allgemeinheit geführt wurde. Ferner sei hier noch eine Arbeit von A. Schoenflies genannt,[7] von der weiter unten eingehender zu sprechen sein wird.

Unter einem nichtarchimedischen Größensystem wird im folgenden ein System einfach geordneter Größen verstanden, in dem eine gewissen sechs Forderungen genügende Addition definiert ist und in dem das Axiom des Archimedes nicht gilt.

---

1 Math. Ann., 8 (1875), 11 (1877).

2 Math. Ann., 18 (1881), p. 269; 22 (1883); 39 (1891).

3 Pisa, 1891.

4 Padua, 1891, deutsch von A. Schepp, Leipzig, 1894.

5 Math. Ann., 47 (1896); Rend. Linc. (5), 6 (1897); (5), 7 (1898).

6 Atti ist. Ven. (7), 4 (1892/93); Rend. Linc. (5), 7 (1898).

7 Jahresber. deutsch. Math. Ver., 15 (1906).

Die Größen eines solchen Systems lassen sich dann so in Klassen zusammenfassen, daß innerhalb jeder einzelnen Klasse das Axiom des Archimedes gilt. Diese Klassen bilden nun selbst eine einfach geordnete Menge, deren Ordnungstypus ich als den Klassentypus unseres nichtarchimedischen Größensystems bezeichne. Es besteht dann (§ 1) der Satz, daß es nichtarchimedische Größensysteme von beliebig vorgegebenem Klassentypus gibt.[1]

Beispiele nichtarchimedischer Größensysteme von endlichem Klassentypus liefern, wie seit langem bekannt, die komplexen Zahlen mit n Einheiten, wenn man zwischen ihnen eine geeignete Ordnungsbeziehung festsetzt. Umgekehrt hat Bettazzi in seiner oben genannten Preisschrift gezeigt, daß jedes nichtarchimedische Größensystem vom endlichen Klassentypus n sich arithmetisch durch komplexe Zahlen mit n Einheiten darstellen läßt. Ich zeige nun in § 2 allgemein, daß jedes nichtarchimedische Größensystem sich arithmetisch darstellen läßt durch komplexe Zahlen, deren Einheiten eine (im allgemeinen unendliche) einfach geordnete Menge bilden[2] — der Ordnungstypus dieser Menge ist der Klassentypus unserer Größensysteme —, wobei in jeder einzelnen solchen Zahl die Einheiten, deren Koeffizient von Null verschieden ist, eine »absteigend wohlgeordnete« Menge bilden,[3] d. h. eine Menge, welche bei Umkehrung der Ordnungsbeziehung zwischen ihren Elementen in eine wohlgeordnete Menge im Sinne von G. Cantor übergeht. Über die Art meiner Beweisführung muß ich einige Worte vorausschicken; sie beruht nämlich auf der Annahme, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann. Die Frage nun, ob der von E. Zermelo[4] für diese Behauptung publizierte Beweis bindend ist, ist bekanntlich kontrovers und besonders

---

[1] Dies Resultat deckt sich inhaltlich mit den Überlegungen von Levi-Civita, Rend. Linc. (5), 7/1, p. 113 ff.

[2] Auch Veronese bezeichnet die von ihm aufgestellten Zahlen gelegentlich als komplexe Zahlen mit unendlich vielen Einheiten.

[3] Ein Hinweis auf die Möglichkeit von Zahlen, die mit Hilfe solcher absteigend wohlgeordneter Mengen gebildet sind, findet sich in der genannten Arbeit von Schoenflies.

[4] Math. Ann., 59 (1904).

schwerwiegend sind die Bedenken, die in letzter Zeit Poincaré[1] gegen diesen Beweis geltend gemacht hat. Es muß daher besonders darauf hingewiesen werden, daß das Resultat von § 2 nur unter der Voraussetzung gewonnen ist, daß es eine Wohlordnung der Größen unseres Systems gibt. Es ist übrigens nicht zum ersten Mal, daß von dem Wohlordnungssatze in Fragen, die nicht direkt die Mengenlehre berühren, Gebrauch gemacht wird: G. Hamel[2] hat diesen Satz verwendet, um die Existenz unstetiger Lösungen der Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x)+f(y)$ nachzuweisen.

In § 3 werden die nichtarchimedischen Größensysteme in vollständige und unvollständige unterschieden. Bekanntlich ist die Dedekind'sche Stetigkeitsforderung in nichtarchimedischen Größensystemen unerfüllbar. Veronese hat sie durch ein System von zwei Forderungen ersetzt, deren erste die Dedekind'sche Stetigkeit innerhalb jeder einzelnen Klasse verlangt, während die zweite festsetzt, daß zwischen zwei gegen einander konvergierenden Größen des Systems, deren Differenz kleiner wird als jede Größe des Systems, immer noch eine Größe des Systems liegt.[3] Man erkennt nun leicht, daß unsere vollständigen Systeme auch immer stetig sind im Sinne von Veronese, während das Umgekehrte nicht zutrifft: es gibt Systeme mit Veronese'scher Stetigkeit, die nicht vollständig sind.[4] Hilbert hat für archimedische Größensysteme die Dedekind'sche Stetigkeitsforderung in zwei Forderungen gespalten,[5] deren erste das Axiom des Archimedes enthält, während die zweite — das sogenannte Vollständigkeitsaxiom — verlangt, es solle nicht möglich sein, das System durch Hinzufügung neuer Größen so zu erweitern, daß auch im erweiterten Systeme alle übrigen Axiome — die Axiome der Verknüpfung, die Axiome der Anordnung und das archi-

---

[1] Revue de metaphysique et de morale, 1905.

[2] Math. Ann., 60 (1905).

[3] Schoenflies untersucht l. c. die Tragweite der zweiten Forderung, wenn man die erste nicht als erfüllt voraussetzt.

[4] Zum Beispiel die von Levi-Civita l. c. angegebenen.

[5] Grundlagen der Geometrie, 2. Aufl., p. 26; Jahresber. deutsch. Math. Ver., 8 (1900).

medische Axiom — weiter gelten. Schoenflies spricht nun in seiner oben genannten Arbeit die Vermutung aus, es könne keine nichtarchimedischen Größensysteme geben, für welche ein Vollständigkeitsaxiom gilt. Diese Behauptung ist sicher richtig, wenn man hier dem Vollständigkeitsaxiom den Inhalt geben will, es solle nicht möglich sein, das System so zu erweitern, daß die Axiome der Verknüpfung und Anordnung erhalten bleiben.

Man beachte aber, daß die Frage noch in andrer Weise gestellt werden kann. Das Vollständigkeitsaxiom, wie es für archimedische Systeme formuliert ist, verlangt auch Weiterbestehen des archimedischen Axioms im erweiterten Systeme, und man kann ihm also auch die Form geben, es solle nicht möglich sein, daß die Axiome der Verknüpfung und Anordnung weiter bestehen und jede der neu hinzugekommenen Größen mit einer Größe des ursprünglichen Systems in dieselbe Klasse gehört. In dieser Form nun gestattet das Vollständigkeitsaxiom sofort eine Übertragung auf nichtarchimedische Größensysteme und damit diese Forderung erfüllt sei, ist notwendig und hinreichend, daß das Größensystem ein vollständiges ist. Archimedische und nichtarchimedische Größensysteme unterscheiden sich dann nur mehr durch das archimedische Axiom. Diesem Axiom kann man aber die Form geben: Unser Größensystem soll vom Klassentypus 1 sein. Für ein nichtarchimedisches Größensystem tritt dann an Stelle dieser Forderung die Festsetzung des Klassentypus dieses Systems, etwa: Das System soll vom Typus $\omega^* + \omega$ sein oder es soll vom Ordnungstypus des Kontinuums sein, so daß also vollständiger Parallelismus für archimedische und nichtarchimedische Größensysteme erreicht ist.

Im letzten Paragraphen wird gezeigt, daß für vollständige nichtarchimedische Größensysteme, zwischen deren Klassen sich eine allen Regeln der gewöhnlichen Addition der reellen Zahlen genügende Addition definieren läßt, eine allen Regeln der gewöhnlichen Multiplikation der reellen Zahlen genügende Multiplikation definiert werden kann, die also auch eine inverse Operation zuläßt: die Division. Es ist dies deshalb bemerkenswert, weil dadurch gezeigt ist, daß der für komplexe Zahl-

systeme mit einer endlichen Anzahl von Einheiten gültige Satz von der Unmöglichkeit einer allen Regeln der gewöhnlichen Arithmetik genügenden Multiplikation für komplexe Zahlen mit unendlich vielen Einheiten seine Gültigkeit verliert. Hierauf ist schon von Veronese hingewiesen worden. Hier nun wird die Fragestellung in voller Allgemeinheit behandelt.

Auf die Behandlung einiger spezieller nichtarchimedischer Größensysteme, insbesondere solcher, die sich zur arithmetischen Darstellung des Veronese'schen Kontinuums verwenden lassen, hoffe ich bald zurückkommen zu können.

§ 1.

Wir werden im folgenden ein System von Dingen als ein Größensystem bezeichnen, wenn zufolge irgend einer Regel zwei beliebige Dinge des Systems a und b als einander gleich ($a = b$) oder ungleich ($a \neq b$) definiert sind. An die Definition der Gleichheit werden dabei nur die folgenden zwei Forderungen gestellt:

1. Es muß zufolge dieser Regel jedes Ding des Systems sich selbst gleich sein ($a = a$).
2. Wenn zwei Dinge des Systems einem und demselben dritten gleich sind, so müssen sie untereinander gleich sein (wenn $a = b$, $b = c$, so ist auch $a = c$).

Wir werden es nur mit einfach geordneten Größensystemen zu tun haben. Wir nennen ein Größensystem einfach geordnet, wenn von zwei auf Grund der obigen Regel als ungleich definierten Dingen a, b zufolge einer weiteren Regel das eine (a) als das kleinere, das andere (b) als das größere definiert ist ($a < b$ oder $b > a$). An die Definition der Zeichen $>$ und $<$ stellen wir dabei nur die folgenden zwei Forderungen:

1. Wenn $a > b$, $b > c$ ist, so muß auch $a > c$ sein.
2. Wenn $a > b$ und $a = a'$, $b = b'$, so muß auch $a' > b'$ sein.

Wir werden weiter voraussetzen, daß in unseren Größensystemen sich eine Addition definieren läßt, d. h. eine Operation, der die folgenden Eigenschaften zukommen:

1. Sie gestattet, aus irgend zwei Dingen a und b des Systems in eindeutiger Weise ein drittes Ding $a+b$ des Systems herzuleiten.
2. Wenn $a = a'$ und $b = b'$, so ist $a+b = a'+b'$.
3. Sie ist assoziativ: $(a+b)+c = a+(b+c)$.
4. Sie ist kommutativ: $a+b = b+a$.
5. Sie läßt eine eindeutige Umkehrung (die Subtraktion) zu, d. h. wenn a und c zwei beliebige Größen des Systems sind, so gibt es stets eine Größe b, derart, daß $a+b = c$ ist und für jede andere Größe b', für die ebenfalls $a+b' = c$ besteht, gilt: $b = b'$.
6. Aus $b > b'$ folgt $a+b > a+b'$.

Die Subtraktion drücken wir wie gewöhnlich durch das — Zeichen aus, so daß, wenn $a+b = c$ ist, $b = c-a$ gesetzt wird. Man beweist leicht, daß für irgend zwei Größen a und b des Systems $a-a = b-b$ wird. Diese Größe des Systems — sowie jede ihr gleiche — wird mit 0 bezeichnet. Sie ist die indifferente Größe (der Modul) der Addition: $a+0 = a$.

Diejenigen Größen des Systems, welche > 0 sind, heißen positiv, diejenigen, welche < 0 sind, heißen negativ. Die Größe $0-a$ heißt die zu a entgegengesetzte und wird auch kurz mit $-a$ bezeichnet. Die zu einer positiven Größe entgegengesetzte ist negativ und umgekehrt. Für jedes positive b gilt: $a+b > a$, für jedes negative b gilt $a+b < a$. Die Summe aus n einander gleichen Summanden a bezeichnen wir mit na und nennen sie ein Vielfaches von a (dabei bedeutet n eine natürliche Zahl).

Wir unterscheiden die einfach geordneten Größensysteme, in denen eine unseren Forderungen genügende Addition besteht, in archimedische und nichtarchimedische, je nachdem in ihnen das sogenannte Postulat des Archimedes erfüllt ist oder nicht. Dasselbe lautet:

Es seien a und b zwei beliebige positive Größen des Systems und $a < b$. Dann gibt es stets ein solches Vielfaches na von a, daß $na > b$.

Die Gesamtheit der reellen Zahlen bildet ein archimedisches Größensystem; Beispiele nichtarchimedischer Größensysteme werden wir im folgenden in großer Zahl aufstellen.

Sei uns ein beliebiges nichtarchimedisches Größensystem gegeben und seien a und b irgend zwei positive Größen desselben. Dann bilden die folgenden vier Möglichkeiten eine vollständige Disjunktion.

I. Zu jedem Vielfachen na von a gibt es ein Vielfaches mb von b, so daß $mb > na$ und umgekehrt zu jedem Vielfachen $m'b$ von b ein Vielfaches $n'a$ von a, so daß $n'a > m'b$.

II. Zu jedem Vielfachen na von a gibt es ein Vielfaches mb von b, so daß $mb > na$, aber nicht umgekehrt.

III. Zu jedem Vielfachen $m'b$ von b gibt es ein Vielfaches $n'a$ von a, so daß $n'a > m'b$, aber nicht umgekehrt.

IV. Es gibt weder zu jedem Vielfachen na von a ein Vielfaches mb von b, so daß $mb > na$, noch zu jedem Vielfachen $m'b$ von b ein Vielfaches $n'a$ von a, so daß $n'a > m'b$.

Im Falle I wollen wir sagen, a und b sind von derselben Höhe, in Zeichen $a \sim b$. Es ist offenbar, wenn $a = a'$ ist, auch $a \sim a'$ und wenn $a \sim b$ und $b \sim c$, so auch $a \sim c$.

Im Falle II sagen wir, a sei von geringerer Höhe als b, in Zeichen $a \multimap b$ oder $b \multimap a$ und haben demgemäß im Falle III zu schreiben $b \multimap a$ oder $a \multimap b$. Man erkennt, daß sich die Zeichen $\sim$, $\multimap$, $\multimap$ gegenseitig ausschließen. Es ist ferner leicht zu sehen, daß im Falle II jedes Vielfache von a kleiner als b ($na < b$ für jedes n und daher auch $na < mb$ für jedes n und m), im Falle III jedes Vielfache von b kleiner als a sein muß. Denn wäre etwa im Falle II $na > b$, so wäre auch (nach Eigenschaft 6 der Addition) $mna > mb$ für jede natürliche Zahl m und es gäbe zu jedem Vielfachen von b ein größeres Vielfaches von a entgegen der Voraussetzung, daß Fall II vorliegt.

Fall IV endlich kann überhaupt nicht auftreten. Denn wenn es nicht zu jedem Vielfachen von a ein größeres Vielfaches von b gibt, so muß, wie eben gezeigt, für jedes n die Ungleichung bestehen $na < b$, speziell für $n = 1$ erhält man $a < b$. Gäbe es nun auch nicht zu jedem Vielfachen von b ein größeres Vielfaches von a, so müßte ebenso $b < a$ sein, was unmöglich ist.

Wir sehen also, daß, wenn a und b irgend zwei positive Größen unseres Systems sind, immer eine und nur eine der drei Beziehungen stattfindet:

$$a \sim b, \quad a \prec b, \quad a \succ b.$$

Ferner haben wir erkannt, daß aus $a \prec b$ immer auch folgt $a < b$ und aus $a \succ b$ auch $a > b$, aber nicht umgekehrt.

Ist eine der beiden Größen a und b negativ, etwa a, so ersetzen wir sie durch die entgegengesetzte $-a$, die dann positiv ist und setzen fest, daß zwischen a und b diejenige unserer drei Ordnungsbeziehungen bestehen möge, welche zwischen $-a$ und b besteht. Sind a und b beide negativ, so ersetzen wir sie durch $-a$ und $-b$ und setzen wieder für a und b die zwischen $-a$ und $-b$ bestehende Ordnungsbeziehung fest. Nunmehr besteht zwischen irgend zwei von Null verschiedenen Größen unseres Systems eine und nur eine der drei Ordnungsbeziehungen $\sim$, $\prec$, $\succ$.

Nun fassen wir alle Größen unseres Systems, die untereinander gleiche Höhe haben, in eine Größenklasse zusammen und fügen jeder einzelnen Größenklasse noch die Null hinzu. Jede Größe unseres Systems mit Ausnahme der Null steht also in einer und nur einer Klasse, die Null hingegen in jeder Klasse.

Seien nun A und B zwei verschiedene Größenklassen unseres nichtarchimedischen Größensystems — man erkennt leicht, daß jedes nichtarchimedische Größensystem mindestens zwei verschiedene Klassen enthalten muß — sei a eine von Null verschiedene Größe aus A, b eine von Null verschiedene Größe aus b. Dann ist entweder $a \prec b$ oder $a \succ b$, und dieselbe Ordnungsbeziehung wie zwischen a und b besteht dann zwischen irgend einer von Null verschiedenen Größe aus A einerseits und irgend einer von Null verschiedenen Größe aus B andrerseits. Wir setzen dieselbe Ordnungsbeziehung zwischen den Klassen A und B selbst fest. Zwischen irgend zwei voneinander verschiedenen Klassen A und B unseres Größensystems besteht also eine der beiden Ordnungsbeziehungen $A \prec B$ und $A \succ B$, von denen jede die andere ausschließt. Ferner folgt aus $A \succ B$ und $B \succ C$ offenbar $A \succ C$. Die Klassen unseres

Größensystems bilden daher — nach der Terminologie von G. Cantor — eine einfach geordnete Menge, der somit ein bestimmter Ordnungstypus zukommt. Wir bezeichnen ihn als den Klassentypus unseres nichtarchimedischen Größensystems.

Jedes archimedische Größensystem besteht nur aus einer einzigen Klasse[1] und hat somit den Klassentypus 1.

Ein nichtarchimedisches Größensystem vom Klassentypus 2 bilden die gemeinen komplexen Zahlen $a+bi$, wenn man zwischen ihnen die nachstehende Ordnungsbeziehung festsetzt:

$$a+bi > a'+b'i, \quad \text{wenn } a > a'$$
$$a+bi > a+b'i, \quad \text{wenn } b > b'.$$

Dann wird die Klasse geringerer Höhe gebildet von allen rein imaginären Zahlen, die höhere Klasse von den Zahlen mit nicht verschwindendem reellen Teile.

Ebenso erhalten wir ein nichtarchimedisches Größensystem von beliebigem endlichen Klassentypus n durch Bildung eines komplexen Zahlsystems mit n Einheiten: $a_1e_1+ +a_2e_2+\ldots+a_ne_n$, in dem die Addition definiert ist durch:

$$(a_1e_1+a_2e_2+\ldots+a_ne_n)+(b_1e_1+b_2e_2+\ldots+b_ne_n) = \\ = (a_1+b_1)e_1+(a_2+b_2)e_2+\ldots+(a_n+b_n)e_n$$

und die folgenden Ordnungsbeziehungen festgesetzt sind:

$a_1e_1+a_2e_2+\ldots+a_ne_n > b_1e_1+b_2e_2+\ldots+b_ne_n$, wenn $a_1 > b_1$

oder im Falle

$$a_1 = b_1, \ldots, \quad a_{i-1} = b_{i-1}, \quad \text{wenn } a_i > b_i.$$

Die n Klassen sind dann der Reihe nach gebildet aus den Größen: a_ne_n, $a_{n-1}e_{n-1}+a_ne_n$ $(a_{n-1} \neq 0), \ldots$, $a_2e_2+\ldots+ +a_ne_n (a_2 \neq 0)$, $a_1e_1+a_2e_2+\ldots+a_ne_n$ $(a_1 \neq 0)$, während die Null selbst in allen Klassen steht.

---

[1] Von diesem Standpunkt aus kann man die archimedischen Größensysteme als Spezialfall der nichtarchimedischen auffassen, nämlich als nichtarchimedische Größensysteme vom Klassentypus 1.

Wir können aber auch nichtarchimedische Größensysteme von überendlichem Klassentypus angeben und es gilt der Satz:

Sei eine beliebige einfach geordnete Menge Γ gegeben. Dann gibt es stets nichtarchimedische Größensysteme, deren Klassentypus mit dem Ordnungstypus von Γ übereinstimmt.

Wir bezeichnen die Elemente von Γ mit $\gamma, \gamma' \ldots$. Eine der Menge Γ ähnlich geordnete Menge bilden dann die Symbole $e_\gamma, e_{\gamma'} \ldots$ (wir werden sie im folgenden als »Einheiten« bezeichnen), wenn wir festsetzen:

$$e_\gamma \prec e_{\gamma'}, \quad \text{wenn } \gamma \prec \gamma'.$$

Das gesuchte nichtarchimedische Größensystem erhalten wir nun in der folgenden Weise: Wir greifen aus den Symbolen $e_\gamma, e_{\gamma'} \ldots$ eine beliebige endliche Menge heraus: $e_{\gamma_1}, e_{\gamma_2}, \ldots, e_{\gamma_n}$, die wir uns nach absteigendem Range geordnet denken ($e_{\gamma_1} \succ e_{\gamma_2} \succ \ldots \succ e_{\gamma_n}$) und bilden das Symbol:[1]

$$a_{\gamma_1} e_{\gamma_1} + a_{\gamma_2} e_{\gamma_2} + \ldots + a_{\gamma_n} e_{\gamma_n},$$

wo $a_{\gamma_1}, a_{\gamma_2}, \ldots a_{\gamma_n}$ reelle Zahlen bedeuten. Wir machen die Gesamtheit der so erhältlichen Symbole zu einem Größensystem durch die folgende Festsetzung: Zwei unserer Symbole — sie mögen mit A und B bezeichnet werden — heißen dann und nur dann einander gleich, wenn

1. jede in A, nicht aber in B vorkommende Einheit e_γ in A den Koeffizienten Null hat und umgekehrt, und
2. jede sowohl in A als in B vorkommende Einheit in A und B denselben Koeffizienten hat.

Auf Grund dieser Gleichheitsdefinition sieht man, daß, wenn irgend zwei Symbole A und B gegeben sind, man sie immer so schreiben kann, daß jede in A auftretende Einheit

---

[1] Es wäre logisch richtiger, die einzelnen Glieder dieses Symbols nicht von vornherein durch das Zeichen + der Addition zu verbinden, sondern durch irgend ein anderes Zeichen, das nicht schon von vornherein eine Bedeutung hat, doch zeigt die Art, wie weiter unten die Addition unserer Symbole eingeführt wird, daß hiedurch keine Zweideutigkeit entstehen kann, da tatsächlich das Symbol $a_{\gamma_1} e_{\gamma_1} + \ldots + a_{\gamma_n} e_{\gamma_n}$ die Summe der n Symbole: $a_{\gamma_1} e_{\gamma_1}, a_{\gamma_2} e_{\gamma_2} \ldots, a_{\gamma_n} e_{\gamma_n}$ wird.

auch in B auftritt und umgekehrt. Ist etwa e_γ eine in A, nicht aber in B auftretende Einheit, so kann man ja in B an der geeigneten Stelle das Glied $o.e_\gamma$ hinzufügen, wodurch nach unserer Gleichheitsdefinition B nicht geändert wird.

Um nun zu definieren, welches von zwei ungleichen Symbolen A und B größer heißen soll, denken wir uns A und B in der angegebenen Weise mit Hilfe derselben Einheiten angeschrieben. Es können dann nicht alle Einheiten in A und B denselben Koeffizienten haben und unter denen, die verschiedene Koeffizienten haben, muß es eine von höchstem Range geben, etwa e_γ. Als das größere der beiden Symbole wird dann dasjenige bezeichnet, in dem e_γ den größeren Koeffizienten hat. Auf Grund dieser Definitionen bilden unsere Symbole ein System einfach geordneter Größen.

Um die Addition unserer Größen zu definieren, denken wir uns wieder A und B durch dieselben Einheiten dargestellt:

$$A = a_{\gamma_1} e_{\gamma_1} + a_{\gamma_2} e_{\gamma_2} + \ldots + a_{\gamma_n} e_{\gamma_n}$$
$$B = b_{\gamma_1} e_{\gamma_1} + b_{\gamma_2} e_{\gamma_2} + \ldots + b_{\gamma_n} e_{\gamma_n}$$

und setzen fest:

$$A+B = (a_{\gamma_1}+b_{\gamma_1}) e_{\gamma_1} + (a_{\gamma_2}+b_{\gamma_2}) e_{\gamma_2} + \ldots + (a_{\gamma_n}+b_{\gamma_n}) e_{\gamma_n}.$$

Es ist klar, daß diese Addition alle sechs Bedingungen erfüllt, die wir eingangs an eine Addition gestellt haben. Insbesondere erkennt man, daß eine Größe dann und nur dann gegenüber unserer Addition indifferent ist, wenn ihre sämtlichen Einheiten e_γ die Koeffizienten Null haben. Alle diese Größen sind einander gleich, wie es sein muß, und werden mit 0 bezeichnet.

Man erkennt nun sofort, daß zwei Größen A und B dann und nur dann in dieselbe Klasse gehören, wenn in beiden die Einheit höchsten Ranges, deren Koeffizient von Null verschieden ist, übereinstimmt. Sind hingegen diese beiden Einheiten verschieden, in A etw e_γ, in B aber $e_{\gamma'}$, dann hat die Klasse von A geringere oder größere Höhe als die von B, je nachdem $\gamma \prec \gamma'$ oder $\gamma \succ \gamma'$. Die Klassen unseres Größensystems bilden somit eine Menge, die ähnlich geordnet ist der Menge

der Einheiten e_γ und somit auch ähnlich ist der ursprünglichen Menge Γ, so wie wir behauptet hatten.

Doch ist das hier angegebene Größensystem nur ein spezieller Fall viel allgemeinerer Größensysteme vom selben Klassentypus. Um sie zu erhalten, gehen wir folgendermaßen vor: Wir bilden aus der Menge Γ Teilmengen N mit den nachstehenden Eigenschaften:

1. Die Menge N enthält ein Element höchsten Ranges.
2. Jede Teilmenge von N enthält ein Element höchsten Ranges.

Wie man sieht, wird die Menge N wohlgeordnet, wenn man zwischen je zweien ihrer Elemente die Beziehung $\subset$ durch $\supset$ ersetzt. Wir wollen eine solche Menge »absteigend wohlgeordnet« nennen. Jedenfalls ist jede absteigend wohlgeordnete Menge einer wohlgeordneten Menge äquivalent, ihre Mächtigkeit daher ein $\aleph$. Wir greifen nun aus der Menge Γ nur solche absteigend wohlgeordnete Teilmengen N heraus, deren Mächtigkeit kleiner ist als ein beliebig vorgegebenes $\aleph$, etwa $\aleph_\mu$. Seien

$$\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n, \ldots, \gamma_\omega, \gamma_{\omega+1}, \ldots, \gamma_\alpha, \ldots$$

die Elemente von N (der Index α wird alle Ordinalzahlen zu durchlaufen haben, die kleiner sind als eine bestimmte, der Zahlklasse $Z(\aleph_\mu)$ vorangehende Ordinalzahl β). Aus den entsprechenden Einheiten:

$$e_{\gamma_0}, e_{\gamma_1}, \ldots, e_{\gamma_n}, \ldots, e_{\gamma_\omega}, e_{\gamma_{\omega+1}}, \ldots, e_{\gamma_\alpha}, \ldots$$

bilden wir dann das Symbol:[1]

$$A = a_{\gamma_0} e_{\gamma_0} + a_{\gamma_1} e_{\gamma_1} + \ldots + a_{\gamma_\omega} e_{\gamma_\omega} + a_{\gamma_{\omega+1}} e_{\gamma_{\omega+1}} + \ldots + a_{\gamma_\alpha} e_{\gamma_\alpha} + \ldots,$$

---

[1] Auch hier wäre es korrekter, die Glieder des Symbols nicht gerade durch das Zeichen $+$ der Addition zu verbinden, doch kann auch hier keine Zweideutigkeit entstehen, aus denselben Gründen wie oben, wenn unsere absteigend wohlgeordnete Menge sich auf eine endliche Menge reduziert; ist aber diese absteigend wohlgeordnete Menge transfinit, so aus dem Grunde, weil eine Summe aus transfinit vielen Summanden in unserem Größensystem überhaupt nicht definiert wird.

wo die Koeffizienten a_{γ_α} reelle Zahlen bedeuten und die Summation sich über alle Ordinalzahlen α zu erstrecken hat, die der Zahl β vorangehen.

Sei dann:

$$B = b_{\gamma'_0} e_{\gamma'_0} + b_{\gamma'_1} e_{\gamma'_1} + \ldots + b_{\gamma'_\alpha} e_{\gamma'_\alpha} + \ldots \quad (\alpha < \beta')$$

ein analog gebautes Symbol, so definieren wir: Das Symbol A heiße gleich dem Symbol B, wenn:

1. Jede in A, nicht aber in B vorkommende Einheit e_{γ_α} in A den Koeffizienten Null hat ($a_{\gamma_\alpha} = 0$) und umgekehrt, und wenn
2. jede sowohl in A als in B vorkommende Einheit ($e_{\gamma_\alpha} = e_{\gamma'_{\alpha'}}$) in A und B denselben Koeffizienten hat ($a_{\gamma_\alpha} = b_{\gamma'_{\alpha'}}$).

Speziell werden wir dann und nur dann $A = 0$ setzen, wenn die Koeffizienten sämtlicher Einheiten von A Null sind.

Auch hier dürfen wir immer annehmen, daß jede in A vorkommende Einheit auch in B, jede in B vorkommende Einheit auch in A vorkommt. Seien in der Tat N' und N'' zwei absteigend wohlgeordnete Teilmengen von Γ, deren Mächtigkeit kleiner ist als $\aleph_\mu$. Die Vereinigungsmenge $N'+N''$ in der durch Γ gegebenen Anordnung der Elemente bildet dann selbst, wie unmittelbar ersichtlich, eine absteigend wohlgeordnete Menge. Da nun bekanntlich, wenn $\mu' < \mu''$ ist, $\aleph_{\mu'} + \aleph_{\mu''} = \aleph_{\mu''}$ ist, so folgt aus $\mu' < \mu$, $\mu'' < \mu$ auch:

$$\aleph_{\mu'} + \aleph_{\mu''} < \aleph_\mu$$

und somit gehört die Menge $N'+N''$ als absteigend wohlgeordnete Menge von einer Mächtigkeit $< \aleph_\mu$ auch zu den von uns betrachteten Teilmengen von Γ. Statt nun bei Bildung von A über die Menge N' zu summieren, kann man ebensogut über die Menge $N'+N''$ summieren, wenn man nur jeder in $N'+N''$, nicht aber in N' vorkommenden Einheit den Koeffizienten Null erteilt, und Analoges gilt für B.

Um nun zu definieren, welches von zwei Symbolen A und B das größere heißen soll, denken wir uns A und B in der angegebenen Weise aus denselben Einheiten gebildet. Wenn A und B nicht gleich sind, so gibt es eine Teilmenge ihrer

Einheiten, welche in A und B verschiedene Koeffizienten haben. Nach den Eigenschaften der zur Bildung unserer Symbole verwendeten Teilmengen von Γ muß es unter diesen Einheiten eine von höchstem Range geben, etwa $e_{\gamma_{\alpha_0}}$. Größer heiße dann dasjenige der beiden Symbole, in welchem $e_{\gamma_{\alpha_0}}$ den größeren Koeffizienten hat. Unsere Symbole bilden nunmehr ein einfach geordnetes Größensystem.

Um die Addition unserer Symbole zu definieren, denken wir uns wieder A und B aus denselben Einheiten gebildet:

$$A = a_{\gamma_0} e_{\gamma_0} + a_{\gamma_1} e_{\gamma_1} + \ldots + a_{\gamma_\alpha} e_{\gamma_\alpha} + \ldots \quad (\alpha < \beta)$$
$$B = b_{\gamma_0} e_{\gamma_0} + b_{\gamma_1} e_{\gamma_1} + \ldots + b_{\gamma_\alpha} e_{\gamma_\alpha} + \ldots \quad (\alpha < \beta)$$

und setzen fest:

$$A+B = (a_{\gamma_0}+b_{\gamma_0}) e_{\gamma_0} + (a_{\gamma_1}+b_{\gamma_1}) e_{\gamma_1} + \ldots + (a_{\gamma_\alpha}+b_{\gamma_\alpha}) e_{\gamma_\alpha} + \ldots \quad (\alpha < \beta)$$

Man erkennt wieder, daß eine Größe unseres Systems dann und nur dann indifferent gegenüber dieser Addition ist, wenn ihre sämtlichen Einheiten den Koeffizienten Null haben, und daß alle diese Größen einander gleich sind. Sie werden wieder mit 0 bezeichnet.

Daß das so erhaltene nichtarchimedische Größensystem wieder den gewünschten Klassentypus hat, zeigt man wie oben. Man erhält das früher behandelte spezielle Größensystem, indem man für das $\aleph_\mu$ unserer allgemeinen Erörterungen speziell $\aleph_0$ wählt.

Bemerkenswerte nichtarchimedische Größensysteme erhält man, wenn man für die geordnete Menge Γ etwa die Menge der rationalen Zahlen in ihrer natürlichen Reihenfolge oder das Kontinuum wählt. Man erhält dann verschiedene Systeme, je nachdem man für das $\aleph_\mu$ unserer allgemeinen Theorie $\aleph_0$ oder $\aleph_1$ wählt.

§ 2.

Wir wollen nun beweisen, daß die eben angegebenen nichtarchimedischen Größensysteme die allgemeinsten sind. Genauer gesprochen: Wir wollen zeigen, daß den Größen eines

beliebigen nichtarchimedischen Größensystems sich in eindeutiger Weise Symbole von der Form:

$$\Sigma a_\gamma e_\gamma \tag{1}$$

zuordnen lassen, wo die a_γ reelle Zahlen bedeuten, die e_γ aber Symbole für eine Rangordnung (»Einheiten«) sind und die Summation sich über absteigend wohlgeordnete Mengen erstreckt. Und zwar wird diese Zuordnung die folgenden Eigenschaften haben:

(α) Ungleichen Größen des Systems entsprechen verschiedene Symbole. Dabei sollen — übereinstimmend mit § 1 — zwei Symbole dann und nur dann als nicht verschieden betrachtet werden, wenn jede Einheit, die im einen vorkommt, im anderen aber nicht, im ersteren den Koeffizienten Null hat, und wenn jede Einheit, die in beiden vorkommt, auch in beiden denselben Koeffizienten hat.[1]

(β) Haben die beiden Größen g und g' des Systems die Symbole:

$$g = \Sigma a_\gamma e_\gamma \qquad g' = \Sigma a'_\gamma e_\gamma, \tag{2}$$

so hat die gleichfalls im System vorkommende Größe $g+g'$ das Symbol

$$g+g' = \Sigma(a_\gamma + a'_\gamma) e_\gamma.$$

(γ) Ist g die größere der beiden Größen (2), so ist unter allen Differenzen $a_\gamma - a'_\gamma$ die erste von Null verschiedene positiv.

Sei uns also irgend ein nichtarchimedisches Größensystem G gegeben. Ferner sei uns eine einfach geordnete Menge Γ von Elementen γ gegeben, deren Ordnungstypus der Klassentypus von G ist. Wir denken uns — für den Fall, daß zwischen den Klassen von G und den Elementen von Γ mehr als eine ähnliche Beziehung möglich sein sollte — eine derselben festgehalten. Jeder Klasse von G entspricht also in eindeutiger Weise ein Element γ von Γ, dem wir eine Einheit e_γ zuordnen,

---

[1] Auf Grund dieser Festsetzung können wir wie in § 1 immer annehmen, daß zwei vorgegebene Symbole der Form (1) genau dieselben Einheiten e_γ enthalten, wovon bei Formulierung der Eigenschaften (β) und (γ) Gebrauch gemacht ist.

die wir zur Bezeichnung der Klasse verwenden wollen; wir bezeichnen die betreffende Klasse kurz als die Klasse e_γ.

Wie schon in § 1 bemerkt, muß es im System eine gegen die Addition indifferente Größe geben. Wir bezeichnen sie mit 0 oder einem Symbol der Form (1), in dem alle Koeffizienten a_γ Null sind.

Gebrauch machend von dem Satze, daß jede Menge einer wohlgeordneten Menge äquivalent ist, denken wir uns nun die von Null verschiedenen Größen von G eineindeutig auf eine geeignete wohlgeordnete Menge bezogen. Die dadurch zwischen den Größen von G festgesetzte Rangordnung denken wir uns zunächst noch in nachfolgender Weise modifiziert. Unter allen positiven Größen der Klasse e_γ gibt es eine vom niedrigsten Range (wegen einer bekannten Eigenschaft der wohlgeordneten Mengen). Nehmen wir nun in jeder Klasse e_γ das positive Element niedersten Ranges, so bilden diese Elemente als Teilmenge einer wohlgeordneten Menge selbst eine wohlgeordnete Menge M_1, und das gleiche gilt aus demselben Grunde für die nicht in M_1 enthaltenen Größen von G; diese zweite wohlgeordnete Menge nennen wir M_2. Ebenso ist die Menge $M = M_1 + M_2$ wohlgeordnet (wenn jedes Element von M_2 hinter jedes Element von M_1 geordnet wird, die Elemente von M_1 untereinander, ebenso wie die von M_2 ihre Rangordnung behalten). Die durch die Menge M gegebene Wohlordnung von G denken wir uns nun für das Folgende festgehalten:

In M_1 steht aus jeder Klasse von G eine und nur eine Größe. Die der Klasse e_γ angehörige Größe von M_1 bezeichnen wir mit dem Symbol $1 . e_\gamma$ oder kurz mit e_γ selbst.

Allen Größen von M_1 ist somit ein Symbol zugeordnet. Die Zuordnung von Symbolen zu den übrigen Größen vollziehen wir durch Induktion: Wir nehmen an, allen Größen von G, die in M einer bestimmten Größe g vorangehen, seien bereits Symbole zugeordnet und setzen sodann fest, welches Symbol der Größe g zuzuordnen ist.

Wir führen folgende Bezeichnung ein: Eine Größe g heiße darstellbar durch die vorhergehenden, wenn eine Relation besteht:

$$ng = m_1 g_1 + m_2 g_2 + \ldots + m_i g_i,$$

wo $g_1, g_2, \ldots, g_i$ eine endliche Anzahl von Größen ist, die in M der Größe g vorangehen und $n, m_1, m_2, \ldots, m_i$ von Null verschiedene ganze (positive oder negative) Zahlen bedeuten.

Eine Größe g heiße durch die vorhergehenden darstellbar bis auf Größen der Klasse e_γ, wenn sich eine endliche Anzahl von Größen $g_1, g_2, \ldots, g_i$, die in M der Größe g vorangehen, sowie von Null verschiedene ganze (positive oder negative) Zahlen $n, m_1, m_2, \ldots, m_i$ so auffinden lassen, daß die Differenz

$$ng - m_1 g_1 - m_2 g_2 - \ldots - m_i g_i$$

eine Größe wird, deren Klasse nicht höher ist als die Klasse e_γ.

Sei nun g eine Größe aus M_2. Wir setzen voraus, den der Größe g in M vorangehenden Größen seien bereits Symbole der Form (1) zugeordnet, und zwar so, daß folgende Forderungen erfüllt sind:

1. Es seien $g_1, g_2, \ldots, g_i$ eine endliche Anzahl von Größen, die in M der Größe g vorangehen und zwischen denen eine Relation von der Form:

$$m_1 g_1 + m_2 g_2 + \ldots + m_i g_i = 0 \tag{3}$$

besteht (wo die m_i nicht verschwindende ganze Zahlen bedeuten). Ferner sei $a_\gamma^{(k)}$ der Koeffizient von e_γ im Symbol von g_k, beziehungsweise sei $a_\gamma^{(k)} = 0$, wenn e_γ im Symbol von g_k nicht auftritt; dann soll stets auch:

$$m_1 a_\gamma^{(1)} + m_2 a_\gamma^{(2)} + \ldots + m_i a_\gamma^{(i)} = 0 \tag{4}$$

sein und umgekehrt, wenn die Relation (4) für alle γ gilt, so soll auch die Relation (3) bestehen.

2. Allemal, wenn zwischen den Größen $g_1, g_2, \ldots, g_i$ eine Relation von der Form besteht:[1]

$$m_1 g_1 + m_2 g_2 + \ldots + m_i g_i = g^*, \tag{5}$$

so soll für alle γ derart, daß die Klasse e_γ höher ist als die Klasse von g^* die Relation bestehen:

$$m_1 a_\gamma^{(1)} + m_2 a_\gamma^{(2)} + \ldots + m_i a_\gamma^{(i)} = 0 \tag{6}$$

[1] Dabei kann g^* eine beliebige Größe von G sein und muß nicht in M vor g stehen.

und umgekehrt, wenn die Relation (6) für alle γ besteht, für welche $e_\gamma \leqslant e_{\gamma^*}$, soll auch eine Relation von der Form (5) bestehen, wo g^* höchstens von der Klasse e_{γ^*} ist.

3. Sei g' eine beliebige Größe von G, die in M vor g steht, und es sei in dem ihr zugeordneten Symbol a'_γ der Koeffizient von e_γ, beziehungsweise sei $a'_\gamma = 0$, wenn e_γ in diesem Symbol nicht auftritt. Dann lassen sich zu einem vorgegebenen γ^* eine endliche Anzahl Größen $g_1, g_2, \ldots, g_i$, die in M vor g stehen, sowie ganze Zahlen $n, m_1, m_2, \ldots, m_i$ so auffinden, daß für jedes $\gamma \leqslant \gamma^*$:

$$n a'_\gamma = m_1 a_\gamma^{(1)} + m_2 a_\gamma^{(2)} + \ldots + m_i a_\gamma^{(i)}$$

für $\gamma = \gamma^*$ aber und für jedes $\gamma \not\equiv \gamma^*$:

$$m_1 a_\gamma^{(1)} + m_2 a_\gamma^{(2)} + \ldots + m_i a_\gamma^{(i)} = 0$$

wird. Dabei bedeutet $a_\gamma^{(k)}$ den Koeffizienten von e_γ im Symbol von g_k, beziehungsweise die Null, wenn e_γ in diesem Symbol nicht auftritt.

4. Seien $g_1, g_2, \ldots, g_i$ Größen von G, die in M vor g stehen, und $m_1, m_2, \ldots, m_i$ irgendwelche ganze Zahlen, ferner habe $a_\gamma^{(k)}$ dieselbe Bedeutung wie oben. Ist dann die sicher in G vorkommende Größe

$$m_1 g_1 + m_2 g_2 + \ldots + m_i g_i$$

positiv, so ist auch unter den reellen Zahlen

$$m_1 a_\gamma^{(1)} + m_2 a_\gamma^{(2)} + \ldots + m_i a_\gamma^{(i)} \tag{7}$$

die erste nichtverschwindende positiv [daß es unter den nichtverschwindenden Größen (7) eine erste geben muß, d. h. eine in der γ den höchsten Rang hat, folgt sofort aus den bekannten Eigenschaften der wohlgeordneten Mengen].

Daß für die bereits vollzogene Zuordnung von Symbolen zu den Größen von M_1 diese vier Forderungen erfüllt sind, liegt auf der Hand. Nun gehen wir dazu über, auch der Größe g ein Symbol von der Form (1) zuzuordnen. Wir unterscheiden drei Fälle:

I. Die Größe g sei darstellbar durch vorhergehende Größen; etwa:

$$ng = m_1 g_1 + m_2 g_2 + \ldots + m_i g_i .$$

Hat dann wieder $a_\gamma^{(k)}$ die mehrmals verwendete Bedeutung, so habe im Symbol von g die Einheit e_γ den Koeffizienten:

$$a_\gamma = \frac{m_1}{n} a_\gamma^{(1)} + \frac{m_2}{n} a_\gamma^{(2)} + \ldots + \frac{m_i}{n} a_\gamma^{(i)} .$$

Dieser Koeffizient ist dadurch eindeutig festgelegt. Denn sei:

$$n'g = m_1' g_1' + m_2' g_2' + \ldots + m_j' g_j'$$

eine andere Darstellung von g durch vorhergehende Größen, so ist:

$$n' m_1 g_1 + n' m_2 g_2 + \ldots + n' m_i g_i - n m_1' g_1' - n m_2' g_2' - \ldots - n m_j' g_j' = 0$$

somit nach der Forderung 1:

$$n' m_1 a_\gamma^{(1)} + n' m_2 a_\gamma^{(2)} + \ldots + n' m_i a_\gamma^{(i)} = n m_1' a_\gamma'^{(1)} + n m_2' a_\gamma'^{(2)} + \ldots + n m_j' a_\gamma'^{(j)}$$

wo $a_\gamma'^{(k)}$ für g_k' dieselbe Bedeutung hat wie $a_\gamma^{(k)}$ für g_k. Hieraus folgt die Behauptung.

Daß diejenigen Einheiten e_γ, welche hiebei einen von Null verschiedenen Koeffizienten erhalten, eine absteigend wohlgeordnete Menge bilden, ist evident. Es ist also der Größe g ein Symbol der Form (1) zugeordnet.

II. Sei e_{γ_0} die Klasse von g und g sei nicht darstellbar durch vorhergehende Größen, auch nicht darstellbar bis auf Größen einer Klasse e_γ, wo $\gamma \dashv \gamma_0$. Dann gehen wir so vor:

In M_1 steht eine und nur eine Größe der Klasse e_{γ_0}; sie werde bezeichnet mit g_0. Mit $\bar{g}$ bezeichnen wir die Größe g selbst oder die ihr entgegengesetzte, je nachdem g positiv oder negativ ist. Die Größe $\bar{g}$ ist also jedenfalls positiv. Es läßt sich daher eine ganze positive Zahl n_0 (die auch Null sein kann) so finden, daß:

$$n_0 g_0 < \bar{g} < (n_0 + 1) g_0 \qquad (n_0 \geqq 0).$$

Sei nun d eine ganze Zahl >1. Dann läßt sich wieder eine ganze Zahl n_1 ($\geqq 0$ und $< d$) so bestimmen, daß:

$$(n_0 d+n_1) g_0 < d\bar{g} < (n_0 d+n_1+1) g_0,$$

sodann eine ganze Zahl n_2 ($\geqq 0$ und $< d$), so daß:

$$(n_0 d^2+n_1 d+n_2) g_0 < d^2 \bar{g} < (n_0 d^2+n_1 d+n_2+1) g_0.$$

Allgemein, wenn in dieser Weise $n_0, n_1, \ldots, n_{i-1}$ bestimmt sind, läßt sich n_i so bestimmen, daß:

$$(n_0 d^i+n_1 d^{i-1}+\ldots+n_{i-1} d+n_i) g_0 < d^i \bar{g} < \\ < (n_0 d^i+n_1 d^{i-1}+\ldots+n_{i-1} d+n_i+1) g_0$$

wird, wo alle n_k, ausgenommen n_0, nicht negative ganze Zahlen $< d$ bedeuten und $n_0 \geqq 0$ ist. Gleichheitszeichen können bei diesem Prozeß nie auftreten, weil sonst g durch g_0 darstellbar wäre, entgegen der Voraussetzung.

Wir bilden nun den unendlichen systematischen Bruch:

$$\bar{a}_{\gamma_0} = n_0 + \frac{n_1}{d} + \frac{n_2}{d^2} + \ldots + \frac{n_k}{d^k} + \ldots$$

und geben der Größe g das Symbol $\bar{a}_{\gamma_0} e_{\gamma_0}$ oder $-\bar{a}_{\gamma_0} e_{\gamma_0}$, je nachdem $g = \bar{g}$ oder $g = -\bar{g}$ war. Die Größe g hat somit ein Symbol von der Form (1) erhalten.

III. Sei wieder e_{γ_0} die Klasse von g, und g sei zwar nicht exakt durch vorhergehende Größen darstellbar, wohl aber bis auf Größen von niedrigerer Klasse als e_{γ_0}, etwa in der Form:

$$ng = m_1 g_1 + m_2 g_2 + \ldots + m_i g_i + g^{(1)}, \tag{8}$$

wo die Klasse von $g^{(1)}$ von geringerer Höhe ist als e_{γ_0}. Sei nun e_{γ_k} die erste Klasse von geringerer Höhe als e_{γ_0}, deren Koeffizient im Symbol von g_k nicht Null ist. Auf Grund von Forderung 3 können wir dann unter den der Größe g in M vorausgehenden Größen die Größen $g_{1,k}, g_{2,k}, \ldots, g_{i_k,k}$ so auswählen, daß für geeignete ganze Zahlen $n_k, m_{1,k}, m_{2,k}, \ldots, m_{i_k,k}$ die Beziehung:

$$n_k a_\gamma^{(k)} = m_{1,k} a_\gamma^{(1,k)} + m_{2,k} a_\gamma^{(2,k)} + \ldots + m_{i_k,k} a_\gamma^{(i_k,k)}$$

für alle $\gamma \subset \gamma_k$ gilt, während für alle $\gamma \supseteq \gamma_k$ die Beziehung:

$$m_{1,k}\, a_\gamma^{(1,k)} + m_{2,k}\, a_\gamma^{(2,k)} + \ldots + m_{i_k,k}\, a_\gamma^{(i_k,k)} = 0$$

gilt. Daraus folgt unmittelbar unter Benützung von Forderung 2, daß die Differenz der beiden Größen:

$$n_1 n_2 \ldots n_i m_1 g_1 + n_1 n_2 \ldots n_i m_2 g_2 + \ldots + n_1 n_2 \ldots n_i m_i g_i$$

und:

$$\begin{aligned} &n_2 n_3 \ldots n_i m_1 (m_{1,1} g_{1,1} + m_{2,1} g_{2,1} + \ldots + m_{i_1,1} g_{i_1,1}) + \\ &\quad + n_1 n_3 \ldots n_i m_2 (m_{1,2} g_{1,2} + m_{2,2} g_{2,2} + \ldots + m_{i_2,2} g_{i_2,2}) + \\ &\ldots + n_1 n_2 \ldots n_{i-1} m_i (m_{1,i} g_{1,i} + m_{2,i} g_{2,i} + \ldots + m_{i_i,i} g_{i_i,i}) \end{aligned} \qquad (9)$$

von geringerer Klasse als e_{γ_0} ist. Mithin ist auch die Differenz von $n n_1 n_2 \ldots n_i g$ und der Größe (9) von geringerer Klasse als e_{γ_0}. Daraus schließen wir:

Ist eine Darstellung der Form (8) möglich, so ist auch stets eine analoge Darstellung:

$$\bar{n} g = \bar{m}_1 \bar{g}_1 + \bar{m}_2 \bar{g}_2 + \ldots + \bar{m}_{\bar{i}} \bar{g}_{\bar{i}} + \bar{g}^{(1)}$$

möglich, derart, daß für jedes $\gamma \supset \gamma_0$:

$$\bar{m}_1 \bar{a}_\gamma^{(1)} + \bar{m}_2 \bar{a}_\gamma^{(2)} + \ldots + \bar{m}_{\bar{i}} \bar{a}_\gamma^{(\bar{i})} = 0 \qquad (10)$$

wird. Wir nehmen daher an, die Darstellung (8) habe von vornherein die durch (10) ausgedrückte Eigenschaft, so daß also für $\gamma \supset \gamma_0$:

$$m_1 a_\gamma^{(1)} + m_2 a_\gamma^{(2)} + \ldots + m_i a_\gamma^{(i)} = 0$$

ist. Dieselbe Relation besteht aber — wegen Forderung 2 — für $\gamma \subset \gamma_0$, weil in der Gleichung:

$$m_1 g_1 + m_2 g_2 + \ldots + m_i g_i = n g - g^{(1)}$$

die rechts stehende Größe von der Klasse e_{γ_0} ist. Hingegen ist die Zahl:

$$a_{\gamma_0} = \frac{m_1}{n} a_{\gamma_0}^{(1)} + \frac{m_2}{n} a_{\gamma_0}^{(2)} + \ldots + \frac{m_i}{n} a_{\gamma_0}^{(i)} \qquad (11)$$

gewiß nicht Null, weil sonst nach Forderung 1 die Beziehung bestehen müßte:

$$m_1 g_1 + m_2 g_2 + \ldots + m_i g_i = 0,$$

während $ng - g^{(1)}$ als Differenz zweier Größen verschiedener Klasse nicht Null sein kann. Die durch (11) definierte Zahl a_{γ_0} sei der Koeffizient von e_{γ_0} im Symbol der Größe g (während jede höhere Einheit e_γ den Koeffizienten Null habe).

Durch diese Festsetzung ist der Koeffizient a_{γ_0} eindeutig festgelegt. Dann sei:

$$n'g = m_1' g_1' + m_2' g_2' + \ldots + m_j' g_j' + g'^{(1)} \tag{12}$$

eine andere Darstellung von g, wo wieder $g'^{(1)}$ von niedrigerer Klasse als e_{γ_0} sei, dann ist:

$$n' m_1 g_1 + n' m_2 g_2 + \ldots + n' m_i g_i - n m_1' g_1' - n m_2' g_2' - \ldots - n m_j' g_j' = \\ = n g'^{(1)} - n' g^{(1)}$$

ebenfalls von niedrigerer Klasse als e_{γ_0} und mithin wegen Forderung 2:

$$\frac{m_1}{n} a_{\gamma_0}^{(1)} + \frac{m_2}{n} a_{\gamma_0}^{(2)} + \ldots + \frac{m_i}{n} a_{\gamma_0}^{(i)} = \\ = \frac{m_1'}{n'} a_{\gamma_0}'^{(1)} + \frac{m_2'}{n'} a_{\gamma_0}'^{(2)} + \ldots + \frac{m_j'}{n'} a_{\gamma_0}'^{(j)}$$

wie behauptet. Hat ferner die Darstellung (12) ebenfalls die Eigenschaft:

$$m_1' a_\gamma'^{(1)} + m_2' a_\gamma'^{(2)} + \ldots + m_j' a_\gamma'^{(j)} = 0 \quad \text{für } \gamma \neq \gamma_0, \tag{13}$$

so folgt aus Forderung 1, daß:

$$n'(m_1 g_1 + m_2 g_2 + \ldots + m_i g_i) = \\ = n(m_1' g_1' + m_2' g_2' + \ldots + m_j' g_j') \tag{14}$$

ist.

Wir bilden nun die Differenz:

$$ng - (m_1 g_1 + m_2 g_2 + \ldots + m_i g_i) = g^{(1)},$$

bezeichnen mit e_{γ_1} die Klasse von $g^{(1)}$ — wo also $\gamma_1 \geqq \gamma_0$ — und unterscheiden wieder zwei Fälle:

Erster Fall. Die Größe g sei nicht durch Größen, die ihr in M vorangehen, darstellbar bis auf Größen einer geringeren Klasse als e_{γ_1}. Dasselbe gilt dann offenbar von $g^{(1)}$ und wir können wie im Falle II einen unendlichen systematischen Bruch bestimmen:

$$\bar{a}_{\gamma_1} = n_0 + \frac{n_1}{d} + \frac{n_2}{d^2} + \ldots + \frac{n_k}{d^k} + \ldots,$$

derart, daß (unter $\bar{g}^{(1)}$ die Größe $g^{(1)}$ oder ihre entgegengesetzte verstanden, je nachdem $g^{(1)}$ positiv oder negativ und unter $g_0^{(1)}$ diejenige Größe der Klasse e_{γ_1}, die in M_1 steht) für jedes i:

$$(n_0 d^i + n_1 d^{i-1} + \ldots + n_{i-1} d + n_i) g_0^{(1)} < d^i \bar{g}^{(1)} < (n_0 d^i + n_1 d^{i-1} + \ldots + n_{i-1} d + n_i + 1) g_0^{(1)}.$$

Ferner können wir immer annehmen, in (8) sei die ganze Zahl n positiv. Je nachdem nun $g^{(1)} = \bar{g}^{(1)}$ oder $g^{(1)} = -\bar{g}^{(1)}$, wählen wir $\frac{\bar{a}_{\gamma_1}}{n}$ oder $\frac{-\bar{a}_{\gamma_1}}{n}$ als Koeffizienten a_{γ_1} von e_{γ_1} im Symbol von g, während alle Einheiten e_γ, die im Range zwischen e_{γ_0} und e_{γ_1} stehen, sowie alle, die von niedrigerem Range als e_{γ_1} sind, in diesem Symbol nicht vorkommen sollen.

Die Zuordnung eines Symbols der Form (1) zur Größe g ist somit vollzogen, nur ist wieder zu zeigen, daß auch die Bestimmung von a_{γ_1} eindeutig ist. Wären wir nun statt von der Darstellung (8) von einer anderen, etwa (12), ausgegangen, für welche die Gleichungen (13) gelten sollen und in der wir wieder n' positiv annehmen dürfen, so ergäbe sich:

$$n'g - (m_1' g_1' + m_2' g_2' + \ldots + m_j' g_j') = g'^{(1)}$$

und somit wegen (14):

$$n g'^{(1)} = n' g^{(1)}. \tag{15}$$

Hieraus folgt zunächst, daß, wenn $g^{(1)}$ nicht darstellbar ist bis auf Größen von niedrigerer Klasse als e_{γ_1}, dasselbe von $g'^{(1)}$

gilt. Geht man nun weiter mit $g'^{(1)}$ so vor wie eben mit $g^{(1)}$, so gelangt man zu einem systematischen Bruche:

$$\bar{a}'_{\gamma_1} = n'_0 + \frac{n'_1}{d} + \frac{n'_2}{d^2} + \ldots + \frac{n'_k}{d^k} + \ldots$$

und unsere Behauptung geht dahin, daß:

$$n\bar{a}'_{\gamma_1} = n'\bar{a}_{\gamma_1}.$$

Wäre etwa $n\bar{a}'_{\gamma_1} > n'\bar{a}_{\gamma_1}$, so müßte sich k so wählen lassen, daß:

$$n n'_0 + \frac{n n'_1}{d} + \ldots + \frac{n n'_k}{d^k} > n' n_0 + \frac{n' n_1}{d} + \ldots + \frac{n'(n_k+1)}{d^k}$$

wird. Aus:

$$n'\bar{g}^{(1)} < \{n' n_0 d^k + n' n_1 d^{k-1} + \ldots + n'(n_k+1)\} g_0^{(1)}$$
$$n\bar{g}'^{(1)} > (n\, n'_0 d^k + n\, n'_1 d^{k-1} + \ldots + n\, n'_k) g_0^{(1)}$$

würde dann folgen: $n\bar{g}'^{(1)} > n'\bar{g}^{(1)}$, entgegen der Gleichung (15). Unser Beweis ist somit erbracht.

Zweiter Fall. Die Größe g sei durch Größen, die ihr in M vorangehen, darstellbar bis auf Größen, deren Klasse niedriger ist als e_{γ_1}. Sei etwa

$$n^{(2)} g = m_1^{(2)} g_1^{(2)} + m_2^{(2)} g_2^{(2)} + \ldots + m_{i_2}^{(2)} g_{i_2}^{(2)} + g^{(2)} \qquad (16)$$

eine solche Darstellung, wo die Klasse e_{γ_2} von $g^{(2)}$ geringeren Rang hat als e_{γ_1}. Wir können wie oben annehmen, daß für alle $\gamma \ni \gamma_1$:

$$m_1^{(2)} a_\gamma^{(2,1)} + m_2^{(2)} a_\gamma^{(2,2)} + \ldots + m_{i_2}^{(2)} a_\gamma^{(2,i_2)} = 0 \qquad (17)$$

ist. Ferner muß, da auch (16) eine Darstellung von g von der Form (12) ist:

$$\frac{m_1^{(2)}}{n^{(2)}} a_{\gamma_0}^{(2,1)} + \frac{m_2^{(2)}}{n^{(2)}} a_{\gamma_0}^{(2,2)} + \ldots + \frac{m_{i_2}^{(2)}}{n^{(2)}} a_{\gamma_0}^{(2,i_2)} = a_{\gamma_0}$$

sein, und analog erkennt man, daß für alle anderen $\gamma \lessgtr \gamma_1$ die Gleichung (17) bestehen muß. Als Koeffizienten von e_{γ_1} im Symbol von g wählen wir dann die Zahl:

$$a_{\gamma_1} = \frac{m_1^{(2)}}{n^{(2)}} a_{\gamma_1}^{(2,1)} + \frac{m_2^{(2)}}{n^{(2)}} a_{\gamma_1}^{(2,2)} + \ldots + \frac{m_{i_2}^{(2)}}{n^{(2)}} a_{\gamma_1}^{(2,i_2)}$$

und überzeugen uns ähnlich wie oben, daß diese Definition von der Wahl der Darstellung (16) unabhängig ist. Sodann unterscheiden wir, analog wie oben, zwei Fälle. Wir bezeichnen mit e_{γ_2} die Klasse von $g^{(2)}$ und haben den ersten Fall, wenn eine Darstellung von g bis auf Größen von geringerer Klasse als e_{γ_2} unmöglich ist; in diesem Falle ist mit diesem Schritte die Bestimmung des Symbols für g abgeschlossen. Der zweite Fall hingegen tritt ein, wenn eine Darstellung von g bis auf Größen geringerer Klasse als e_{γ_2} möglich ist; in diesem Falle ist dasselbe Schlußverfahren nochmals anzuwenden.

Wir gehen sogleich ganz allgemein vor und nehmen an, es seien im Symbol von g bereits für eine absteigend wohlgeordnete Menge von Klassen $e_{\gamma_0}, e_{\gamma_1} \ldots e_{\gamma_\alpha} \ldots$, wo der Index α kleiner sei als eine gewisse Ordinalzahl β, die zugehörigen Koeffizienten $a_{\gamma_0}, a_{\gamma_1}, \ldots, a_{\gamma_\alpha} \ldots$ bestimmt,[1] und zwar so, daß zu jeder dieser Klassen e_{γ_α} sich eine Darstellung von g durch vorhergehende Größen bis auf Größen einer niedrigeren Klasse als e_{γ_α} angeben läßt:[2]

$$n^{(\alpha+1)} g = m_1^{(\alpha+1)} g_1^{(\alpha+1)} + m_2^{(\alpha+1)} g_2^{(\alpha+1)} + \ldots + m_{i_{\alpha+1}}^{(\alpha+1)} g_{i_{\alpha+1}}^{(\alpha+1)} + g^{(\alpha+1)} \quad (18)$$

derart, daß für $\gamma = \gamma_\alpha$ und für jedes $\gamma \lessgtr \gamma_\alpha$

$$n^{(\alpha+1)} a_\gamma = m_1^{(\alpha+1)} a_\gamma^{(\alpha+1,1)} + m_2^{(\alpha+1)} a_\gamma^{(\alpha+1,2)} + \ldots + m_{i_{\alpha+1}}^{(\alpha+1)} a_\gamma^{(\alpha+1, i_{\alpha+1})} \quad (19)$$

---

[1] Jede Einheit e_γ, die höheren Rang als irgend ein e_{γ_α} hat, ohne aber mit einem anderen e_{γ_α} übereinzustimmen, habe den Koeffizienten $a_\gamma = 0$.

[2] Wenn es eine solche Darstellung gibt, so müssen für jede andere Darstellung der Form (18) ebenfalls die Gleichungen (19) gelten, woraus sofort folgt, daß eine andere unseren Forderungen genügende Wahl der Klassen e_γ und der Koeffizienten a_{γ_α} unmöglich ist.

und wir wollen zeigen, daß sich dann die Aufstellung des Symbols für g entweder zum Abschluß bringen oder in eindeutiger Weise um einen Schritt weiter führen läßt. Es sind zwei Hauptfälle zu unterscheiden.

Erster Hauptfall. Es sei nicht möglich, g durch vorhergehende Größen darzustellen bis auf Größen, deren Klasse niedriger ist als alle e_{γ_α} $(\alpha < \beta)$. In diesem Falle geben wir im Symbol von g jeder Klasse, die niedriger ist als alle e_{γ_α} $(\alpha < \beta)$, den Koeffizienten Null, und die Aufstellung des Symbols für g ist fertig. Es ist klar, daß dieser Fall nur auftreten kann, wenn die Ordinalzahl β eine Grenzzahl ist[1] (d. h. keine unmittelbar vorhergehende besitzt), denn im entgegengesetzten Falle gäbe es unter den e_{γ_α} ein niederstes und es ließe sich nach Voraussetzung g darstellen bis auf Größen von niedrigerer Klasse als e_{γ_α}.

Zweiter Hauptfall. Es sei möglich, g durch vorhergehende Größen darzustellen bis auf eine Größe $g^{(\beta)}$, deren Klasse niedriger ist als alle e_{γ_α} $(\alpha < \beta)$:

$$n^{(\beta)} g = m_1^{(\beta)} g_1^{(\beta)} + m_2^{(\beta)} g_2^{(\beta)} + \ldots + m_{i_\beta}^{(\beta)} g_{i_\beta}^{(\beta)} + g^{(\beta)}. \qquad (20)$$

Wir dürfen dann wieder annehmen, diese Darstellung sei bereits so gewählt, daß für jede Klasse e_γ, die niedriger ist als alle e_{γ_α}:

$$m_1^{(\beta)} a_\gamma^{(\beta,1)} + m_2^{(\beta)} a_\gamma^{(\beta,2)} + \ldots + m_{i_\beta}^{(\beta)} a_\gamma^{(\beta,i_\beta)} = 0 \qquad (21)$$

ist. Ist dann:

$$n'^{(\beta)} g = m_1'^{(\beta)} g_1'^{(\beta)} + m_2'^{(\beta)} g_2'^{(\beta)} + \ldots + m_{j_\beta}'^{(\beta)} g_{j_\beta}'^{(\beta)} + g'^{(\beta)}$$

eine zweite solche Darstellung, für die ebenfalls für jedes γ, das niedriger ist als alle γ_α:

$$m_1'^{(\beta)} a_\gamma'^{(\beta,1)} + m_2'^{(\beta)} a_\gamma'^{(\beta,2)} + \ldots + m_{j_\beta}'^{(\beta)} a_\gamma'^{(\beta,j_\beta)} = 0,$$

---

[1] Das ist der Grund, warum in den schon erledigten Fällen $\beta = 0$ und $\beta = 1$ dieser Fall nicht auftrat.

so gilt für jedes γ:

$$n'^{(\beta)}(m_1^{(\beta)} a_\gamma^{(\beta,1)} + \ldots + m_{i_\beta}^{(\beta)} a_\gamma^{(\beta,i_\beta)}) =$$
$$= n^{(\beta)}(m_1'^{(\beta)} a_\gamma'^{(\beta,1)} + \ldots + m_{j_\beta}'^{(\beta)} a_\gamma'^{(\beta,j_\beta)}),$$

denn für ein γ, das höheren Rang hat als irgend ein γ_α, gilt diese Gleichung, weil dann jede der beiden Seiten gleich wird $n^{(\beta)} n'^{(\beta)} a_\gamma$; für ein γ, das im Range niedriger ist als alle γ_α, aber gilt sie, weil dann ihre beiden Seiten Null sind. Es ist also:

$$n'^{(\beta)}(m_1^{(\beta)} g_1^{(\beta)} + \ldots + m_{i_\beta}^{(\beta)} g_{i_\beta}^{(\beta)}) = n^{(\beta)}(m_1'^{(\beta)} g_1'^{(\beta)} + \ldots + m_{j_\beta}'^{(\beta)} g_{j_\beta}'^{(\beta)})$$

und somit:

$$n'^{(\beta)} g^{(\beta)} = n^{(\beta)} g'^{(\beta)}.$$

Die Klasse von $g'^{(\beta)}$ ist also dieselbe wie die von $g^{(\beta)}$, wir bezeichnen sie mit e_{γ_β}; sie sei die erste auf alle e_{γ_α} folgende Klasse, die im Symbol von g einen von Null verschiedenen Koeffizienten habe; diese Klasse ist somit eindeutig festgelegt. Es ist nun zunächst der Koeffizient a_{γ_β} von e_{γ_β} im Symbol von g zu bestimmen. Hiezu unterscheiden wir zwei Unterfälle:

Erster Unterfall. Eine Darstellung von g bis auf Größen niedrigerer Klasse als e_{γ_β} sei nicht möglich. Dann werde der Koeffizient von e_{γ_β}, wie im analogen Falle oben, durch Zuhilfenahme eines unendlichen systematischen Bruches definiert. Daß diese Bestimmung eine eindeutige ist, zeigt man wie oben. Jede Einheit, die im Range niedriger ist als e_{γ_β}, erhält den Koeffizienten Null, und die Definition des Symbols von g ist somit auch hier abgeschlossen.

Zweiter Unterfall. Es sei eine Darstellung von g bis auf Größen von niedrigerer Klasse als e_{γ_β} möglich, etwa:

$$n^{(\beta+1)} g = m_1^{(\beta+1)} g_1^{(\beta+1)} + \ldots + m_{i_{\beta+1}}^{(\beta+1)} g_{i_{\beta+1}}^{(\beta+1)} + g^{(\beta+1)}. \quad (22)$$

Den Koeffizienten a_{γ_β} bestimmen wir dann aus:

$$n^{(\beta+1)} a_{\gamma_\beta} = m_1^{(\beta+1)} a_{\gamma_\beta}^{(\beta+1,1)} + \ldots + m_{i_{\beta+1}}^{(\beta+1)} a_{\gamma_\beta}^{(\beta+1,i_{\beta+1})} \quad (23)$$

und überzeugen uns auf dem schon wiederholt angewendeten Wege, daß auch diese Bestimmung eindeutig, d. h. von der speziellen Wahl der Darstellung (22) unabhängig ist.

Wir befinden uns nun in genau denselben Verhältnissen, von denen wir ausgegangen sind, nur daß die absteigend wohlgeordnete Menge $e_{\gamma_0}, e_{\gamma_1} \ldots e_{\gamma_\alpha} \ldots$ ein Glied mehr umfaßt, da der Index α nun alle Ordinalzahlen $< \beta+1$ durchläuft. In der Tat sind die dort gemachten Voraussetzungen auch für unsere um ein Glied vermehrte absteigend wohlgeordnete Menge erfüllt. Um dies behaupten zu können, brauchen wir nur folgendes zu zeigen: Es läßt sich eine Darstellung von g bis auf Größen von niedrigerer Klasse als e_{γ_β}

$$n^{(\beta+1)} g = m_1^{(\beta+1)} g_1^{(\beta+1)} + \ldots + m_{i_{\beta+1}}^{(\beta+1)} g_{i_{\beta+1}}^{(\beta+1)} + g^{(\beta+1)}$$

so angeben, daß für $\gamma = \gamma_\beta$ und jedes $\gamma \leqslant \gamma_\beta$:

$$n^{(\beta+1)} a_\gamma = m_1^{(\beta+1)} a_\gamma^{(\beta+1,1)} + \ldots + m_{i_{\beta+1}}^{(\beta+1)} a_\gamma^{(\beta+1, i_{\beta+1})} \qquad (24)$$

Man erkennt leicht, daß die Darstellung (22) eine Darstellung der Eigenschaft (24) ist. Daß dies stattfindet, sobald γ von höherem Range als irgend ein $\gamma_\alpha (\alpha < \beta)$ ist, ist klar, weil ja (22) gleichzeitig eine Darstellung der Form (18) ist. Für $\gamma = \gamma_\beta$ ergibt Gleichung (23) die gewünschte Eigenschaft, und es ist (24) daher nur noch als richtig zu erweisen für solche γ, die im Range zwischen γ_β und allen γ_α liegen. Aus (20) und (22) folgt aber:

$$n^{(\beta+1)} (m_1^{(\beta)} g_1^{(\beta)} + \ldots + m_{i_\beta}^{(\beta)} g_{i_\beta}^{(\beta)}) -$$
$$- n^{(\beta)} (m_1^{(\beta+1)} g_1^{(\beta+1)} + \ldots + m_{i_{\beta+1}}^{(\beta+1)} g_{i_{\beta+1}}^{(\beta+1)}) =$$
$$= n^{(\beta)} g^{(\beta+1)} - n^{(\beta+1)} g^{(\beta)},$$

wo die rechte Seite von der Klasse e_{γ_β} ist. Daher für $\gamma \leqslant \gamma_\beta$:

$$n^{(\beta+1)} (m_1^{(\beta)} a_\gamma^{(\beta,1)} + \ldots + m_{i_\beta}^{(\beta)} a_\gamma^{(\beta, i_\beta)}) =$$
$$= n^{(\beta)} (m_1^{(\beta+1)} a_\gamma^{(\beta+1,1)} + \ldots + m_{i_{\beta+1}}^{(\beta+1)} a_\gamma^{(\beta+1, i_{\beta+1})})$$

und daher wegen (21) sobald $\gamma \neq \gamma_\alpha$ für jedes α:

$$m_1^{(\beta+1)} a_\gamma^{(\beta+1,1)} + \ldots + m_{i_{\beta+1}}^{(\beta+1)} a_\gamma^{(\beta+1, i_{\beta+1})} = 0$$

wie behauptet.

Wir sehen also folgendes: Sind im Symbol für g die Koeffizienten $a_{\gamma_0}, a_{\gamma_1}, \ldots, a_{\gamma_\alpha} \ldots$ $(\alpha < \beta)$ einer absteigend wohlgeordneten Menge von Einheiten $e_{\gamma_0}, e_{\gamma_1}, \ldots, e_{\gamma_\alpha} \ldots$ $(\alpha < \beta)$ so bestimmt, daß die durch (18) und (19) ausgedrückte Eigenschaft besteht, so läßt sich bei einem folgenden Schritte entweder die Bestimmung des Symbols von g zu Ende führen (erster Hauptfall und erster Unterfall des zweiten Hauptfalles) oder es läßt sich die erste auf alle Einheiten e_{γ_α} $(\alpha < \beta)$ folgende Einheit e_{γ_β} auffinden, deren Koeffizient im Symbol von g nicht Null ist und dieser Koeffizient in eindeutiger Weise so bestimmen, daß die durch (18) und (19) ausgedrückten Eigenschaften auch für die absteigend wohlgeordnete Menge e_{γ_α} $(\alpha \leqq \beta)$ bestehen. Dann aber kann das ganze Verfahren wieder angewendet werden.

Hieraus aber folgt weiter, daß einmal bei Fortführung dieses Prozesses der erste Hauptfall oder der erste Unterfall des zweiten Hauptfalles eintreten muß. Denn träte bei jedem neuen Schritte immer wieder der zweite Unterfall des zweiten Hauptfalles ein, so ließe sich der Prozeß so lange fortsetzen, bis die Mächtigkeit der absteigend wohlgeordneten Menge e_{γ_α} $(\alpha < \beta)$ ein beliebig vorgegebenes $\aleph$ wird. Das ist aber unmöglich, da eine solche Menge als Teilmenge von Γ nie die Mächtigkeit von Γ übertreffen kann. Sobald aber einmal nicht der zweite Unterfall des zweiten Hauptfalles eintritt, wird beim nächsten Schritte die Bildung des Symbols von g abgeschlossen, so daß also auch im Falle III der Größe g ein Symbol der Form (1) zugeordnet ist.

Wir behaupten nun weiter, daß auch für jenen Abschnitt der wohlgeordneten Menge M, der aus allen der Größe g vorangehenden Größen und der Größe g selbst besteht, die Forderungen 1, 2, 3 und 4 erfüllt sind.

Für die erste Hälfte der Forderung 1 ist dies evident. Denn besteht eine Relation

$$m_1 g_1 + m_2 g_2 + \ldots + m_i g_i + m_{i+1} g = 0,$$

so ist g darstellbar durch vorhergehende Größen, wir befinden uns im Falle I und dann wurden ja die Koeffizienten a_γ gerade aus dieser Relation bestimmt.

Die zweite Hälfte von Forderung 1 aber verlangt umgekehrt, daß wenn unter den der Größe g in M vorangehenden Größen sich eine endliche Anzahl $g_1, g_2, \ldots, g_i$ so finden läßt, daß für alle γ:

$$m_1 a_\gamma^{(1)} + m_2 a_\gamma^{(2)} + \ldots + m_i a_\gamma^{(i)} + m_{i+1} a_\gamma = 0, \tag{25}$$

wo $m_1, m_2, \ldots, m_i, m_{i+1}$ ganze Zahlen sind, auch die Beziehung gilt:

$$m_1 g_1 + m_2 g_2 + \ldots + m_i g_i + m_{i+1} g = 0. \tag{26}$$

Nehmen wir zuerst an, wir befinden uns im Falle I und es bestehe die Relation:

$$ng = m_1' g_1' + m_2' g_2' + \ldots + m_j' g_j'. \tag{27}$$

Dann ist für alle γ:

$$-\left(\frac{m_1}{m_{i+1}} a_\gamma^{(1)} + \frac{m_2}{m_{i+1}} a_\gamma^{(2)} + \ldots + \frac{m_i}{m_{i+1}} a_\gamma^{(i)}\right) =$$

$$= a_\gamma = \frac{m_1'}{n} a_\gamma'^{(1)} + \frac{m_2'}{n} a_\gamma'^{(2)} + \ldots + \frac{m_j'}{n} a_\gamma'^{(j)}$$

und somit wegen Forderung 1:

$$m_{i+1}(m_1' g_1' + m_2' g_2' + \ldots + m_j' g_j') +$$

$$+ n(m_1 g_1 + m_2 g_2 + \ldots + m_i g_i) = 0$$

woraus in Verbindung mit (27), (26) folgt.

Im Falle II können wir zeigen, daß Relationen der Form (25) nicht für alle γ bestehen können. Sei in der Tat e_{γ_0} die Klasse von g und sei wieder $\bar{g}$ gleich g oder gleich $-g$, je nachdem g positiv oder negativ ist. Wir bilden die Größe:

$$m_1 g_1 + m_2 g_2 + \ldots + m_i g_i + m_{i+1} g = g^* \tag{28}$$

die notwendig auch in der Klasse e_{γ_0} steht; denn in einer höheren Klasse kann g^* nach Forderung 2 nicht stehen, weil für $\gamma \geqq \gamma_0$:

$$m_1 a_\gamma^{(1)} + m_2 a_\gamma^{(2)} + \ldots + m_i a_\gamma^{(i)} = 0,$$

in einer niedrigeren Klasse kann aber g^* nicht stehen, weil sonst — entgegen der Voraussetzung — g durch vorhergehende Größen darstellbar wäre bis auf Größen von geringerer Klasse als e_{γ_0}. Wir bezeichnen nun wieder mit $\bar{g}$ den absoluten Betrag von g und schreiben (28) in der Form,

$$m_1 g_1 + m_2 g_2 + \ldots + m_i g_i = \bar{m}_{i+1} \bar{g} + g^*,$$

wo wir offenbar $\bar{m}_{i+1}$ positiv annehmen dürfen. Unter Beibehaltung der oben benützten Bezeichnung haben wir dann:

$$\frac{1}{\bar{m}_{i+1}} (m_1 a_{\gamma_0}^{(1)} + m_2 a_{\gamma_0}^{(2)} + \ldots + m_i a_{\gamma_0}^{(i)}) =$$

$$= \bar{a}_{\gamma_0} = n_0 + \frac{n_1}{d} + \frac{n_2}{d^2} + \ldots + \frac{n_k}{d^k} + \ldots,$$

wo:

$$\bar{m}_{i+1}(n_0 d^k + n_1 d^{k-1} + \ldots + n_{k-1} d + n_k) g_0 < \bar{m}_{i+1} d^k \bar{g} <$$
$$< \bar{m}_{i+1}(n_0 d^k + n_1 d^{k-1} + \ldots + n_{k-1} d + n_k + 1) g_0.$$

Andrerseits ist aber auch wegen Forderung 4:

$$\bar{m}_{i+1}(n_0 d^k + n_1 d^{k-1} + \ldots + n_{k-1} d + n_k) g_0 <$$
$$< (m_1 g_1 + m_2 g_2 + \ldots + m_i g_i) d^k <$$
$$< \bar{m}_{i+1}(n_0 d^k + n_1 d^{k-1} + \ldots + n_{k-1} d + n_k + 1) g_0.$$

Daraus würde nun folgen, daß für jedes k:

$$d^k |g^*| < \bar{m}_{i+1} g_0$$

sein muß, was unmöglich ist, wenn g^* in derselben Klasse wie g_0 steht. Die Relation (25) kann also für $\gamma = \gamma_0$ nicht bestehen.

Liege endlich der Fall III vor, so können wir wieder zeigen, daß die Relationen (25) nicht für alle γ erfüllt sein können. Je nachdem dann unter den Einheiten e_{γ_α}, die im Symbol von g einen von Null verschiedenen Koeffizienten haben, eine niedrigste vorhanden ist oder nicht, befinden wir uns im zweiten Hauptfall (und zwar im ersten Unterfall) oder im ersten Hauptfall.

Nehmen wir also zuerst an, wir befinden uns im ersten Hauptfall. Dann gibt es zu jedem α ($<\beta$) eine Darstellung:

$$n^{(\alpha+1)}g = m_1^{(\alpha+1)}g_1^{(\alpha+1)}+m_2^{(\alpha+1)}g_2^{(\alpha+1)}+\ldots+ \\ +m_{i_{\alpha+1}}^{(\alpha+1)}g_{i_{\alpha+1}}^{(\alpha+1)}+g^{(\alpha+1)},$$

wo $g^{(\alpha+1)}$ von niedrigerer Klasse als e_{γ_α} und für jedes $\gamma \leqq \gamma_\alpha$:

$$n^{(\alpha+1)}a_\gamma = m_1^{(\alpha+1)}a_\gamma^{(\alpha+1,1)}+m_2^{(\alpha+1)}a_\gamma^{(\alpha+1,2)}+\ldots+ \\ +m_{i_{\alpha+1}}^{(\alpha+1)}a_\gamma^{(\alpha+1,i_{\alpha+1})}.$$

Hingegen gibt es keine Darstellung von g bis auf Größen, deren Klasse niedriger ist als alle e_{γ_α}.

Wir bilden die Größe:

$$-(m_1g_1+m_2g_2+\ldots+m_ig_i).$$

Dann ist für $\gamma \leqq \gamma_\alpha$:

$$-n^{(\alpha+1)}(m_1a_\gamma^{(1)}+m_2a_\gamma^{(2)}+\ldots+m_ia_\gamma^{(i)}) = \\ = m_{i+1}(m_1^{(\alpha+1)}a_\gamma^{(\alpha+1,1)}+\ldots+m_{i_{\alpha+1}}^{(\alpha+1)}a_\gamma^{(\alpha+1,i_{\alpha+1})}).$$

Somit gilt nach Forderung 2 die Relation:

$$-n^{(\alpha+1)}(m_1g_1+m_2g_2+\ldots+m_ig_i) = \\ = m_{i+1}(m_1^{(\alpha+1)}g_1^{(\alpha+1)}+\ldots+m_{i_{\alpha+1}}^{(\alpha+1)}g_{i_{\alpha+1}}^{(\alpha+1)})+g^{(\alpha+1)*},$$

wo $g^{(\alpha+1)*}$ von niedrigerer Klasse als e_{γ_α} ist. Somit gilt auch:

$$m_{i+1}g = -(m_1g_1+m_2g_2+\ldots+m_ig_i)+g^{(\alpha+1)**} \qquad (29)$$

wo $g^{(\alpha+1)**}$ ebenfalls von niedrigerer Klasse als e_{γ_α} ist, und zwar gilt diese Formel für jedes α ($<\beta$). Es wäre also durch (29) eine Darstellung von g bis auf Größen von niedrigerer Klasse als alle e_{γ_α} geliefert, was unmöglich ist.

Befinden wir uns hingegen im zweiten Hauptfall, und zwar im ersten Unterfall und ist e_{γ_β} die niederste Einheit mit von Null verschiedenem Koeffizienten, so gibt es eine Darstellung:

$$n^{(\beta)}g = m_1^{(\beta)}g_1^{(\beta)}+\ldots+m_{i_\beta}^{(\beta)}g_{i_\beta}^{(\beta)}+g^{(\beta)},$$

wo $g^{(\beta)}$ von niedrigerer Klasse als alle e_{γ_α} $(\alpha < \beta)$ und wo für jedes γ derart, daß für irgend ein α: $\gamma \lesseqgtr \gamma_\alpha$, die Gleichung besteht:

$$n^{(\beta)} a_\gamma = m_1^{(\beta)} a_\gamma^{(\beta,1)} + \ldots + m_{i_\beta}^{(\beta)} a_\gamma^{(\beta,i_\beta)}$$

für jedes γ hingegen, das niedrigeren Rang als alle γ_α hat:

$$m_1^{(\beta)} a_\gamma^{(\beta,1)} + \ldots + m_{i_\beta}^{(\beta)} a_\gamma^{(\beta,i_\beta)} = 0.$$

Dann ist e_{γ_β} die Klasse von $g^{(\beta)}$ und es gibt keine Darstellung von g bis auf Größen von niedrigerer Klasse als e_{γ_β}.

Wir setzen nun:

$$-n^{(\beta)}(m_1 g_1 + m_2 g_2 + \ldots + m_i g_i) - \\ -m_{i+1}(m_1^{(\beta)} g_1^{(\beta)} + m_2^{(\beta)} g_2^{(\beta)} + \ldots + m_{i_\beta}^{(\beta)} g_{i_\beta}^{(\beta)}) = \\ = m_{i+1} g^{(\beta)} + g^* \quad (30)$$

und erkennen, daß g^* ebenfalls von der Klasse e_{γ_β} sein muß. In der Tat, von höherer Klasse kann g^* nicht sein, da für jedes $\lesseqgtr \gamma_\beta$:

$$n^{(\beta)}(m_1 a_\gamma^{(1)} + m_2 a_\gamma^{(2)} + \ldots + m_i a_\gamma^{(i)}) + \\ + m_{i+1}(m_1^{(\beta)} a_\gamma^{(\beta,1)} + m_2^{(\beta)} a_\gamma^{(\beta,2)} + \ldots + m_{i_\beta}^{(\beta)} a_\gamma^{(\beta,i_\beta)}) = 0$$

ist, somit nach Forderung 2 die linke Seite von Gleichung (30) höchstens von der Klasse e_{γ_β} ist. Von niedrigerer Klasse als e_{γ_β} aber kann g^* auch nicht sein, weil sonst $g^{(\beta)}$ und somit auch g darstellbar wäre bis auf Größen von niedrigerer Klasse als e_{γ_β}.

Wir bezeichnen nun mit $\bar{g}^{(\beta)}$ den absoluten Betrag von $g^{(\beta)}$, bestimmen $\bar{m}_{i+1}$ so, daß $\bar{m}_{i+1} \bar{g}^{(\beta)} = m_{i+1} g^{(\beta)}$ wird und dürfen immer annehmen, die Zahl:

$$-n^{(\beta)}(m_1 a_{\gamma_\beta}^{(1)} + m_2 a_{\gamma_\beta}^{(2)} + \ldots + m_i a_{\gamma_\beta}^{(i)}) = \bar{m}_{i+1} \bar{a}_{\gamma_\beta}$$

sei positiv. Dann ist wegen Forderung 4 auch die linke Seite von (30) positiv. Durch Betrachtung des systematischen Bruches:

$$\bar{a}_{\gamma_\beta} = n_0^{(\beta)} + \frac{n_1^{(\beta)}}{d} + \frac{n_2^{(\beta)}}{d^2} + \ldots + \frac{n_k^{(\beta)}}{d^k} + \ldots$$

gelangt man wie oben zu einem Widerspruch. Das Fortbestehen von Forderung 1 ist somit allgemein nachgewiesen.

Wir gehen nun dazu über, das Fortbestehen von Forderung 2 zu beweisen. Wir haben also zunächst zu zeigen, daß wenn

$$m_1 g_1 + m_2 g_2 + \ldots + m_i g_i + m_{i+1} g = g^*, \tag{31}$$

wo g^* von der Klasse e_{γ^*} sei, für alle $\gamma \leftarrow \gamma^*$ die Relationen bestehen:

$$m_1 a_\gamma^{(1)} + m_2 a_\gamma^{(2)} + \ldots + m_i a_\gamma^{(i)} + m_{i+1} a_\gamma = 0.$$

Wir können uns selbstverständlich auf den Fall $\gamma^* \rightarrow \gamma_0$ beschränken, wenn e_{γ_0} die Klasse von g bedeutet. Wir gehen wieder die einzelnen Fälle durch.

Befinden wir uns im Falle I, so haben wir:

$$ng = m_1' g_1' + m_2' g_2' + \ldots + m_j' g_j'$$

und:

$$n a_\gamma = m_1' a_\gamma'^{(1)} + m_2' a_\gamma'^{(2)} + \ldots + m_j' a_\gamma'^{(j)}.$$

Nun ist aber:

$$n(m_1 g_1 + \ldots + m_i g_i) + m_{i+1}(m_1' g_1' + \ldots + m_j' g_j') = n \cdot g^*$$

und somit nach Forderung 2 für alle $\gamma \leftarrow \gamma^*$:

$$n(m_1 a_\gamma^{(1)} + \ldots + m_i a_\gamma^{(i)}) + m_{i+1}(m_1' a_\gamma'^{(1)} + \ldots + m_j' a_\gamma'^{(j)}) = 0,$$

was zu beweisen war.

Im Falle II ist eine Darstellung der Form (31) unmöglich.

Befinden wir uns im Falle III und werden wieder mit e_{γ_α} die Einheiten bezeichnet, die im Symbol von g von Null verschiedene Koeffizienten haben, so ist im ersten Hauptfall die Relation (31) gewiß nur möglich, wenn für irgend ein α: $\gamma^* \leftarrow \gamma_\alpha$. Nun aber ist:

$$n^{(\alpha+1)} g = m_1^{(\alpha+1)} g_1^{(\alpha+1)} + \ldots + m_{i_{\alpha+1}}^{(\alpha+1)} g_{i_{\alpha+1}}^{(\alpha+1)} + g^{(\alpha+1)} \tag{32}$$

wo $g^{(\alpha+1)}$ von niedrigerer Klasse als e_{γ_α} und für alle $\gamma \leftarrow \gamma_\alpha$

$$n^{(\alpha+1)} a_\gamma = m_1^{(\alpha+1)} a_\gamma^{(\alpha+1,1)} + \ldots + m_{i_{\alpha+1}}^{(\alpha+1)} a_\gamma^{(\alpha+1, i_{\alpha+1})}.$$

Aus:

$$n^{(\alpha+1)}(m_1 g_1 + \ldots + m_i g_i) + \\ + m_{i+1}(m_1^{(\alpha+1)} g_1^{(\alpha+1)} + \ldots + m_{i_{\alpha+1}}^{(\alpha+1)} g_{i_{\alpha+1}}^{(\alpha+1)}) = \\ = n^{(\alpha+1)} g^* - m_{i+1} g^{(\alpha+1)}$$

folgt aber wieder für alle $\gamma \leqq \gamma^*$

$$n^{(\alpha+1)}(m_1 a_\gamma^{(1)} + \ldots + m_i a_\gamma^{(i)}) + \\ + m_{i+1}(m_1^{(\alpha+1)} a_\gamma^{(\alpha+1,1)} + \ldots + m_{i_{\alpha+1}}^{(\alpha+1)} a_\gamma^{(\alpha+1, i_{\alpha+1})}) = 0,$$

wie zu beweisen war.

Befinden wir uns endlich im zweiten Hauptfalle von III (und zwar dann im ersten Unterfall), so gibt es unter den Einheiten, die im Symbol von g nicht verschwindende Koeffizienten haben, eine niedrigste e_{γ_β} und es gilt:

$$n^{(\beta)} g = m_1^{(\beta)} g_1^{(\beta)} + \ldots + m_{i_\beta}^{(\beta)} g_{i_\beta}^{(\beta)} + g^{(\beta)}, \qquad (33)$$

wo $g^{(\beta)}$ von der Klasse e_{γ_β}. Da nun offenbar in diesem Falle γ^* nicht von niedrigerem Range als γ_β sein kann, folgt aus (33) auf dem obigen Wege das gewünschte Resultat.

Nun ist noch die zweite Hälfte von Forderung 2 nachzuweisen: Wenn unter den der Größe g vorangehenden Größen sich $g_1, g_2, \ldots, g_i$ so wählen lassen, daß für alle $\gamma \leqq \gamma^*$:

$$m_1 a_\gamma^{(1)} + m_2 a_\gamma^{(2)} + \ldots + m_i a_\gamma^{(i)} + m_{i+1} a_\gamma = 0, \qquad (34)$$

dann ist:

$$m_1 g_1 + m_2 g_2 + \ldots + m_i g_i + m_{i+1} g = g^*, \qquad (35)$$

wo die Klasse von g^* nicht höher als e_{γ^*} ist. Wir können uns wieder ohneweiters auf $\gamma^* \geqq \gamma_0$ beschränken.

Im Falle I haben wir:

$$ng = m_1' g_1' + m_2' g_2' + \ldots + m_j' g_j',$$

wo für alle γ:

$$n a_\gamma = m_1' a_\gamma'^{(1)} + m_2' a_\gamma'^{(2)} + \ldots + m_j' a_\gamma'^{(j)}.$$

Daher ist für $\gamma \subsetneq \gamma^*$:

$$m_{i+1}(m_1' a_\gamma^{(1)} + \ldots + m_j' a_\gamma^{(j)}) + \\ + n(m_1 a_\gamma^{(1)} + m_2 a_\gamma^{(2)} + \ldots + m_i a_\gamma^{(i)}) = 0,$$

woraus nach Forderung 2 in der Tat (35) folgt.

Im Falle II kann, wie schon bewiesen, die Relation (34) für $\gamma = \gamma_0$ nicht erfüllt sein.

Im ersten Hauptfall von Fall III kann — wie ebenfalls schon bewiesen — jedenfalls nicht $\gamma^* \supset \gamma_\alpha$ für alle α sein. Wir haben daher für ein geeignetes α: $\gamma^* \subsetneq \gamma_\alpha$. Im zweiten Hauptfall hingegen kann nicht $\gamma^* \supset \gamma_\beta$ sein. Mit Hilfe von (32), beziehungsweise (33) schließt man dann weiter wie eben im Falle I.

Wir kommen zum Beweis für das Fortbestehen von Forderung 3. Hier ist zu zeigen: Es lassen sich, wenn γ^* gegeben ist, unter den der Größe g vorangehenden Größen $g_1, g_2, \ldots, g_i$ so finden, daß für $\gamma \subsetneq \gamma^*$:

$$n a_\gamma = m_1 a_\gamma^{(1)} + m_2 a_\gamma^{(2)} + \ldots + m_i a_\gamma^{(i)} + m_{i+1} a_\gamma,$$

für $\gamma \not\subset \gamma^*$:

$$0 = m_1 a_\gamma^{(1)} + m_2 a_\gamma^{(2)} + \ldots + m_i a_\gamma^{(i)} + m_{i+1} a_\gamma.$$

Wir können uns offenkundig auf $\gamma^* \supset \gamma_0$ beschränken.

Im Falle I haben wir:

$$n' g = m_1' g_1 + m_2' g_2 + \ldots + m_j' g_j. \tag{36}$$

Nach Forderung 3 kann man nun $\bar{g}_1^{(k)}, \bar{g}_2^{(k)}, \ldots, \bar{g}_{i_k}^{(k)}$ so wählen, daß:

$$\bar{m}_1^{(k)} \bar{a}_\gamma^{(k,1)} + \bar{m}_2^{(k)} \bar{a}_\gamma^{(k,2)} + \ldots + \bar{m}_{i_k}^{(k)} \bar{a}_\gamma^{(k,i_k)} = \begin{cases} \bar{n}^{(k)} a_\gamma^{(k)} & \text{für } \gamma \subsetneq \gamma^* \\ 0 & \text{für } \gamma \not\subset \gamma^* \end{cases}$$

Hieraus aber folgt in Verbindung mit (36):

$$\bar{n}^{(2)} \bar{n}^{(3)} \ldots \bar{n}^{(j)} m_1' (\bar{m}_1^{(1)} \bar{a}_\gamma^{(1,1)} + \bar{m}_2^{(1)} \bar{a}_\gamma^{(1,2)} + \ldots + \bar{m}_{i_1}^{(1)} \bar{a}_\gamma^{(1,i_1)}) + \\ + \bar{n}^{(1)} \bar{n}^{(3)} \ldots \bar{n}^{(j)} m_2' (\bar{m}_1^{(2)} \bar{a}_\gamma^{(2,1)} + \bar{m}_2^{(2)} \bar{a}_\gamma^{(2,2)} + \ldots + \bar{m}_{i_2}^{(2)} \bar{a}_\gamma^{(2,i_2)}) + \ldots \\ + \bar{n}^{(1)} \ldots \bar{n}^{(j-1)} m_j' (\bar{m}_1^{(j)} \bar{a}_\gamma^{(j,1)} + \bar{m}_2^{(j)} \bar{a}_\gamma^{(j,2)} + \ldots + \bar{m}_{i_j}^{(j)} \bar{a}_\gamma^{(j,i_j)}) = \\ = \begin{cases} \bar{n}^{(1)} \bar{n}^{(2)} \ldots \bar{n}^{(i)} n' a_\gamma & \text{für } \gamma \subsetneq \gamma^* \\ 0 & \text{für } \gamma \not\subset \gamma^* \end{cases}$$

womit in diesem Falle die Behauptung erwiesen ist.

Im Falle II ist die ganze Fragestellung trivial. Im ersten Hauptfall des Falles III können wir uns ersichtlich beschränken auf den Fall, daß nicht für alle α: $\gamma^* \dashv \gamma_\alpha$. Sei etwa α_0 die erste unter den Ordinalzahlen α derart, daß nicht $\gamma^* \dashv \gamma_\alpha$. Wir haben schon gesehen, daß es dann eine Darstellung gibt:

$$n^{(\alpha_0)} g = m_1^{(\alpha_0)} g_1^{(\alpha_0)} + m_2^{(\alpha_0)} g_2^{(\alpha_0)} + \ldots + m_{i_{\alpha_0}}^{(\alpha_0)} g_{i_{\alpha_0}}^{(\alpha_0)} + g^{(\alpha_0)},$$

wo:

$$m_1^{(\alpha_0)} a_\gamma^{(\alpha_0, 1)} + \ldots + m_{i_{\alpha_0}}^{(\alpha_0)} a_\gamma^{(\alpha_0, i_{\alpha_0})} = \begin{cases} n^{(\alpha_0)} a_\gamma & \text{für } \gamma \subsetneq \gamma_{\alpha_0} \\ 0 & \text{für } \gamma \supseteq \gamma_{\alpha_0} \end{cases}$$

Diese Darstellung liefert offenbar das Verlangte.

Im zweiten Hauptfall von Fall III (erster Unterfall) können wir annehmen, es sei $\gamma^* \subseteq \gamma_\beta$, wenn e_{γ_β} die letzte Einheit mit von Null verschiedenem Koeffizienten im Symbol von g bedeutet. Dieselbe Schlußweise führt dann zum Ziele.

Wir kommen zu Forderung 4. Hier ist zu beweisen: Wenn

$$m_1 g_1 + m_2 g_2 + \ldots + m_i g_i + m_{i+1} g > 0 \tag{37}$$

ist, so ist der erste nichtverschwindende Ausdruck:

$$m_1 a_\gamma^{(1)} + m_2 a_\gamma^{(2)} + \ldots + m_i a_\gamma^{(i)} + m_{i+1} a_\gamma \tag{38}$$

positiv.

Befinden wir uns zunächst wieder im Falle I, so haben wir:

$$ng = m_1' g_1' + m_2' g_2' + \ldots + m_j' g_j',$$

wo wir n als positiv annehmen können und wo für alle γ:

$$n a_\gamma = m_1' a_\gamma'^{(1)} + m_2' a_\gamma'^{(2)} + \ldots + m_j' a_\gamma'^{(j)}.$$

Aus (37) folgt dann:

$$n(m_1 g_1 + m_2 g_2 + \ldots + m_i g_i) + \\ + m_{i+1}(m_1' g_1' + m_2' g_2' + \ldots + m_j' g_j') > 0$$

und somit ergibt Forderung 4, daß in der Tat der erste nichtverschwindende unter den Ausdrücken:

$$n(m_1 a_\gamma^{(1)} + m_2 a_\gamma^{(2)} + \ldots + m_i a_\gamma^{(i)}) + \\ + m_{i+1}(m_1' a_\gamma'^{(1)} + m_2' a_\gamma'^{(2)} + \ldots + m_j' a_\gamma'^{(j)}) = \\ = n(m_1 a_\gamma^{(1)} + m_2 a_\gamma^{(2)} + \ldots + m_i a_\gamma^{(i)} + m_{i+1} a_\gamma)$$

positiv sein muß, wie behauptet.

Wir gehen zu Fall II über. Ist der Index γ^* des ersten nichtverschwindenden Ausdruckes (38) von höherem Range als γ_0 (wo e_{γ_0} die Klasse von g), so reduziert sich dieser Ausdruck auf:

$$m_1 a_{\gamma^*}^{(1)} + m_2 a_{\gamma^*}^{(2)} + \ldots + m_i a_{\gamma^*}^{(i)}, \tag{39}$$

so daß die Größe:

$$m_1 g_1 + m_2 g_2 + \ldots + m_i g_i \tag{40}$$

von höherer Klasse als g wird. Soll dann (37) gelten, so muß (40) positiv sein und somit nach Forderung 4 auch (39) positiv sein, womit die Behauptung erwiesen ist.

Ist hingegen (39) für alle $\gamma \leqq \gamma_0$ gleich Null, so ist der erste nichtverschwindende Ausdruck (38):

$$m_1 a_{\gamma_0}^{(1)} + m_2 a_{\gamma_0}^{(2)} + \ldots + m_i a_{\gamma_0}^{(i)} + m_{i+1} a_{\gamma_0}, \tag{41}$$

denn dieser Ausdruck kann, wie schon bewiesen, nicht verschwinden.

Hierin hat a_{γ_0} das Zeichen von g. Ist nun:

$$m_1 a_{\gamma_0}^{(1)} + m_2 a_{\gamma_0}^{(2)} + \ldots + m_i a_{\gamma_0}^{(i)} = 0,$$

so ist die Größe (40) von geringerer Klasse als g, mithin gilt die Ungleichung (37), wenn $m_{i+1} g > 0$. Dann aber ist auch $m_{i+1} a_{\gamma_0} > 0$, was wieder der Behauptung entspricht. Ebenso folgt unmittelbar, daß, wenn sowohl (40) als $m_{i+1} g$ positiv sind, der Ausdruck (38) positiv ausfällt. Es bleibt also der Fall, daß von den beiden Größen (40) und $m_{i+1} g$ die eine positiv, die andere negativ ausfällt; etwa:

$$m_1 g_1 + m_2 g_2 + \ldots + m_i g_i > 0,\ m_{i+1} g = -\bar{m}_{i+1} \bar{g} < 0.$$

Wegen Ungleichung (37) ist dann:

$$m_1 g_1 + m_2 g_2 + \ldots + m_i g_i > \bar{m}_{i+1} \bar{g}. \tag{42}$$

Wir betrachten die systematischen Brüche:

$$\frac{1}{\bar{m}_{i+1}} (m_1 a_{\gamma_0}^{(1)} + m_2 a_{\gamma_0}^{(2)} + \ldots + m_i a_{\gamma_0}^{(i)}) =$$

$$= h_0 + \frac{h_1}{d} + \frac{h_2}{d^2} + \ldots + \frac{h_k}{d^k} + \ldots$$

und:

$$\bar{a}_{\gamma_0} = n_0 + \frac{n_1}{d} + \frac{n_2}{d^2} + \ldots + \frac{n_k}{d^k} + \ldots,$$

wo beidemale die linken Seiten positive Zahlen sind. Mit g_0 werde die Größe $1 . e_{\gamma_0}$ bezeichnet. Nach Forderung 4 ist dann für alle k:

$$\bar{m}_{i+1}(h_0 d^k + \ldots + h_{k-1} d + h_k) g_0 \leqq d^k (m_1 g_1 + \ldots + m_i g_i) \leqq$$
$$\leqq \bar{m}_{i+1}(h_0 d^k + \ldots + h_{k-1} d + h_k + 1) g_0$$

und nach Definition von $\bar{a}_{\gamma_0}$:

$$\bar{m}_{i+1}(n_0 d^k + \ldots + n_{k-1} d + n_k) g_0 < d^k \bar{m}_{i+1} \bar{g} <$$
$$< \bar{m}_{i+1}(n_0 d^k + \ldots + n_{k-1} d + n_k + 1) g_0.$$

Wäre nun:

$$m_1 a_{\gamma_0}^{(1)} + m_2 a_{\gamma_0}^{(2)} + \ldots + m_i a_{\gamma_0}^{(i)} < \bar{m}_{i+1} \bar{a}_{\gamma_0},$$

so wäre für alle genügend großen k:

$$\bar{m}_{i+1}(n_0 d^k + \ldots + n_{k-1} d + n_k) > \bar{m}_{i+1}(h_0 d^k + \ldots + h_{k-1} d + h_k + 1)$$

und demnach:

$$\bar{m}_{i+1} \bar{g} > m_1 g_1 + m_2 g_2 + \ldots + m_i g_i,$$

entgegen der Ungleichung (42). Es ist also auch in diesem Falle

$$m_1 a_{\gamma_0}^{(1)} + m_2 a_{\gamma_0}^{(2)} + \ldots + m_i a_{\gamma_0}^{(i)} > \bar{m}_{i+1} \bar{a}_{\gamma_0}$$

(Gleichheit zwischen diesen zwei Zahlen ist ja ausgeschlossen) oder was dasselbe ist:

$$m_1 a_{\gamma_0}^{(1)} + m_2 a_{\gamma_0}^{(2)} + \ldots + m_i a_{\gamma_0}^{(i)} + m_{i+1} a_{\gamma_0} > 0,$$

was wieder der Behauptung entspricht, die somit auch für Fall II vollständig bewiesen ist.

Liege der erste Hauptfall von Fall III vor. Dann kann der Ausdruck (38), wie schon bewiesen, nicht für jedes γ verschwinden, das höheren Rang als irgend ein γ_α hat (wenn e_{γ_α} wieder diejenigen Einheiten bezeichnet, deren Koeffizient im Symbol von g von Null verschieden ist). Es gibt also solche γ_α, welche

von niedrigerem Range als γ^* sind; sei γ_{α_0} das erste unter denselben.

Wir benützen, wie schon wiederholt, die Relation:

$$n^{(\alpha_0+1)} g = m_1^{(\alpha_0+1)} g_1^{(\alpha_0+1)} + \ldots + m_{i_{\alpha_0+1}}^{(\alpha_0+1)} g_{i_{\alpha_0+1}}^{(\alpha_0+1)} + g^{(\alpha_0+1)},$$

wo $g^{(\alpha_0+1)}$ von niedrigerer Klasse als $e_{\gamma_{\alpha_0}}$ und daher auch von niedrigerer Klasse als e_{γ^*} ist. Die ganze Zahl $n^{(\alpha_0+1)}$ kann positiv angenommen werden. Die Größe:

$$m_1 g_1 + m_2 g_2 + \ldots + m_i g_i + m_{i+1} g \tag{43}$$

hingegen ist genau von der Klasse e_{γ^*} (wegen Forderung 2). Die Größe:

$$n^{(\alpha_0+1)} (m_1 g_1 + m_2 g_2 + \ldots + m_i g_i) + \\ + m_{i+1} (m_1^{(\alpha_0+1)} g_1^{(\alpha_0+1)} + \ldots + m_{i_{\alpha_0+1}}^{(\alpha_0+1)} g_{i_{\alpha_0+1}}^{(\alpha_0+1)})$$

hat daher das Zeichen von (43) und ist somit nach (37) positiv. Hier aber ergibt Forderung 4, daß dann:

$$n^{(\alpha_0+1)} (m_1 a_{\gamma^*}^{(1)} + \ldots + m_i a_{\gamma^*}^{(i)}) + m_{i+1} (m_1^{(\alpha_0+1)} a_{\gamma^*}^{(\alpha_0+1,\,1)} + \ldots + \\ + m_{i_{\alpha_0+1}}^{(\alpha_0+1)} a_{\gamma^*}^{(\alpha_0+1,\,i_{\alpha_0+1})} = \\ n^{(\alpha_0+1)} (m_1 a_{\gamma^*}^{(1)} + \ldots + m_i a_{\gamma^*}^{(i)} + m_{i+1} a_{\gamma^*})$$

positiv sein muß, wie behauptet.

Es bleibt der zweite Hauptfall von Fall III zu betrachten, und zwar der erste Unterfall. Ist e_{γ_β} die letzte Einheit, die im Symbol von g einen von Null verschiedenen Koeffizienten hat, so wissen wir bereits, daß nicht $\gamma^* \supset \gamma_\beta$ sein kann.

Ist zunächst $\gamma^* \subset \gamma_\beta$, so gehen wir aus von der Darstellung:

$$n^{(\beta)} g = m_1^{(\beta)} g_1^{(\beta)} + \ldots + m_{i_\beta}^{(\beta)} g_{i_\beta}^{(\beta)} + g^{(\beta)}, \tag{44}$$

wobei wir immer annehmen dürfen, daß $n^{(\beta)}$ positiv ist und daß für alle γ, die niedrigeren Rang haben als sämtliche dem e_{γ_β} vorausgehenden Einheiten, die im Symbol von g einen von Null verschiedenen Koeffizienten haben, die Gleichungen erfüllt sind:

$$m_1^{(\beta)} a_\gamma^{(\beta,\,1)} + \ldots + m_{i_\beta}^{(\beta)} a_\gamma^{(\beta,\,i_\beta)} = 0.$$

Dann ist $g^{(\beta)}$ genau von der Klasse e_{γ_β} und somit von niedrigerer Klasse als die Größe (43) und wir können weiter schließen wie im ersten Hauptfall.

Ist hingegen $\gamma^* = \gamma_\beta$, so folgt aus (37) und (44):

$$n^{(\beta)}(m_1 g_1 + m_2 g_2 + \ldots + m_i g_i) + \\ + m_{i+1}(m_1^{(\beta)} g_1^{(\beta)} + \ldots + m_{i_\beta}^{(\beta)} g_{i_\beta}^{(\beta)}) + m_{i+1} g^{(\beta)} > 0$$

und die im Falle II verwendete Argumentation lehrt, daß der Ausdruck:

$$n^{(\beta)}(m_1 a_{\gamma_\beta}^{(1)} + \ldots + m_i a_{\gamma_\beta}^{(i)}) + m_{i+1}(m_1^{(\beta)} a_{\gamma_\beta}^{(\beta,1)} + \ldots + m_{i_\beta}^{(\beta)} a_{\gamma_\beta}^{(\beta,i_\beta)}) + \\ + m_{i+1} n^{(\beta)} a_{\gamma_\beta} = \\ n^{(\beta)}(m_1 a_{\gamma_\beta}^{(1)} + \ldots + m_i a_{\gamma_\beta}^{(i)} + m_{i+1} a_{\gamma_\beta})$$

positiv sein muß, so daß unsere Behauptung auch hier bewiesen ist.

Wir sehen also: Sind allen der Größe g in M vorhergehenden Größen Symbole zugeordnet, so daß die Forderungen 1, 2, 3, 4 erfüllt sind, so läßt sich auch der Größe g ein Symbol so zuordnen, daß auch in dem von der Größe g und allen vorhergehenden gebildeten Systeme unsere vier Forderungen erfüllt sind. Hieraus aber folgt unmittelbar, daß sich allen in der wohlgeordneten Menge M enthaltenen Größen Symbole zuordnen lassen, derart, daß für alle diese Größen die Forderungen 1, 2, 3, 4 bestehen. In der Tat, wäre das nicht der Fall, so gäbe es eine erste, der sich kein den vier Forderungen genügendes Symbol zuordnen ließe, während für alle vorhergehenden dies der Fall ist. Dies aber steht in Widerspruch mit dem eben ausgesprochenen Resultat.

Damit ist aber der zu Beginn dieses Paragraphen angekündigte Satz bewiesen. In der Tat bilden in dem einer Größe g zugewiesenen Symbol die Einheiten e_γ, deren Koeffizient nicht Null ist, eine absteigend wohlgeordnete Menge. Forderung α) und β) sind nur Spezialfälle unserer Forderung 1, Forderung γ) aber ist ein Spezialfall von Forderung 4.

Wir können dieses Resultat in den Satz zusammenfassen: Die Größen eines beliebigen nichtarchimedischen

Größensystems lassen sich ausdrücken durch komplexe Zahlen, deren Einheiten eine geordnete Menge Γ bilden, deren Ordnungstypus der Klassentypus unseres Größensystems ist. In jeder dieser komplexen Zahlen bilden die Einheiten mit von Null verschiedenem Koeffizienten innerhalb Γ eine absteigend wohlgeordnete Menge. Die Addition erfolgt, indem man die Koeffizienten gleicher Einheiten addiert. Von zweien dieser komplexen Zahlen gehört diejenige zur größeren Größe, in welcher die erste Einheit, die nicht in beiden komplexen Zahlen gleichen Koeffizienten hat, den größeren Koeffizienten besitzt.

§ 3.

Wir wollen nun definieren, wann ein nichtarchimedisches Größensystem G als ein vollständiges bezeichnet werden soll. Sei wieder Γ eine Menge von geordneten Elementen γ, deren Ordnungstypus übereinstimmt mit dem Klassentypus von G. Man ordne nach obigem Verfahren den Größen von G Symbole (komplexe Zahlen mit den Einheiten e_γ) zu. Nun bilde man eine beliebige absteigend wohlgeordnete Menge aus den Elementen e_γ und gebe jedem in dieser absteigend wohlgeordneten Menge enthaltenen e_γ eine beliebige reelle Zahl a_γ als Koeffizienten. Wenn dann jede auf diesem Wege erhältliche komplexe Zahl unter den zur Bezeichnung der Größen von G verwendeten Symbolen vorkommt, heiße das Größensystem G ein vollständiges.

Die gewöhnlichen komplexen Zahlen mit n Einheiten:

$$a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots + a_n e_n$$

bilden, wenn man sie in der auf p. 609 angegebenen Weise ordnet, ein vollständiges nichtarchimedisches Größensystem vom (endlichen) Ordnungstypus n, vorausgesetzt, daß $a_1, a_2, \ldots, a_n$ alle reellen Zahlen durchlaufen. Würden $a_1, a_2, \ldots, a_n$ etwa auf die ganzen oder die rationalen Zahlen beschränkt, so hätten wir ein unvollständiges nichtarchimedisches Größensystem vom Ordnungstypus n. Auch die p. 613 angegebenen Größensysteme

können unvollständig sein. Desgleichen im allgemeinen die nach den Vorschriften des Herrn Levi-Civita gebildeten Größensysteme.

Da das einer Größe unseres Systems zugeordnete Symbol verschieden ausfällt, je nach der Wohlordnung der Größen von G, von der wir ausgehen, muß zunächst bewiesen werden, daß die Eigenschaft, vollständig oder unvollständig zu sein, von der Wahl dieser Wohlordnung unabhängig ist.

Seien also zwei Wohlordnungen von G gegeben; ausgehend von der ersten erhalte eine Größe g von G das Symbol:

$$g = \Sigma a_{\gamma_\alpha} e_{\gamma_\alpha}, \tag{45}$$

ausgehend von der zweiten das Symbol:

$$g = \Sigma \bar{a}_{\bar{\gamma}_\alpha} e_{\bar{\gamma}_\alpha}, \tag{46}$$

wo die Summation beide Male über eine absteigend wohlgeordnete Menge sich erstreckt. Kommt der Index γ unter den γ_α nicht vor, so sei $\alpha_\gamma = 0$; analog, wenn $\bar{\gamma}$ unter den $\bar{\gamma}_\alpha$ nicht vorkommt: $\bar{a}_{\bar{\gamma}} = 0$.

Es sei bekannt, daß bei Zugrundelegung der ersten Wohlordnung jedem Symbol der Form (45) auch umgekehrt eine Größe von G entspricht. Wir wollen zeigen, daß dann bei Zugrundelegung der zweiten Wohlordnung auch jedem Symbol (46) eine Größe von G entspricht.

Wir bemerken zunächst, daß es zu jeder Größe g eine Größe $g' = \frac{g}{n}$ gibt, derart, daß $ng' = g$. In der Tat, hat g im ersten System das Symbol $\Sigma a_\gamma e_\gamma$, so ist g' die Größe, deren Symbol $\Sigma \frac{a_\gamma}{n} e_\gamma$ ist. Sodann zeigen wir, daß jedem Symbol $\bar{a}_{\bar{\gamma}_0} e_{\bar{\gamma}_0}$ eine Größe entspricht. Das ist sicher richtig für $\bar{a}_{\bar{\gamma}_0} = 1$ nach der Art der Einführung unserer Symbole. Es sei dies die Größe g_0 und im ersten System von Symbolen sei:

$$g_0 = \Sigma a_{\gamma_\alpha} e_{\gamma_\alpha},$$

wo offenbar das erste e_{γ_α} mit von Null verschiedenem a_{γ_α} ebenfalls e_{γ_0} ist. Dann entspricht aber auch, sobald $\bar{a}_{\gamma_0}$ rational

ist, dem obigen Symbol eine Größe, nämlich diejenige, welche im ersten System das Symbol

$$\Sigma \bar{a}_{\gamma_0} a_{\gamma_\alpha} e_{\gamma_\alpha} \tag{47}$$

hat. Sei endlich $\bar{a}_{\gamma_0}$ irrational. Wir betrachten wieder die im ersten System durch (47) symbolisierte Größe. Sie habe im zweiten System das Symbol:

$$\Sigma \bar{b}_{\gamma_\beta} e_{\gamma_\beta},$$

wo offenbar das erste e_{γ_β} nichts anderes als e_{γ_0}, der Koeffizient $\bar{b}_{\gamma_0}$ aber — wegen Forderung 4 — gleich $\bar{a}_{\gamma_0}$ sein muß. Nach Forderung 3 aber können wir $g_1, g_2, \ldots, g_i$ so bestimmen, daß:

$$m_1 \bar{a}_\gamma^{(1)} + m_2 \bar{a}_\gamma^{(2)} + \ldots + m_i \bar{a}_\gamma^{(i)} = \begin{cases} n\bar{a}_{\gamma_0} & \text{für } \gamma = \gamma_0 \\ 0 & \text{für alle übrigen } \gamma \end{cases}$$

wobei $m_1, m_2, \ldots, m_i, n$ ganze Zahlen und $\bar{a}_\gamma^{(k)}$ der Koeffizient von e_γ im Symbol des zweiten Systems der Größe g_k bedeutet. Die Größe $m_1 g_1 + m_2 g_2 + \ldots + m_i g_i$ hat dann im zweiten System das Symbol $n\bar{a}_{\gamma_0} e_{\gamma_0}$; der n^{te} Teil dieser Größe hat daher das Symbol $\bar{a}_{\gamma_0} e_{\gamma_0}$ und unsere Behauptung ist erwiesen.

Aus der Ausführbarkeit der Addition folgt dann sofort, daß auch jedem Symbol:

$$\bar{a}_{\gamma_0} e_{\gamma_0} + \bar{a}_{\gamma_1} e_{\gamma_1} + \ldots + \bar{a}_{\gamma_n} e_{\gamma_n},$$

wo die Zahl der Summanden endlich ist, eine Größe entspricht.

Sei nun das Symbol des zweiten Systems:

$$\Sigma \bar{a}_{\gamma_\alpha} e_{\gamma_\alpha} \tag{48}$$

gegeben, wo wieder γ_α eine absteigend wohlgeordnete Menge durchläuft. Wir nehmen an, es sei für jedes $\beta < \alpha^*$ bewiesen, daß dem Symbol:

$$\sum_{\alpha < \beta} \bar{a}_{\gamma_\alpha} e_{\gamma_\alpha} \tag{49}$$

wo γ_α also nur einen Abschnitt der obigen absteigend wohlgeordneten Menge durchläuft, eine Größe zugehört und beweisen, daß dann dasselbe vom Symbol:

$$\sum_{\alpha < \alpha^*} \bar{a}_{\gamma_\alpha} e_{\gamma_\alpha}$$

gilt.[1]

Wir drücken zunächst die dem Symbol (49) entsprechende Größe $g^{(\beta)}$ durch ein Symbol des ersten Systems aus. Sei $a_\gamma^{(\beta)}$ der Koeffizient der Einheit e_γ in diesem Symbol.

Ist dann $\beta < \beta' < \alpha^*$ und $g^{(\beta')}$ die dem Symbol

$$\sum_{\alpha < \beta'} \bar{a}_{\gamma_\alpha} e_{\gamma_\alpha}$$

entsprechende Größe, so ist $g^{(\beta)} - g^{(\beta')}$ höchstens von der Klasse e_{γ_β}. Stellen wir auch $g^{(\beta')}$ durch ein Symbol des ersten Systems mit den Koeffizienten $a_\gamma^{(\beta')}$ dar, so ist demnach für $\gamma \not< \gamma_\beta$:

$$a_\gamma^{(\beta')} = a_\gamma^{(\beta)}.$$

Wir bezeichnen diesen gemeinsamen Wert mit a_γ, so daß die Zahl a_γ für jedes $\gamma \not< \gamma_{\alpha^*}$ definiert ist und diejenigen γ, für welche $a_\gamma \neq 0$ eine absteigend wohlgeordnete Menge bilden. Wir setzen noch $a_\gamma = 0$ für $\gamma \geqq \gamma_{\alpha^*}$. Durch diese Werte der a_γ ist ein Symbol des ersten Systems gegeben; die zugehörige Größe nennen wir $g^{(\alpha^*)}$ und drücken sie durch ein Symbol des zweiten Systems aus, dessen Koeffizienten $\bar{a}_\gamma^{(\alpha^*)}$ heißen mögen.

Aus der Definition von $g^{(\alpha^*)}$ folgt, daß die Größe $g^{(\alpha^*)} - g^{(\beta)}$ höchstens von der Klasse e_{γ_β} ist, somit haben wir für jedes γ, das höheren Rang hat als irgend ein γ_β:

$$\bar{a}_\gamma^{(\alpha^*)} = \bar{a}_\gamma.$$

Nach Forderung 3 aber lassen sich $g_1, g_2, \ldots, g_i$ so bestimmen, daß:

$$m_1 \bar{a}_\gamma^{(1)} + m_2 \bar{a}_\gamma^{(2)} + m_i \bar{a}_\gamma^{(i)} = \begin{cases} n\bar{a}_\gamma \\ 0 \end{cases}$$

je nachdem γ höheren Rang hat als irgend ein $\gamma_\beta (\beta < \alpha^*)$ oder γ niedrigeren Rang hat als sämtliche $\gamma_\beta (\beta < \alpha^*)$.

---

[1] Wir beschränken uns dabei auf den Fall, daß α^* eine Grenzzahl ist, da andernfalls die Behauptung evident ist.

Das im zweiten System der Größe $m_1 g_1 + m_2 g_2 + \ldots + m_i g_i$ zugehörende Symbol ist also:

$$\sum_{\alpha < \alpha^*} n \,.\, \bar{a}_{\gamma_\alpha} e_{\gamma_\alpha}$$

und der n^{te} Teil dieser Größe ist die gewünschte.

Hieraus aber folgt nach den Eigenschaften wohlgeordneter Mengen unmittelbar, daß auch dem Symbol (48) eine Größe zugehört.

Ob ein System nichtarchimedischer Größen vollständig oder unvollständig ist, ist also von der zugrunde gelegten Wohlordnung dieses Systems unabhängig, es ist eine Eigenschaft des Systems selbst.

Wir erinnern nun daran, daß unter einem nichtarchimedischen Größensystem ein einfach geordnetes Größensystem verstanden wurde, zwischen dessen Größen eine sechs Forderungen genügende Verknüpfung, die Addition, möglich ist. Auf Grund dieser Forderungen ließ sich innerhalb dieses Systems der Begriff der Größenklasse definieren.

Unter allen nichtarchimedischen Größensystemen lassen sich dann speziell die archimedischen hervorheben durch Hinzufügung der weiteren Forderung:

A. Unser Größensystem soll vom Klassentypus 1 sein, welche nur eine andere Formulierung des sogenannten archimedischen Axioms ist.

Um nun unter diesen Systemen weiter die vollständigen hervorzuheben, braucht man noch eine Forderung, welche D. Hilbert als Vollständigkeitsaxiom bezeichnet und der wir hier die Form geben:

B. Es soll nicht möglich sein, durch Hinzufügung neuer Größen zu den Größen unseres Systems ein umfassenderes einfach geordnetes System zu erhalten, in dem wieder eine unseren sechs Forderungen genügende Addition möglich ist,[1] ohne daß dadurch neue Größenklassen entstehen.

[1] Dabei ist angenommen, daß die Ordnung des erweiterten Systems für die auch im ursprünglichen System enthaltenen Größen die ursprüngliche sei und ebenso die Addition.

Den Größen eines auch den Forderungen *A*) und *B*) genügenden Größensystems lassen sich die reellen Zahlen so zuordnen, daß gleichen Größen dieselbe Zahl, verschiedenen Größen aber verschiedene Zahlen entsprechen, und zwar der kleineren Größe auch die kleinere Zahl und so, daß die der Summe zweier Größen entsprechende Zahl die Summe der den beiden Größen entsprechenden Zahlen ist. Diese Größensysteme sind also vom Standpunkt der Arithmetik aus von dem System der reellen Zahlen nur unwesentlich verschieden.

Man erkennt nun, wie diese Verhältnisse auf die allgemeinen nichtarchimedischen Größensysteme zu übertragen sind. An Stelle der Forderung *A*) tritt die Forderung:

A'. Unser Größensystem soll einen gegebenen Klassentypus haben und um aus allen Systemen des gegebenen Klassentypus die vollständigen herauszuheben, dient wieder die Forderung *B*).

Indem man den Größen eines solchen Systems nach dem in § 2 angegebenen Verfahren komplexe Zahlen zuordnet, sieht man wieder, daß alle vollständigen Größensysteme von gleichem Ordnungstypus nur unwesentlich verschieden sind, insofern sie sich ja arithmetisch durch dieselben komplexen Zahlen darstellen lassen.

Aus diesen Überlegungen geht hervor, daß die allgemeinen nichtarchimedischen Größensysteme sich im Hinblick auf das Vollständigkeitsaxiom durchaus nicht anders verhalten als die archimedischen Größensysteme.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß man nicht an Stelle von *B*) die Forderung aufstellen darf, es solle unmöglich sein, das System so zu erweitern, daß der Klassentypus erhalten bleibt (für den Klassentypus 1 sind diese beiden Forderungen identisch), da diese letztere Forderung im allgemeinen nicht erfüllbar wäre.

§ 4.

Von nun an beschränken wir uns auf vollständige nichtarchimedische Größensysteme *G*, deren Klassentypus noch obendrein folgender Bedingung genügt: Sei Γ eine einfach geordnete Menge, deren Ordnungstypus der Klassentypus von

G ist, und seien γ ihre Elemente; die Einschränkung, die wir dem Klassentypus von G auferlegen, ist die, daß für die Elemente γ eine unseren sechs Forderungen genügende Addition[1] definiert sein soll.

Unter diesen Voraussetzungen werden wir beweisen, daß sich für die Größen von G eine Multiplikation definieren läßt, der folgende Eigenschaften zukommen.

1. Sie gestattet, aus zwei Größen des Systems g_1 und g_2 in eindeutiger Weise eine dritte, $g_1 \cdot g_2$, herzuleiten.

2. Wenn $g_1 = g_1'$ und $g_2 = g_2'$, so ist $g_1 \cdot g_2 = g_1' \cdot g_2'$.

3. Sie ist assoziativ: $(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3)$.

4. Sie ist kommutativ: $g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1$.

5. Sie ist in Verbindung mit der Addition distributiv:

$$(g_1 + g_2) g_3 = g_1 g_3 + g_2 g_3 \text{ und } g_1 (g_2 + g_3) = g_1 g_2 + g_1 g_3.$$

6. Ihre Umkehrung, die Division, ist eindeutig ausführbar außer durch die Null (die gegenüber der Addition indifferente Größe), d. h. wenn g_1 und g_3 beliebige Größen des Systems sind, und $g_1 \neq 0$, dann gibt es stets eine Größe g_2, derart, daß $g_1 \cdot g_2 = g_3$ und für jede andere Größe g_2', für die ebenfalls $g_1 \cdot g_2' = g_3$ ist, gilt $g_2' = g_2$.

7. Aus $g_1 > g_1'$ und $g_2 > 0$ folgt: $g_1 g_2 > g_1' g_2$.

Wir denken uns den Größen unseres Systems nach der in § 2 durchgeführten Art komplexe Zahlen zugeordnet; dann genügt es offenbar, nachzuweisen, daß es im System dieser komplexen Zahlen eine unseren Forderungen genügende Multiplikation gibt.

Zunächst definieren wir, was unter dem Produkt zweier Zahlen der Form $a_{\gamma_0} e_{\gamma_0}$ und $a'_{\gamma'_0} e_{\gamma'_0}$ verstanden werden soll. Wir setzen fest:

$$a_{\gamma_0} e_{\gamma_0} \cdot a'_{\gamma'_0} e_{\gamma'_0} = a_{\gamma_0} a'_{\gamma'_0} e_{\gamma_0 + \gamma'_0},$$

wo auch die rechts stehende Zahl unserem System angehört, da nach Voraussetzung die Summe zweier Elemente von Γ wieder ein Element von Γ liefert.

---

[1] Dabei ist in diesen Forderungen das Zeichen $>$ durch $\gtrless$ zu ersetzen.

Seien nun allgemein:

$$A = \Sigma\, a_{\gamma_\alpha} e_{\gamma_\alpha} \quad \text{und} \quad A' = \Sigma\, a'_{\gamma'_\alpha} e_{\gamma'_\alpha} \tag{50}$$

zwei komplexe Zahlen unseres Systems, wo also die Summation sich über absteigend wohlgeordnete Mengen erstreckt.

Wir bilden allgemein die Einheiten $e_{\gamma_\alpha+\gamma'_{\alpha'}}$, wo γ_α sowohl als $\gamma'_{\alpha'}$ jedes für sich die entsprechende absteigend wohlgeordnete Menge durchlaufe. Wir behaupten: Die so entstehende Menge von Einheiten ist selbst absteigend wohlgeordnet.

In der Tat, wäre sie es nicht, so enthielte die Menge der $\gamma_\alpha+\gamma'_{\alpha'}$ eine Teilmenge ohne höchstes Element und es ließen sich daher unendlich viele Paare γ_{α_n} und $\gamma'_{\alpha'_n}$ finden, so daß:

$$\gamma_{\alpha_1}+\gamma'_{\alpha'_1} \supset \gamma_{\alpha_2}+\gamma'_{\alpha'_2} \supset \ldots \supset \gamma_{\alpha_n}+\gamma'_{\alpha'_n} \supset \ldots$$

Da nun die γ_{α_n} einer absteigend wohlgeordneten Menge entnommen sind, so gibt es unter ihnen eines von höchstem Range, etwa $\gamma_{\alpha_{n_1}}$. Unter allen γ_{α_n} $(n > n_1)$ gibt es wieder eines von höchstem Range, es heiße $\gamma_{\alpha_{n_2}}$ u. s. w. Wir haben dann:

$$\gamma_{\alpha_{n_1}}+\gamma'_{\alpha'_{n_1}} \supset \gamma_{\alpha_{n_2}}+\gamma'_{\alpha'_{n_2}} \supset \ldots \supset \gamma_{\alpha_{n_k}}+\gamma'_{\alpha'_{n_k}} \supset \ldots$$

neben:

$$\gamma_{\alpha_{n_1}} \subseteq \gamma_{\alpha_{n_2}} \subseteq \ldots \subseteq \gamma_{\alpha_{n_k}} \subseteq \ldots,$$

woraus folgen würde:

$$\gamma'_{\alpha'_{n_1}} \supset \gamma'_{\alpha'_{n_2}} \supset \ldots \supset \gamma'_{\alpha'_{n_k}} \supset \ldots,$$

was unmöglich ist, da auch die $\gamma'_{\alpha'_{n_k}}$ einer absteigend wohlgeordneten Menge angehören und es daher unter ihnen ein höchstes geben muß. Unsere Behauptung ist somit erwiesen.

Wir behaupten weiter: In den beiden absteigend wohlgeordneten Mengen der Zahlen (50) kann es nur eine endliche Anzahl von Paaren γ_α und $\gamma'_{\alpha'}$ geben, derart, daß $\gamma_\alpha+\gamma'_{\alpha'}$ ein

vorgegebenes Element γ von Γ ergibt. In der Tat, gäbe es unendlich viele solche Paare γ_{α_n}, $\gamma'_{\alpha'_n}$ derart, daß:

$$\gamma_{\alpha_1}+\gamma'_{\alpha'_1} = \gamma_{\alpha_2}+\gamma'_{\alpha'_2} = \ldots = \gamma_{\alpha_n}+\gamma'_{\alpha'_n} = \ldots,$$

so können wir, da die γ_{α_n} einer absteigend wohlgeordneten Menge angehören, immer annehmen, es sei:

$$\gamma_{\alpha_1} \supset \gamma_{\alpha_2} \supset \ldots \supset \gamma_{\alpha_n} \supset \ldots,$$

woraus sofort wieder folgen würde:

$$\gamma'_{\alpha'_1} \ni \gamma'_{\alpha'_2} \ni \ldots \ni \gamma'_{\alpha'_n} \ni \ldots,$$

was unmöglich ist.

Wir können nun definieren, was wir unter dem Produkt $AA' = B$ der beiden Zahlen (50) A und A' verstehen wollen. Um den Koeffizienten zu bestimmen, den die beliebige Einheit e_γ in B hat, gehe man so vor: Man stelle γ auf alle möglichen Weisen als Summe $\gamma_\alpha+\gamma'_{\alpha'}$ dar, wo sowohl γ_α als $\gamma'_{\alpha'}$ der entsprechenden absteigend wohlgeordneten Menge (50) angehören. Es ist dies nur auf eine endliche Anzahl Arten möglich, etwa:

$$\gamma = \gamma_{\alpha_1}+\gamma'_{\alpha'_1} = \gamma_{\alpha_2}+\gamma'_{\alpha'_2} = \ldots = \gamma_{\alpha_n}+\gamma'_{\alpha'_n}.$$

Der Koeffizient b_γ von e_γ in B sei dann:

$$b_\gamma = a_{\gamma_{\alpha_1}} a'_{\gamma'_{\alpha'_1}}+a_{\gamma_{\alpha_2}} a'_{\gamma'_{\alpha'_2}}+\ldots+a_{\gamma_{\alpha_n}} a'_{\gamma'_{\alpha'_n}}$$

beziehungsweise sei $b_\gamma = 0$, wenn eine Darstellung $\gamma = \gamma_\alpha+\gamma'_{\alpha'}$ überhaupt unmöglich ist.

Die Einheiten e_γ, deren Koeffizient b_γ von Null verschieden ausfällt, bilden dann, wie oben gezeigt, eine absteigend wohlgeordnete Menge, so daß durch diese Vorschrift das Produkt B von A und A' wirklich als Zahl unseres Systems definiert ist.

Man erkennt zunächst, daß diese Multiplikation assoziativ ist. Seien in der Tat A, B, C drei Zahlen unseres Systems:

$$A = \Sigma a_{\gamma_\alpha} e_{\gamma_\alpha} \qquad B = \Sigma b_{\gamma'_\beta} e_{\gamma'_\beta} \qquad C = \Sigma c_{\gamma''_\delta} e_{\gamma''_\delta},$$

dann erhält man zur Bildung von $(AB)C$ sowohl als von $A(BC)$ die Vorschrift: Man stelle γ auf alle möglichen Weisen dar als Summe $\gamma_\alpha+\gamma'_\beta+\gamma''_\delta$, etwa:

$$\gamma_{\alpha_1}+\gamma'_{\beta_1}+\gamma''_{\delta_1} = \gamma_{\alpha_2}+\gamma'_{\beta_2}+\gamma''_{\delta_2} = \ldots = \gamma_{\alpha_n}+\gamma'_{\beta_n}+\gamma''_{\delta_n}$$

und nehme als Koeffizienten von e_γ den Ausdruck:

$$a_{\gamma_{\alpha_1}} b_{\gamma'_{\beta_1}} c_{\gamma''_{\delta_1}} + a_{\gamma_{\alpha_2}} b_{\gamma'_{\beta_2}} c_{\gamma''_{\delta_2}} + \ldots + a_{\gamma_{\alpha_n}} b_{\gamma'_{\beta_n}} c_{\gamma''_{\delta_n}}$$

beziehungsweise die Null, wenn keine Darstellung von γ in der Form $\gamma_\alpha+\gamma'_\beta+\gamma''_\delta$ möglich ist.

Daß unsere Multiplikation kommutativ und in Verbindung mit der Addition distributiv ist, ist ohneweiters klar. Eigenschaft 7) (p. 648) weist man in folgender Weise nach:

Sei $A>A'$ und $B>0$. Sind dann e_{γ_0}, $e_{\gamma'_0}$, $e_{\gamma''_0}$ die höchsten Einheiten mit von Null verschiedenem Koeffizienten in A, A', B, so ist $b_{\gamma''_0}>0$ und entweder $\gamma_0 \lessgtr \gamma'_0$ oder im Falle $\gamma_0=\gamma'_0$ wenigstens $a_{\gamma_0}>a'_{\gamma'_0}$. Die höchsten Einheiten mit von Null verschiedenem Koeffizienten in den Produkten AB und $A'B$ sind dann $e_{\gamma_0+\gamma''_0}$ und $e_{\gamma'_0+\gamma''_0}$, ihre Koeffizienten offenbar $a_{\gamma_0} b_{\gamma''_0}$ und $a'_{\gamma'_0} b_{\gamma''_0}$ und es ist entweder $e_{\gamma_0+\gamma''_0} \lessgtr e_{\gamma'_0+\gamma''_0}$ oder im Falle $e_{\gamma_0+\gamma''_0} = e_{\gamma'_0+\gamma''_0}$ wenigstens $a_{\gamma_0} b_{\gamma''_0} > a'_{\gamma'_0} b_{\gamma''_0}$, so daß die Behauptung bewiesen ist.

Es ist nun noch zu zeigen, daß auch die Forderung 6 erfüllt und somit die Division (außer durch Null) allgemein ausführbar ist.

Seien also:

$$A = a_{\gamma_0} e_{\gamma_0} + a_{\gamma_1} e_{\gamma_1} + \ldots + a_{\gamma_\alpha} e_{\gamma_\alpha} + \ldots \qquad (a_{\gamma_0} \neq 0)$$
$$C = c_{\gamma'_0} e_{\gamma'_0} + c_{\gamma'_1} e_{\gamma'_1} + \ldots + c_{\gamma'_\alpha} e_{\gamma'_\alpha} + \ldots$$

zwei Zahlen unseres Systems (die Summation erstreckt sich beide Male über eine absteigend wohlgeordnete Menge). Gesucht wird eine Zahl B, derart, daß $C = AB$ ist.

Wir setzen:

$$B_1 = \frac{c_{\gamma'_0}}{a_{\gamma_0}} e_{\gamma'_0-\gamma_0}$$

und bilden:

$$C_1 = C - B_1 A = c^{(1)}_{\gamma^{(1)}_0} e_{\gamma^{(1)}_0} + c^{(1)}_{\gamma^{(1)}_1} e_{\gamma^{(1)}_1} + \ldots + c^{(1)}_{\gamma^{(1)}_\alpha} e_{\gamma^{(1)}_\alpha} + \ldots$$

Ist dann $C_1 = 0$, so ist B_1 die gesuchte Zahl B. Ist hingegen $C_1 \neq 0$, so können wir immer annehmen, es sei $c^{(1)}_{\gamma_0^{(1)}} \neq 0$. Jedenfalls ist dann C_1 von niedrigerer Klasse als C $(\gamma_0^{(1)} \exists \gamma_0')$. Wir setzen:

$$B_2 = B_1 + \frac{c^{(1)}_{\gamma_0^{(1)}}}{a_{\gamma_0}} e_{\gamma_0^{(1)} - \gamma_0} = \frac{c_{\gamma_0'}}{a_{\gamma_0}} e_{\gamma_0' - \gamma_0} + \frac{c^{(1)}_{\gamma_0^{(1)}}}{a_{\gamma_0}} e_{\gamma_0^{(1)} - \gamma_0}$$

und bilden:

$$C_2 = C - B_2 A = c^{(2)}_{\gamma_0^{(2)}} e_{\gamma_0^{(2)}} + c^{(2)}_{\gamma_1^{(2)}} e_{\gamma_1^{(2)}} + \ldots + c^{(2)}_{\gamma_\alpha^{(2)}} e_{\gamma_\alpha^{(2)}} + \ldots$$

Ist dann $C_2 = 0$, so ist B_2 die gesuchte Größe. Ist $C_2 \neq 0$, kann man annehmen: $c^{(2)}_{\gamma_0^{(2)}} \neq 0$ und hat $\gamma_0^{(2)} \exists \gamma_0^{(1)}$. Wir setzen dann:

$$B_3 = B_2 + \frac{c^{(2)}_{\gamma_0^{(2)}}}{a_{\gamma_0}} c_{\gamma_0^{(2)} - \gamma_0} = \frac{c_{\gamma_0'}}{a_{\gamma_0}} e_{\gamma_0' - \gamma_0} + \frac{c^{(1)}_{\gamma_0^{(1)}}}{a_{\gamma_0}} e_{\gamma_0^{(1)} - \gamma_0} + \frac{c^{(2)}_{\gamma_0^{(2)}}}{a_{\gamma_0}} e_{\gamma_0^{(2)} - \gamma_0}.$$

Entweder kommt man auf diesem Wege für irgend einen endlichen Index n zu einer Zahl:

$$B_n = \frac{c_{\gamma_0'}}{a_{\gamma_0}} e_{\gamma_0' - \gamma_0} + \frac{c^{(1)}_{\gamma_0^{(1)}}}{a_{\gamma_0}} e_{\gamma_0^{(1)} - \gamma_0} + \ldots + \frac{c^{(n-1)}_{\gamma_0^{(n-1)}}}{a_{\gamma_0}} e_{\gamma_0^{(n-1)} - \gamma_0}$$

$$(\gamma_0' \mathfrak{E} \gamma_0^{(1)} \mathfrak{E} \ldots \mathfrak{E} \gamma_0^{(n-1)}),$$

so daß:

$$C_n = C - B_n A = 0$$

wird, und dann ist B_n die gesuchte Zahl B oder $C - B_n A$ ist für alle endlichen Indices n von Null verschieden. Im letzteren Falle können wir die Zahl B_ω bilden:

$$B_\omega = \frac{c_{\gamma_0'}}{a_{\gamma_0}} e_{\gamma_0' - \gamma_0} + \frac{c^{(1)}_{\gamma_0^{(1)}}}{a_{\gamma_0}} e_{\gamma_0^{(1)} - \gamma_0} + \ldots + \frac{c^{(n)}_{\gamma_0^{(n)}}}{a_{\gamma_0}} e_{\gamma_0^{(n)} - \gamma_0} + \ldots,$$

wo die Summation sich über alle endlichen Indices n erstreckt und $\gamma_0' \mathfrak{E} \gamma_0^{(1)} \mathfrak{E} \ldots \mathfrak{E} \gamma_0^{(n)} \mathfrak{E} \ldots$

Wir bilden weiter:

$$C_\omega = C - B_\omega A = c^{(\omega)}_{\gamma_0^{(\omega)}} e_{\gamma_0^{(\omega)}} + c^{(\omega)}_{\gamma_1^{(\omega)}} e_{\gamma_1^{(\omega)}} + \ldots + c^{(\omega)}_{\gamma_\alpha^{(\omega)}} e_{\gamma_\alpha^{(\omega)}} + \ldots$$

Ist $C_\omega = 0$, so ist B_ω die gesuchte Zahl B. Ist hingegen $C_\omega \neq 0$, so kann man wieder annehmen $c^{(\omega)}_{\gamma^{(\omega)}_0} \neq 0$ und es läßt sich beweisen, daß $\gamma^{(\omega)}_0 \ni \gamma^{(n)}_0$ für jedes endliche n, und der Prozeß läßt sich dann wieder um einen Schritt weiterführen.

Wir gehen gleich allgemein vor. Sei π irgend eine transfinite Ordinalzahl und:

$$B_\pi = \frac{c_{\gamma'_0}}{a_{\gamma_0}} e_{\gamma'_0-\gamma_0} + \frac{c^{(1)}_{\gamma^{(1)}_0}}{a_{\gamma_0}} e_{\gamma^{(1)}_0-\gamma_0} + \ldots + \frac{c^{(\alpha)}_{\gamma^{(\alpha)}_0}}{a_{\gamma_0}} e_{\gamma^{(\alpha)}_0-\gamma_0} + \ldots, \quad (51)$$

wo die Summation sich über alle Ordinalzahlen $< \pi$ erstreckt, und:

$$e_{\gamma'_0} \xi e_{\gamma^{(1)}_0} \xi \ldots \xi e_{\gamma^{(\alpha)}_0} \xi \ldots$$

Ist ρ eine Ordinalzahl $< \pi$, so werde unter B_ρ diejenige Zahl verstanden, die man erhält, wenn in (51) die Summation nur über alle Ordinalzahlen $< \rho$ erstreckt wird, und es sei für alle $\rho < \pi$:

$$C_\rho = C - B_\rho A = c^{(\rho)}_{\gamma^{(\rho)}_0} e_{\gamma^{(\rho)}_0} + c^{(\rho)}_{\gamma^{(\rho)}_1} e_{\gamma^{(\rho)}_1} + \ldots + c^{(\rho)}_{\gamma^{(\rho)}_\alpha} e_{\gamma^{(\rho)}_\alpha} + \ldots,$$

wo $c^{(\rho)}_{\gamma^{(\rho)}_0} \neq 0$ und die Summation sich über eine absteigend wohlgeordnete Menge erstreckt.

Wir bilden:

$$C_\pi = C - B_\pi A = c^{(\pi)}_{\gamma^{(\pi)}_0} e_{\gamma^{(\pi)}_0} + c^{(\pi)}_{\gamma^{(\pi)}_1} e_{\gamma^{(\pi)}_1} + \ldots + c^{(\pi)}_{\gamma^{(\pi)}_\alpha} e_{\gamma^{(\pi)}_\alpha} + \ldots$$

Ist dann $C_\pi = 0$, so ist B_π die gesuchte Zahl B. Ist hingegen $C_\pi \neq 0$, so können wir annehmen $c^{(\pi)}_{\gamma^{(\pi)}_0} \neq 0$ und beweisen, daß für jede Ordinalzahl $\rho < \pi$:

$$e_{\gamma^{(\pi)}_0} \ni e_{\gamma^{(\rho)}_0}.$$

Setzen wir in der Tat:

$$B_\pi = B_\rho + B^*_\rho,$$

so haben wir:

$$B^*_\rho = \frac{c^{(\rho)}_{\gamma^{(\rho)}_0}}{a_{\gamma_0}} e_{\gamma^{(\rho)}_0-\gamma_0} + \frac{c^{(\rho+1)}_{\gamma^{(\rho+1)}_0}}{a_{\gamma_0}} e_{\gamma^{(\rho+1)}_0-\gamma_0} + \ldots + \frac{c^{(\alpha)}_{\gamma^{(\alpha)}_0}}{a_{\gamma_0}} e_{\gamma^{(\alpha)}_0-\gamma_0} + \ldots$$

Ferner haben wir:

$$C_\pi = C-(B_\rho+B_\rho^*)A = C_\rho-B_\rho^*A$$

und da das Glied höchsten Ranges in C_ρ und B_ρ^*A übereinstimmend $c_{\gamma_0^{(\rho)}}^{(\rho)} e_{\gamma_0^{(\rho)}}$ ist, so ist gewiß die Klasse $e_{\gamma_0^{(\pi)}}$ von C_π von geringerem Range als die Klasse $e_{\gamma_0^{(\rho)}}$ von C_ρ, wie behauptet.

Wir sehen also: Sind die Zahlen B_ρ gegeben und wird B_π gebildet nach (51), so ist die Differenz $C-B_\pi A$ gewiß von niedrigerer Klasse als alle Differenzen $C-B_\rho A$, wo $\rho<\pi$.

Ist nun $C-B_\pi A=0$, so ist B_π die gesuchte Zahl B, ist hingegen $C-B_\pi A\neq 0$, so kann der Prozeß fortgesetzt werden. Er gestattet Zahlen B_π zu berechnen, deren Indices immer höhere Ordinalzahlen sind und wird nur aufgehalten, wenn für eine Ordinalzahl π_0 die Differenz $C-B_{\pi_0}A$ Null wird, dann aber ist B_{π_0} die gesuchte Zahl B. Und dieser letztere Fall muß einmal eintreten, jedenfalls bevor die Ordinalzahl π die Anfangszahl der Zahlklasse $Z(\aleph_\nu)$ erreicht, wenn $\aleph_\nu$ die auf die Mächtigkeit von Γ unmittelbar folgende Mächtigkeit bedeutet; denn ist $e_{\gamma_0^{(\pi)}}$ die Klasse von $C-B_\pi A$, so hätte sonst die absteigend wohlgeordnete Menge, die von den $\gamma_0^{(\pi)}$ gebildet wird, höhere Mächtigkeit als die Menge Γ, was unsinnig ist.

Es ist also in der Tat möglich, eine Zahl B zu bestimmen, derart, daß $A.B=C$ ist, und es bleibt nur noch zu zeigen, daß es nur eine solche Zahl geben kann.

Um das zu zeigen, beachte man, daß offenbar bei unserer Multiplikation ein Produkt nur verschwinden kann, wenn ein Faktor verschwindet, so daß, wenn $C=0$ ist, auch $B=0$ sein muß. In der Tat, ist $A\neq 0$, $B\neq 0$, $a_{\gamma_0} e_{\gamma_0}$ das höchste Glied von A, $b_{\gamma_0'} e_{\gamma_0'}$ das höchste Glied von B mit nicht verschwindendem Koeffizienten, so kommt in C das Glied $a_{\gamma_0} b_{\gamma_0'} e_{\gamma_0+\gamma_0'}$ vor und es ist daher auch $C\neq 0$. Ist daher $AB=C$ und $AB'=C$, so ist $A(B-B')=0$ und wegen der Voraussetzung $A\neq 0$ muß $B=B'$ sein.

Für die von uns definierte Multiplikation gelten also alle sieben auf p. 648 gestellten Forderungen.

Da innerhalb der Menge Γ eine den sechs Forderungen von p. 606 genügende Addition bestehen soll, so gibt es in Γ

ein Element γ_0, das gegenüber dieser Addition indifferent ist. Man sieht sofort, daß dann die Zahl $1.e_{\gamma_0}$ gegenüber unserer Multiplikation indifferent ist.

Man kann nun die reellen Zahlen in unser System komplexer Zahlen einordnen, indem man festsetzt, die reelle Zahl a soll gleich heißen unserer komplexen Zahl $a.e_{\gamma_0}$. Jede positive Zahl unseres Systems, deren Klasse von höherem Range als e_{γ_0} ist, ist dann größer als jedes Vielfache na; man kann sie daher als aktual-unendlich groß bezeichnen. Jedes Vielfache einer positiven Zahl, deren Klasse von geringerem Range als e_{γ_0} ist, ist hingegen kleiner als jede positive reelle Zahl; eine solche Zahl kann daher als aktual unendlich klein bezeichnet werden.

Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Klasse erscheinen vom Jahre 1888 (Band XCVII) an in folgenden vier gesonderten **Abteilungen**, welche auch einzeln bezogen werden können:

Abteilung I. Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Kristallographie, Botanik, Physiologie der Pflanzen, Zoologie, Paläontologie, Geologie, Physischen Geographie und Reisen.

Abteilung II a. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und Mechanik.

Abteilung II b. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Chemie.

Abteilung III. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Anatomie und Physiologie des Menschen und der Tiere sowie aus jenem der theoretischen Medizin.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichnisse ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung Alfred Hölder, k. u. k. Hof- und Universitätsbuchhändler (Wien, I., Rothenthurmstraße 13), zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Teile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden auch in besonderen Heften unter dem Titel: »Monatshefte für Chemie und verwandte Teile anderer Wissenschaften« herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 14 K — 14 M.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Originalauszüge oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird wie bisher acht Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 5 K — 5 M.

MAY 4 1908
132

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE.

CXVI. BAND. IV. HEFT.

JAHRGANG 1907. — APRIL.

ABTEILUNG II a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

(MIT 5 TAFELN UND 18 TEXTFIGUREN.)

WIEN, 1907.
AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI

IN KOMMISSION BEI ALFRED HÖLDER.

K. U. K. HOF- UND UNIVERSITÄTSBUCHHÄNDLER.
BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT

des 4. Heftes, April 1907, des CXVI. Bandes, Abteilung II a, der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Klasse.

Seite

Cermak P., Der Peltiereffekt Eisen-Konstantan zwischen 0 und 560° C. (Mit 2 Textfiguren.) [Preis: 45 h — 45 pf] 657

Meyer W. Fr., Zur algebraischen Behandlung eines v. Staudt'schen Fundamentalsatzes der Geometrie der Lage. [Preis: 90 h — 90 pf] 669

Meyer St. und **Schweidler E., v.**, Untersuchungen über radioaktive Substanzen. (X. Mitteilung.) Über die Zerfallskonstante von Radium *D*. [Preis: 50 h — 50 pf] 701

Rziha K., Änderung des Peltiereffektes Ni-Cu zwischen 20 und 800° C. (Mit 3 Textfiguren.) [Preis: 35 h — 35 pf] 715

Obermayer A., v., Gewitterbeobachtungen und Gewitterhäufigkeit an einigen meteorologischen Beobachtungsstationen der Alpen, insbesondere an Gipfelstationen. (Mit 2 Textfiguren.) [Preis: 1 K 10 h — 1 M 10 pf] 723

Girtler R., Zur Rotation von Gasmolekülen. [Preis: 40 h — 40 pf] . . . 759

Stücker N., Über einige physikalische Eigenschaften der Kolloide. (Mit 1 Tafel und 2 Textfiguren.) [Preis: 75 h — 75 pf] 771

Dintzl E., Über die Legendre'schen Symbole für quadratische Reste in einem imaginären quadratischen Zahlkörper mit der Klassenanzahl 1. [Preis: 40 h — 40 pf] 785

Pöch R., Nr. X der Berichte der Phonogramm-Archivs-Kommission der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Zweiter Bericht über meine phonographischen Aufnahmen in Neu-Guinea (Britisch-Neu-Guinea vom 7. Oktober 1905 bis zum 1. Februar 1906). (Mit 1 Tafel und 3 Textfiguren.) [Preis: 80 h — 80 pf] 801

Exner F. M., Grundzüge einer Theorie der synoptischen Luftdruckveränderungen. (II. Mitteilung.) (Mit 3 Tafeln und 3 Textfiguren.) [Preis: 1 K 25 h — 1 M 25 pf] 819

Szydlowski L., Über die Kältemischung aus kristallisiertem Natriumsulfat und konzentrierter Salzsäure. (Mit 3 Textfiguren.) [Preis: 1 K 20 h — 1 M 20 pf] 855

Preis des ganzen Heftes: 5 K 60 h — 5 M 60 pf.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE.

CXVI. BAND. IV. HEFT.

ABTEILUNG II a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

Der Peltiereffekt Eisen-Konstantan zwischen 0 und 560° C.

von

Dr. **Paul Cermak.**

(Mit 2 Textfiguren.)

Aus dem physikalischen Institut der k. k. deutschen Universität in Prag.

(Vorgelegt in der Sitzung am 21. März 1907.)

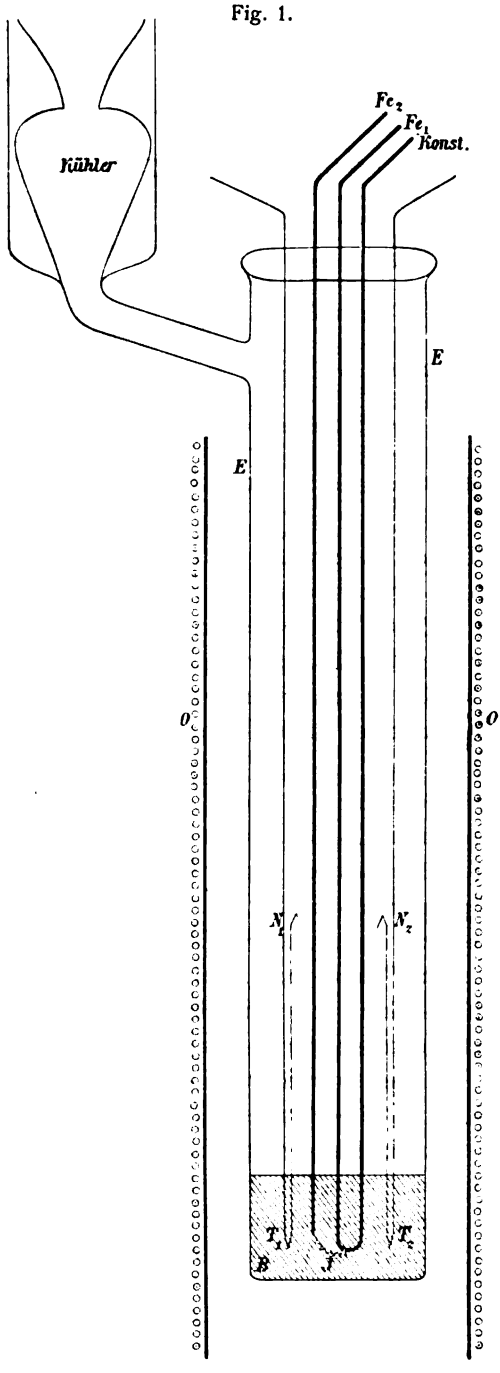
Der Peltiereffekt Eisen-Konstantan wurde mit Hilfe des von Professor Lecher[1] angegebenen thermoelektrischen Kalorimeters zwischen 0 und 560° C. gemessen.

Figur 1 gibt ein in der Vertikalrichtung verkürztes Bild des für die nachfolgenden Untersuchungen benützten Kalorimeters im elektrischen Ofen mit den in sein Inneres reichenden Drahtkombinationen.

Das Kalorimeter bestand aus zehn hintereinander geschalteten Thermoelementchen, die in einem Kreise von 1·2 *cm* Durchmesser angeordnet waren. (In der Figur, die einen Durchschnitt darstellt, sind nur zwei davon: T_1N_1 und T_2N_2 gezeichnet.) Die unteren zehn Lötstellen *(J)* tauchten in ein kleines Bad von Petroleum *(B)*, die oberen zehn *(N)* befanden sich außerhalb der Badflüssigkeit in ebenfalls kreisförmiger Anordnung. Die Thermoelementchen waren aus 0·5 *mm* dickem Eisen- beziehungsweise Konstantandrahte von je 12 *cm* Länge hergestellt und mit hartem Silberlote verlötet. Kupferne Leitungsdrähte führten vom Kalorimeter zu einem Edelmann'schen Drehspulengalvanometer hoher Empfindlichkeit mit objektiver Ablesung. Die Thermoelementchen waren voneinander gut isoliert, mit einem aus Wasserglas und Mennige

[1] E. Lecher, Diese Sitzungsberichte, Bd. CXV, Abt. IIa, p. 1506 (1906).

Fig. 1.



hergestellten Kitte auf ein Glasrohr gekittet und nach außen sowohl wie nach innen durch weitere Glasröhren geschützt. (Nicht gezeichnet.)

Bei Anwendung höherer Temperaturen wurde als Kalorimeterflüssigkeit *(B)* zunächst Reten, bei den höchsten zur Beobachtung benutzten Temperaturen Chrysen verwendet. Die Flüssigkeitsmenge war so gewählt worden, daß die unteren Enden *T* der Thermoelementchen etwa 5 *mm* eintauchten.

In das Innere des Kalorimeters ragten die zur Bestimmung des Peltiereffektes dienenden Drahtkombinationen. (Sie sind in der Figur stark gezeichnet.) Ein Eisendraht war mit einem Konstantandrahte hart verlötet; beide hatten einen Durchmesser von 2 *mm* (Fe_1; Kon.)

An diese Drähte sind weit außerhalb des Kalorimeters (in etwa 80 *cm* Entfernung) Kupferdrähte angelötet, die zu einer Akkumulatorenbatterie (4 Volt) führen. In derselben Leitung befinden sich noch ein Ampèremeter, Widerstände und ein Stromwender.

Um das Kalorimeter für jede Messung eichen zu können, wurde der Jouleeffekt in einem dünnen Drähtchen bei bekannter Stromstärke gemessen. Zu diesem Zwecke war an den ins Innere des Kalorimeters führenden Eisendraht Fe_1 ein dünnes Konstantandrähtchen *(J)* (0·06 *mm* Durchmesser und zirka 1 *cm* Länge) hart angelötet, dessen zweites Ende mit einem 2 *mm* dicken Eisendrahte *(Fe_2)* verbunden war. Das Drähtchen befand sich ganz in der Kalorimeterflüssigkeit. Eine einfache Schaltvorrichtung gestattete, mit ein und demselben Ampèremeter die Stromstärke bei Bestimmung des Peltiereffektes und der Joule'schen Wärme zu messen. Ferner ermöglichten eine Zweigleitung zum Galvanometer und ein in den Stromkreis geschalteter Normalwiderstand, den Widerstand des Konstantandrähtchens bei jedem Versuche zu bestimmen.

Das ganze Kalorimeter mit den hineinragenden Drahtkombinationen befand sich in einem 40 *cm* langen eprouvettenartigen Glasgefäße (in der Figur *E*) von 2 *cm* lichter Weite, an das ein kleiner Rückflußkühler angesetzt war. (In der Figur nur teilweise gezeichnet.) Dieses Glasgefäß wurde in einen vertikal gestellten elektrischen Ofen gebracht, dessen Länge (65 *cm*) so gewählt war, daß das Kalorimeter sich ungefähr in der Mitte des Ofens befand. (In der Figur verkürzt.)

F. Meißner[1] hat gezeigt, wie überraschend schnell in den Öfen gewöhnlicher Konstruktion die Temperatur von der Mitte gegen die Enden abnimmt, wenn dieselben von dickeren Drähten durchsetzt werden. Um diese Fehlerquelle wenigstens abzuschwächen, wurde statt des üblichen Porzellanrohres beim Baue des Ofens ein Messingrohr verwendet, in der Annahme, daß das gut wärmeleitende Messing die Temperatur im Ofen

---

[1] F. Meißner, Diese Sitzungsberichte, Bd. CXV, Abt. IIa, p. 847 ff. (1906).

besser ausgleichen werde und auf diese Weise die 12 *cm* voneinander entfernten Enden der Thermosäule (*T* und *N*) möglichst gleiche Temperatur haben würden. Auf das Messingrohr wurde nach entsprechender Isolation mit Asbestpappe als Heizdraht ein Nickeldraht von 0·5 *mm* Dicke aufgewickelt, und zwar bifilar, um magnetische Wirkungen zu vermeiden. Diese Wickelung wurde nach außen durch Asbest- und Luftschichten gegen Wärmeabgabe geschützt und schließlich wurde der ganze Ofen mit einer dicken Wattehülle umgeben.

An dem oben erwähnten Thermoelement Eisen-Konstantan (Fe_1—Kon), durch welches der Peltiereffekt gemessen werden sollte, war noch eine Zweigleitung zum Galvanometer angebracht. Außerdem war ein zweites aus genau denselben Drähten bestehendes Thermoelement, das ebenfalls zum Galvanometer geschaltet werden konnte, in einem zweiten elektrischen Vergleichsofen eingebettet, der ein bis 550° C. geeichtes Quecksilberthermometer enthielt. Mit diesen beiden Anordnungen konnte leicht die Temperatur im Kalorimeter gemessen werden. Den Ausgleich der Temperatur in der Kalorimeterflüssigkeit bewirkte eine magnetische Rührvorrichtung nach Art der im Beckmann'schen Gefrierapparate verwendeten. (In der Figur nicht gezeichnet.)

Beobachtungsweise.

Vor dem Beginne des jeweiligen Versuches galt es, die Temperatur des Kalorimeters im Ofen zu bestimmen. Nachdem die Nullage des Galvanometers festgestellt war, wurde das Konstantan-Eisenelement des Hilfsofens in den Galvanometerkreis geschaltet. Das Galvanometer mußte durch Vorschaltwiderstände unempfindlich gemacht werden. Der Ausschlag wurde angemerkt und dazu die Temperatur erstens des Thermometers im Hilfsofen, zweitens des Thermometers an der zweiten Lötstelle (Eisen-, beziehungsweise Konstantan-Kupfer) abgelesen. Dann wurde das Thermoelement des Versuchsofens in den Galvanometerkreis geschaltet. Durch Proportionalsetzung der erhaltenen Ausschläge konnte die Temperatur des Kalorimeters berechnet werden.

War dies geschehen, so wurde der Widerstand des dünnen Konstantandrähtchens bestimmt, mit dem die Joule'sche Wärme gemessen werden sollte. Auch dies geschah galvanometrisch durch Proportionalsetzung jener Ausschläge, die erhalten wurden, wenn ein und derselbe Strom geringer Stärke einmal durch das dünne Drähtchen, das andere Mal durch einen Normalwiderstand von 1 Ohm floß.

Das hier mit 30.000 Ohm belastete Galvanometer diente dann als Voltmeter. Für die folgenden Messungen wurden diese 30.000 Ohm durch Abblendung ausgeschaltet.

Nach Beendigung dieser Vorbestimmungen wurden die zehn Thermoelementchen des Kalorimeters dauernd mit dem Galvanometer verbunden. Da die oberen und unteren Enden der Thermosäule (*F* und *N*) trotz aller Sorgfalt nie genau die gleiche Temperatur hatten, mußte eine Vorrichtung getroffen werden, um den Lichtfleck des Galvanometers immer im mittleren Skalenbereiche zu halten. Zu diesem Zwecke wurde ein Widerstand von etwa 0·1 Ohm in die Galvanometerleitung geschaltet und an die Enden dieses Widerstandes wurde ein Hülfsstromkreis (Beutelelement mit vorgeschaltenen zirka 1000 Ohm Widerstand) angebracht. Durch Änderung dieses Widerstandes gelingt es leicht, den Galvanometerausschlag auf eine beliebige Stelle der Skala zu bringen.

Nun wurde zunächst, um das Kalorimeter zu eichen, der Jouleeffekt während sechs halber Minuten bestimmt. Ein Strom, dessen Stärke so gewählt war, daß die zu stande kommende Erwärmung der Erwärmung, beziehungsweise Abkühlung beim später zu messenden Peltiereffekte ungefähr gleichkam, wurde durch das System Eisendraht-Konstantandrähtchen-Eisendraht (Fe_2-J-Fe_1) geschickt. Vor dem Versuche und nach dem Versuche wurde der Gang des Galvanometerausschlages eine Zeit lang beobachtet und aus diesen Beobachtungen wurden die Ausschläge des Hauptversuches korrigiert. Die Art der Messung war dieselbe, wie sie Prof. Lecher[1] angibt. Während der Vorperiode, des Hauptversuches und der Nachperiode wurde der Stand des Galvanometerausschlages

[1] E. Lecher, l. c., p. 1512.

alle halben Minuten nach dem Schlage einer genauen Pendeluhr abgelesen und verzeichnet. Die Nachperiode setzte nicht sofort nach dem Ausschalten des Stromes ein, doch nahm diese Verzögerung bei höheren Temperaturen ab.

Sodann wurde der Peltiereffekt gemessen. Der Gang des Galvanometers wurde zunächst wieder vier halbe Minuten (Vorperiode) beobachtet, dann ein bestimmter Strom sechs halbe Minuten durch das System Eisen-Konstantan (Fe_1-Kon) geschickt. Nach Abwarten der Nachperiode und einer neuerlichen Vorperiode wurde die Beobachtung mit umgekehrter Stromrichtung wiederholt. Da die beiden Ausschläge nach entgegengesetzter Richtung erfolgten, erhielt man durch Addition ihrer korrigierten absoluten Beträge und durch Division mit zwei den Ausschlag, der dem Peltiereffekt der jeweiligen Stromstärke während sechs halber Minuten entsprach.

Die Auswertung geschah in folgender Weise: Man rechnet nach der bekannten Formel

$$0{\cdot}239\,.\,i^2\,.\,w\,.\,t$$

den Wert des Jouleeffektes für 3 Minuten in Grammkalorien aus. Entspricht diesem Werte A ein Ausschlag von a *cm*, so entsprechen den b *cm* Ausschlag die bei der Bestimmung des Peltiereffektes während 3 Minuten gefunden wurden

$$B = \frac{A\,b}{a} \text{ Grammkalorien.}$$

Dividiert man noch B durch den Betrag der Stromstärke (in Ampère) und die Sekundenzahl der Beobachtungszeit, so erhält man den Peltiereffekt in Grammkolarien pro Coulomb.

War nun der Peltiereffekt gemessen, so wurde noch eine zweite Bestimmung des Jouleeffektes zur Kontrolle vorgenommen und am Schlusse des Versuches zum zweiten Male die Temperatur im Kalorimeter bestimmt.

Zur Verdeutlichung der Beobachtungsweise sei mir gestattet, den Verlauf eines Versuches mittlerer Güte als Beispiel hier vollständig anzuführen.

Die Temperaturbestimmungen des Versuches ergaben 160° C; die Widerstandsbestimmung für w 1·77 Ohm.

Bestimmung der Joule'schen Wärme zum Zwecke der Kalorimetereichung.

	Vorperiode				Hauptversuch						Nachperiode			
Nach Sekunden	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360	390
Ablesungen an der Galvanometerskala	12·0	12·8	13·5	**14·1**	17·1	20·0	24·2	26·7	29·4	31·1	31·0	**29·8**	29·0	28·2
Differenzen		+ 8	+ 7	+ 6								— 12	— 8	— 8
Korrekturen [1]						— 2	+ 2	+ 5	+ 7	+ 9				

Die Beobachtungen der Nachperiode sind nur so weit angegeben, bis die Differenzen der Ablesungen konstant blieben. Die Stromstärke war $101 \cdot 9 . 10^{-3}$ Ampère. Es entsprachen also

$0 \cdot 239 . (101 \cdot 9 . 10^{-3})^2 . 1 \cdot 77 . 180 = 7 \cdot 91 . 10^{-1}$ Grammkalorien einem Ausschlage von $15 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 17 \cdot 4\,cm.$

[1] Die Korrekturen in der oben erwähnten Art nach Pfaundler (Müller-Pouillet's Lehrbuch der Physik, 9. Aufl., II 2, p. 332).

Zur Bestimmung der negativen Peltierwärme.

	Vorperiode				Hauptversuch						Nachperiode			
Nach Sekunden	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360	390
Ablesungen	31·0	29·8	29·0	**282**	25·7	22·1	17·2	12·5	7·8	2·8	1·9	1·8	**2·1**	2·5
Differenzen		+8	+8									−3	−4	
Korrekturen[1]					−6	−4	−2	−0·5	+2					

Die Stromstärke war $1 \cdot 44 . 10^{-2}$ Ampère. Dazu gehört der Galvanometerausschlag

$$26 \cdot 25 - 1 \cdot 05 = 25 \cdot 2 \; cm^2.$$

[1] Die Korrekturen in der oben erwähnten Art nach Pfaundler (Müller-Pouillet's Lehrbuch der Physik, 9. Aufl., II 2, p. 332).

Zur Bestimmung der positiven Peltierwärme.

	Vorperiode				Hauptversuch						Nachperiode			
Nach Sekunden	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360	390
Ablesungen	21	25	29	33	9·3	15·8	20·0	25·3	28·6	31·2	32·2	29·0	27·0	25·1
Differenzen		+ 4	+ 4	+ 4								— 2·0	— 1·9	
Korrekturen					+ 6	+ 10	+ 15	+ 17	+ 21					

Stromstärke $144 \cdot 5 . 10^{-2}$ Ampère. Galvanometerausschlag $24 \cdot 7 + 6 \cdot 9 = 31 \cdot 6$ *cm*. Der Peltiereffekt pro Coulomb bei 160° C. ergibt sich daraus als

$$\frac{7 \cdot 91 . 10^{-1} . \frac{25 \cdot 2 + 31 \cdot 6}{2}}{17 \cdot 4 . 144 \cdot 5 . 10^{-2} . 180} = 4 \cdot 95 . 10^{-3} \text{ Grammkalorien.}$$

Ergebnisse.

Die ersten Versuche wurden bei Zimmertemperatur ausgeführt. Sie ergaben, wie aus den nachfolgenden Tabellen ersichtlich ist, den Wert $3 \cdot 6 \cdot 10^{-3}$ Grammkalorien pro Sekunde. Dieser Wert steht in guter Übereinstimmung mit dem von Prof. Lecher[1] gefundenen $3 \cdot 4 \cdot 10^{-3}$.

In der folgenden Tabelle sind die Ergebnisse bei 0° C., 20°, 130°, 240°, 320° und 560° C. verzeichnet. Als Kalorimeterflüssigkeit diente bei 0°, 20°, 130° Petroleum, bei 240° Reten, bei 320° und 560° C. Chrysen. Bei 0° C. befand sich das ganze Glasgefäß, welches das Kalorimeter enthielt, in schmelzendem Schnee, bei den übrigen Temperaturen im elektrischen Ofen. Bei 0° C. und bei Zimmertemperatur wurden je 10 Beobachtungen gemacht, aus denen das Mittel genommen wurde, bei den höheren Temperaturen mußten meist mehr Beobachtungen erfolgen, unter denen nur jene zehn ausgewählt wurden, die um nicht mehr als $\pm$ 5° C. von der angegebenen Durchschnittstemperatur abwichen.

Temperatur	0° C.	20° C.	130° C.	240° C.	320° C.	560° C.
Einzelne Werte in Grammkalorien 10^{-3}	2·95	3·71	4·11	6·08	7·11	11·9
	3·06	3·63	4·65	5·97	8·40	13·1
	2·98	3·70	4·63	6·16	7·91	12·2
	3·04	3·64	5·24	6·84	9·02	11·7
	3·06	3·40	4·47	6·21	8·70	12·4
	3·11	3·65	4·39	6·52	7·76	11·6
	2·99	3·74	4·33	6·29	7·96	13·8
	3·69	3·70	4·48	5·88	8·03	12·9
	2·89	3·71	4·37	5·98	8·30	12·6
	3·03	3·60	4·36	6·43	8·00	12·8
Mittelwert ...	3·1	3·6	4·5	6·2	8·2	12·5

[1] E. Lecher, l. c., p. 1520.

Bis zu den Temperaturen von 160° C. wurde der elektrische Ofen mit dem Gleichstrome der Hausbatterie (30 Akkumulatoren), bei höheren mit dem Wechselstrom der städtischen Leitung geheizt. Bei letzterem traten leider oft größere Stromschwankungen ein, die wohl zur etwas größeren Abweichung

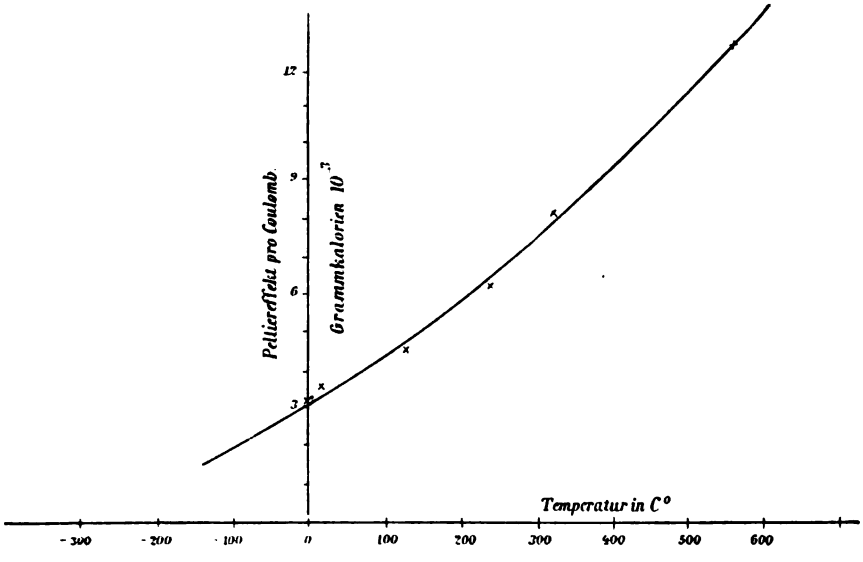


Fig. 2.

der einzelnen Werte bei höheren Temperaturen beigetragen haben dürften.

Trägt man die so gefundenen Werte in ein Koordinatensystem ein, wobei als Einheit der Abszisse 100° C., als Einheit der Ordinate 10^{-3} Grammkalorien genommen werden, so erhält man von der Abhängigkeit des Peltiereffektes von der Temperatur das Bild in Fig. 2.

Dieses Bild weicht ziemlich stark ab von demjenigen, das E. Bausenwein[1] angegeben hat; doch erklärt sich die Abweichung aus der weit geringeren Zuverlässigkeit seiner Methode.

Für vielfache Anregung und Förderung während der Arbeit bin ich Herrn Prof. Lecher zu größtem Danke verpflichtet.

[1] E. Bausenwein, Diese Berichte, Bd. CXIV, Abt. IIa, p. 1632 (1905).

Zur algebraischen Behandlung eines v. Staudtschen Fundamentalsatzes der Geometrie der Lage

von

W. Fr. Meyer in Königsberg i. Pr.

(Vorgelegt in der Sitzung am 14. März 1907.)

Um das »Harmonische« ohne Maßbegriffe zu begründen, bedient sich v. Staudt[1] des Fundamentalsatzes:

»Werden die Ecken zweier Vierecke einer Ebene einander paarweise zugeordnet und treffen sich fünf Paare entsprechender Seiten beider Vierecke auf einer und derselben Geraden g, so treffen sich auch die sechsten Seiten auf g, und beide Vierecke liegen zueinander perspektiv.«

v. Staudt leitet diesen Satz aus einem entsprechenden Satze über zwei ebene, aber in verschiedenen Ebenen befindliche Vierecke her. Es ist aber von besonderem Interesse, die erstere Konfiguration einer direkten Untersuchung zu unterziehen, die unter Voraussetzung des Koordinatenbegriffs die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz jener Konfiguration verfolgt und die zugleich die Gültigkeitsgrenzen des obigen Satzes festzulegen im stande ist.

Dies wird im wesentlichen erreicht durch Aufstellung einer Identität, die den geometrischen Gehalt der Figur erschöpft. Die linke Seite der Identität ist eine (identisch verschwindende) simultane Invariante der beiden Vierecke und einer willkürlichen Geraden der Ebene. Die vom Verfasser bei anderer Gelegenheit[2] aufgestellte analoge Identität für die entsprechende

[1] Geometrie der Lage, Nürnberg 1847, p. 40.

[2] Wiener Monatshefte für Mathematik und Physik, XVIII, p. 138 (1907), insbesondere p. 152.

räumliche Figur von zwei Vierecken, respektive Tetraedern ist trotz ihrer äußerlichen Ähnlichkeit von wesentlich anderem Charakter, da die linke Seite der für den Raum geltenden Identität eine Simultaninvariante der beiden Vierecke allein ist.

§ 1. Eine Hilfsidentität.

Versteht man unter $\lambda_i, \lambda_k, \lambda_l, \lambda_m$; $\lambda'_i, \lambda'_k, \lambda'_l, \lambda'_m$ zwei Reihen von vier Variabeln, so werde irgend eine der sechs aus der Matrix

$$\begin{vmatrix} \lambda_i, & \lambda_k, & \lambda_l, & \lambda_m \\ \lambda'_i, & \lambda'_k, & \lambda'_l, & \lambda'_m \end{vmatrix} \tag{1}$$

zu entnehmenden zweireihigen Determinanten bezeichnet mit p_{ik} $(i \neq k,\ i, k = i, k, l, m)$:

$$p_{ik} = \begin{vmatrix} \lambda_i, & \lambda_k \\ \lambda'_i, & \lambda'_k \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Die vier Indices i, k, l, m lassen sich auf drei Weisen in zwei Paare teilen: $(ik)(lm)$, $(il)(km)$, $(im)(kl)$. Nennt man die vier Größen $p_{il}, p_{km}, p_{lk}, p_{mi}$ die der Teilung $(ik)(lm)$ »entsprechenden«, so überzeugt man sich sofort von der Richtigkeit der Identität:

$$p_{il}\lambda_k\lambda_m + p_{mi}\lambda_k\lambda_l + p_{lk}\lambda_i\lambda_m + p_{km}\lambda_i\lambda_l \equiv 0, \tag{I}$$

wo die Faktorenprodukte $\lambda_k\lambda_m$ etc. auch durch die aus den λ' analog gebildeten $\lambda'_k\lambda'_m$ etc. ersetzbar sind. Im folgenden wird nur der Fall in Betracht kommen, daß sämtliche acht Größen λ, λ' endlich und von Null verschieden sind. Setzt man zur Abkürzung:

$$q_i = \frac{\lambda_i}{\lambda'_i} \quad (i = i, k, l, m), \tag{3}$$

so wird $q_l - q_k = \frac{p_{ik}}{\lambda'_i\lambda'_k}$ und die Identität (I) nimmt die triviale Gestalt an:

$$(q_i - q_l) + (q_k - q_m) \equiv (q_i - q_m) + (q_k - q_l). \tag{4}$$

Verschwinden daher irgend drei der Differenzen $q_i - q_l$, $q_m - q_i$, $q_l - q_k$, $q_k - q_m$, so verschwindet stets auch die vierte

und da alsdann $q_i = q_k = q_l = q_m$, auch jede der beiden übrigen Differenzen $q_i - q_k$, $q_l - q_m$. Entsprechend zieht das Verschwinden von irgend drei der Größen $p_{il}, p_{mi}, p_{lk}, p_{km}$ stets dasjenige der vierten und damit auch das der beiden übrigen p_{ik}, p_{lm} nach sich.

Diese Aussage wird aber gerade durch das Bestehen der Identität (I) [sowie der beiden, den Teilungen $(il)(km)$, $(im)(kl)$ korrespondierenden] zusammengefaßt.

§ 2. Die mit zwei Vierecken einer Ebene verknüpfte Identität bei einer kanonischen Lage des Koordinatendreieckes. Der v. Staudt'sche Satz.

Es mögen in einer Ebene zwei beliebige Vierecke vorliegen. Beide Vierecke seien jedoch eigentliche, d. h. die vier Ecken je eines Viereckes sollen voneinander verschieden sein und keine drei sollen auf einer Geraden liegen.

Überdies wird vorläufig angenommen, daß auch keine Ecke des einen Viereckes mit einer solchen des zweiten Viereckes koinzidiert.

Die Ecken beider Vierecke seien einander eineindeutig zugeordnet und in diesem Sinne mit i, k, l, m; i', k', l', m' bezeichnet. Damit entsprechen sich dann auch die Seiten (ik), $(i'k')$ etc. beider Vierecke und damit auch die Ecken beider Hauptdreiecke (die »Hauptecken«) und deren Seiten (die »Hauptgeraden«).

Das Koordinatendreieck ABC werde so gewählt, daß sich die Geraden (ik), $(i'k')$ in der Ecke $B(0,1,0)$ und analog die Geraden (lm), $(l'm')$ in der Ecke $C(0,0,1)$ treffen, so daß die Gerade BC mit $x = 0$ zusammenfällt, wenn unter x, y, z die Dreieckskoordinaten eines beliebigen Punktes der Ebene verstanden werden. Die Lage der Ecke A wird beliebig gelassen.

Ferner sei $O(abc)$ der Schnittpunkt (ik), (lm) und analog $O'(a'b'c')$ der Schnittpunkte $(i'k')$, $(l'm')$.

Unter den angegebenen Voraussetzungen über die beiden Vierecke läßt sich die Bezeichnung ihrer Ecken stets so wählen, daß B, C, O, O' vier verschiedene Punkte sind, die ein eigentliches Viereck bilden, mit alleiniger Ausnahme des

singulären Falles, daß jede der drei Hauptecken des einen Viereckes $(iklm)$ mit der entsprechenden des zweiten Viereckes $(i'k'l'm')$ zusammenfällt (siehe § 4).

Für die Koordinaten der Ecken beider Vierecke hat man dann die Darstellung:

$$\left.\begin{array}{ll} i)\ a, b+\lambda_i, c; & i')\ a', b'+\lambda_i', c'; \\ k)\ a, b+\lambda_k, c; & k')\ a', b'+\lambda_k', c'; \\ l)\ a, b, c+\lambda_l; & l')\ a', b', c'+\lambda_l'; \\ m)\ a, b, c+\lambda_m; & m')\ a', b', c'+\lambda_m', \end{array}\right\} \tag{5}$$

wo $\lambda_i, \lambda_k, \lambda_l, \lambda_m$; $\lambda_i', \lambda_k', \lambda_l', \lambda_m'$ acht Parameter bedeuten, die endlich und von Null verschieden sind.

Legt man dem Schnittpunkt der Geraden (il) mit der Geraden $BC(x=0)$ die Koordinaten $0, y_{il}, z_{il}$ bei, entsprechend dem Schnittpunkt von $(i'l')$ mit $x=0$ die Koordinaten $0, y_{il}', z_{il}'$ u. s. f., so folgt aus (5):

$$\frac{y_{il}}{z_{il}} = -\frac{\lambda_i}{\lambda_l}, \quad \frac{y_{il}'}{z_{il}'} = -\frac{\lambda_i'}{\lambda_l'}. \tag{6}$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß sich die Geraden (il) und $(i'l')$ auf der Geraden BC begegnen, lautet demnach:

$$[i, l] \equiv \lambda_i\lambda_l' - \lambda_l\lambda_i' \equiv p_{il} = 0. \tag{7}$$

Nach (I) gilt somit zwischen den vier Ausdrücken $[i, l]$, $[m, i]$, $[k, m]$, $[l, k]$ die lineare Identität:

$$J \equiv [i, l]\lambda_k\lambda_m + [k, m]\lambda_i\lambda_l + [m, i]\lambda_k\lambda_l + [l, k]\lambda_i\lambda_m \equiv 0 \tag{I'}$$

und damit der Satz:

I. »Die Identität (I'), die für zwei eigentliche Vierecke (der Ebene) mit getrennten Ecken bei geeigneter Lage des Koordinatendreieckes besteht — ausgenommen den singulären Fall, daß jede Hauptecke des einen Viereckes mit der entsprechenden des anderen Viereckes zusammenfällt — ist der algebraische Ausdruck des v. Staudt'schen Satzes, daß, wenn sich

fünf Paare entsprechender Seiten beider Vierecke auf ein und derselben Geraden treffen, dies auch für das sechste Paar zutrifft.«

Die durch Satz I charakterisierte Lage zweier Vierecke werde die »v. Staudt'sche Lage« derselben genannt.

Es seien jetzt die Bedingungen (7) dieser Lage erfüllt gedacht, so daß die vier Verhältnisse $\frac{\lambda_i}{\lambda_i'}, \frac{\lambda_k}{\lambda_k'}, \frac{\lambda_l}{\lambda_l'}, \frac{\lambda_m}{\lambda_m'}$ den nämlichen Wert besitzen, der gemäß (3) mit q bezeichnet sei:

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_i'} = \frac{\lambda_k}{\lambda_k'} = \frac{\lambda_l}{\lambda_l'} = \frac{\lambda_m}{\lambda_m'} = q. \tag{7'}$$

Gemäß (5) sind die Koordinaten eines beliebigen Punktes der Geraden (ii') von der Form $a - \nu_i a'$, $(b+\lambda_i) - \nu_i(b'+\lambda_i')$, $c - \nu_i c'$, wo ν_i einen Parameter bedeutet; für $\nu_i = q$ werden also diese Ausdrücke wegen (7'):

$$a - qa',\ b - qb',\ c - qc'. \tag{8}$$

Entsprechendes gilt für die Geraden (kk'), (ll'), (mm').

Das ist der Inhalt des v. Staudt'schen Korollars zum Satze I:

I'. »Befinden sich zwei Vierecke einer Ebene in v. Staudt'scher Lage, so liegen die Vierecke zueinander perspektiv.« »Das Perspektivitätszentrum P besitzt die Koordinaten (8).«

Es werden nunmehr die beiden Hauptdreiecke der Vierecke in Betracht gezogen.

Ein erstes Paar entsprechender Hauptecken wird durch O, O' gebildet; die Verbindungsgerade (OO') enthält den Punkt P (8). Ein zweites Paar $O_1 O_1'$ entsprechender Hauptecken sind die Schnittpunkte der Geraden (il), (km), respektive $(i'l')$, $(k'm')$. Setzt man zur Abkürzung:

$$\pi_{im} = \lambda_i\lambda_m - \lambda_k\lambda_l, \quad \pi_{im}' = \lambda_i'\lambda_m' - \lambda_k'\lambda_l', \tag{9}$$

wo diese beiden Größen π_{im}, π_{im}' vorderhand als von Null verschieden vorausgesetzt werden, so berechnen sich die

Koordinaten x_1, y_1, z_1, beziehungsweise x_1', y_1', z_1' von O_1, O_1' auf Grund von (5) zu:

$$\left.\begin{array}{ll} O_1') & a\pi_{im},\ b\pi_{im}+\lambda_i\lambda_k(\lambda_m-\lambda_l),\ c\pi_{im}+\lambda_l\lambda_m(\lambda_i-\lambda_k);\\ O_1) & a'\pi'_{im},\ b'\pi'_{im}+\lambda'_i\lambda'_k(\lambda'_m-\lambda'_l),\ c'\pi'_{im}+\lambda'_l\lambda'_m(\lambda'_i-\lambda'_k).\end{array}\right\} \quad (10)$$

Hieraus geht das dritte Paar O_2, O_2' entsprechender Hauptecken, die Schnittpunkte der Geraden $(im)(kl)$, respektive $(i'm')(k'l')$ hervor, indem man die Indices l und m miteinander vertauscht.

Hiebei werden wiederum die nach der Vorschrift (9) gebildeten Größen π_{il}, π'_{il} vorderhand als von Null verschieden angenommen.

Ein beliebiger Punkt der Geraden (O_1O_1') hat die Koordinaten $x_1+\tau x_1', y_1+\tau y_1', z_1+\tau z_1'$, unter τ wiederum einen Parameter verstanden. Mit Rücksicht auf (10) und (7') erhalten jene Koordinaten die Werte:

$$\left.\begin{array}{l} \pi_{im}\left(a+\dfrac{\tau a'}{q^2}\right),\\ \pi_{im}\left(b+\dfrac{\tau b'}{q^2}\right)+\lambda_i\lambda_k(\lambda_m-\lambda_l)\left(1+\dfrac{\tau}{q^3}\right),\\ \pi_{im}\left(c+\dfrac{\tau c'}{q^2}\right)+\lambda_l\lambda_m(\lambda_i-\lambda_k)\left(1+\dfrac{\tau}{q^2}\right).\end{array}\right\} \quad (11)$$

Bestimmt man hier τ durch die Forderung:

$$\tau = -q^3, \quad (12)$$

so werden die Ausdrücke (11) denen in (8) respektive proportional.

Der analoge Schluß gilt für das Haupteckenpaar O_2, O_2'. Somit hat man unter der Voraussetzung, daß die Größen π_{im}, π'_{im}; π_{il}, π'_{il} (9) von Null verschieden sind, den Satz:

II. »Sind zwei Vierecke einer Ebene in v. Staudtscher Lage, so sind auch die beiden Hauptdreiecke der Vierecke perspektiv und ihr Perspektivitätszentrum fällt mit dem der beiden Vierecke zusammen.«

Dieser Satz bleibt erhalten, wenn auch die Größe π_{im} (9) und damit zugleich π'_{im} (oder auch π_{il} und π'_{il}) verschwinden,

während π_{il}, π'_{il} (respektive π_{im}, π'_{im}) von Null verschieden sind. Denn dann fallen die entsprechenden Hauptecken O_1, O'_1 (respektive O_2, O'_2) zusammen, aber die beiden Hauptdreiecke besitzen immer noch ein bestimmtes Perspektivitätszentrum und dieses ist mit P identisch.

Verschwinden dagegen gleichzeitig π_{im}, π_{il} und damit auch π'_{im}, π'_{il}, fallen also die entsprechenden Hauptecken O_1, O'_1; O_2, O'_2 zusammen, so wird das Perspektivitätszentrum der beiden Hauptdreiecke auf der Geraden (OO') unbestimmt und der Satz II ist dann dahin einzuschränken, daß die Verbindungsgerade der beiden nicht koinzidierenden entsprechenden Hauptecken O, O' durch das Perspektivitätszentrum der beiden Vierecke laufen muß.

In dem oben ausgeschlossenen singulären Falle, daß jede Hauptecke des einen Viereckes mit der entsprechenden des anderen Viereckes zusammenfällt, ist offenbar die v. Staudt'sche Lage beider Vierecke überhaupt unmöglich.

Wir fragen jetzt bei der v. Staudt'schen Lage beider Vierecke nach der Perspektivitätsachse der beiden Hauptdreiecke (OO_1O_2), $(O'O'_1O'_2)$.

Gemäß (10) trifft die Hauptgerade OO_1 die Gerade $BC(x=0)$ in demjenigen Punkte ω_2, für den:

$$\frac{y}{z} = \frac{\lambda_i\lambda_k(\lambda_m - \lambda_l)}{\lambda_l\lambda_m(\lambda_i - \lambda_k)}. \tag{13}$$

Für den Schnittpunkt der entsprechenden Hauptgeraden $O'O'_1$ mit $x=0$ hat man in (13) statt der λ die λ' einzusetzen; hiebei behält aber die rechte Seite von (13) wegen $(7')$ ihren Wert bei. Die beiden entsprechenden Hauptgeraden (OO_1), $(O'O'_1)$ schneiden sich demnach auf der Geraden $x=0$ im Punkte ω_2 (13).

Analog treffen sich die beiden entsprechenden Hauptgeraden (OO_2) und $(O'O'_2)$ auf $x=0$ in dem Punkte ω_1, für den:

$$\frac{y}{z} = -\frac{\lambda_i\lambda_k(\lambda_m - \lambda_l)}{\lambda_l\lambda_m(\lambda_i - \lambda_k)} \tag{14}$$

Endlich schneiden sich die dritten Hauptgeraden (O_1O_2), $(O_1'O_2')$ auf $x=0$ in dem Punkte ω mit:

$$\frac{y}{z}=\frac{\lambda_i\lambda_k(\lambda_m-\lambda_l)}{\lambda_l\lambda_m(\lambda_i-\lambda_k)}\cdot\frac{(\lambda_i-\lambda_l)+(\lambda_i-\lambda_m)}{(\lambda_i-\lambda_l)-(\lambda_i-\lambda_m)}=$$

$$=\frac{\lambda_i\lambda_k}{\lambda_l\lambda_m}\cdot\frac{2\lambda_i-(\lambda_l+\lambda_m)}{\lambda_i-\lambda_k}. \quad (15)$$

Damit ist der Satz bewiesen:

III. Befinden sich zwei Vierecke (i,k,l,m), (i',k',l',m') einer Ebene in v. Staudt'scher Lage, so daß die Schnittpunkte P_{ik}, P_{lm}; P_{il}, P_{km}; P_{im}, P_{kl} zugeordneter Seiten auf ein und derselben Geraden g, der Perspektivitätsachse beider Vierecke liegen, so ist diese zugleich die Perspektivitätsachse der beiden Hauptdreiecke. Ist $O=(ik)(lm)$ irgend eine der drei Ecken des ersten Hauptdreieckes, so treffen die beiden von O auslaufenden Seiten des Dreieckes die Gerade g in einem zum Paare (P_{ik}, P_{lm}) harmonischen Paare.«

Der Satz III gilt auch dann noch, wenn P_{il} mit P_{km} oder P_{im} mit P_{kl} zusammenfällt oder auch, wenn beides zugleich stattfindet.

Hier ordnet sich auch der bekannte Satz von Desargues ein, daß die drei Punktepaare (P_{ik}, P_{lm}), (P_{il}, P_{km}), (P_{im}, P_{kl}) auf g einer Involution angehören. Denn die Koordinate $\frac{y}{z}=\xi$ auf $x=0$ für jene drei Paare besitzt die Werte $(0,\infty)$, $\left(-\frac{\lambda_i}{\lambda_l}, -\frac{\lambda_k}{\lambda_m}\right)$, $\left(-\frac{\lambda_i}{\lambda_m}, -\frac{\lambda_k}{\lambda_l}\right)$. Bedeuten demnach ξ, ξ' zusammengehörige Werte, so ist die Gleichung der Desarguesschen Involution:

$$\xi\xi'=\frac{\lambda_i\lambda_k}{\lambda_l\lambda_m}=\text{const.} \quad (16)$$

Schwieriger ist die Umkehrung der Sätze I', II, III, d. h. die Beantwortung der Frage, welche von den dort ausgesprochenen Perspektivitätseigenschaften beider Vierecke und ihrer Hauptdreiecke bereits hinreichen, um die v. Staudt'sche Lage der

Vierecke zu charakterisieren. Diese Frage soll später (in § 5) bei einer anderen Wahl des Koordinatendreieckes wieder aufgenommen werden.

§ 3. Aufstellung der Identität (I′) bei beliebigem Koordinatendreieck.

Das Koordinatendreieck liege jetzt beliebig. Die aufeinander bezogenen Ecken der beiden Vierecke seien wieder i, k, l, m; i', k', l', m'. Man verbinde wie oben die Punkte $P_{ik} = (ik)(i'k')$ und $P_{lm} = (lm)(l'm')$ durch eine Gerade $g_{ik,lm} = g$.

Die vier weiteren Schnittpunkte entsprechender Seiten seien analog P_{il}, P_{km}; P_{mi}, P_{lk}. Versteht man ferner unter Δ_{il}, Δ_{km}; Δ_{mi}, Δ_{lk} die vier dreireihigen Determinanten aus den Koordinaten der Punkte P_{ik}, P_{lm} und respektive P_{il}, P_{km}; P_{mi}, P_{lk}, so sagt deren Verschwinden aus, daß respektive der Punkt P_{il}, P_{km}, P_{mi}, P_{lk} mit den beiden Punkten P_{ik}, P_{lm} auf einer und derselben Geraden, nämlich g, liegt. Zwischen den vier Ausdrücken Δ_{il}, Δ_{km}, Δ_{mi}, Δ_{lk} wird dann als Verallgemeinerung von (I′) eine lineare Identität bestehen, deren Inhalt wieder der v. Staudt'sche Satz I ist.

Man konstruiere die fragliche Identität schrittweise: man frage vorerst nach der geometrischen Bedeutung des Verschwindens der in (I′) auftretenden Koeffizienten, stelle daraufhin bis auf gewisse unbekannte Faktoren die Form der gesuchten Identität fest und ermittele endlich durch Rückgang von dem beliebigen Koordinatendreiecke zu dem kanonischen des § 2 jene Faktoren.

Die in (I′) auftretenden Koeffizienten sind Produkte von zweien der vier Größen λ_i, λ_k, λ_l, λ_m.

Die Gleichung $\lambda_i = 0$ besagt, daß die Ecke (i) auf der Seite (lm) liegt. Umgekehrt berechnet sich die dreireihige, aus den kanonischen Koordinaten der Ecken i, l, m gebildete Determinante (ilm) auf Grund von (5) zu $a\lambda_i(\lambda_l - \lambda_m)$ und analog die drei weiteren Determinanten (klm), (lik), (mik).

$$\left.\begin{aligned} (ilm) &= a\lambda_i(\lambda_l - \lambda_m), & (klm) &= a\lambda_k(\lambda_l - \lambda_m), \\ (lik) &= -a\lambda_l(\lambda_i - \lambda_k), & (mik) &= -a\lambda_m(\lambda_i - \lambda_k). \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Die Multiplikation der linken Seite J von (I') mit

$$a^2(\lambda_k - \lambda_i)(\lambda_l - \lambda_m)$$

führt somit zu der Umformung

$$a^2(\lambda_k - \lambda_i)(\lambda_l - \lambda_m) \cdot J \equiv J_1 \equiv [i,l](klm)(mik) + \\ + [k,m](ilm)(lik) + [m,i](klm)(lik) + [l,k](ilm)(mik). \quad (18)$$

Die Bedingung $[i,l] \equiv p_{il} = 0$ hat denselben Inhalt, wie jetzt, bei beliebigem Koordinatendreieck, die Bedingung $\Delta_{il} = 0$. Umgekehrt trage man in die Bildung Δ_{il} die kanonischen Koordinaten (5) der Ecken beider Vierecke ein und stelle den Faktor fest, mit dem $[i,l] \equiv p_{il}$ dabei behaftet erscheint. Versteht man unter a_i, b_i, c_i, respektive a_i', b_i', c_i' die allgemeinen Koordinaten der Ecke (i), respektive (i') u. s. f.; unter $(bc)_{ik}$, $(b'c')_{ik}$ die Ausdrücke $b_i c_k - b_k c_i$, $b_i' c_k' - b_k' c_i'$ u. s. f., so erhält der Punkt P_{ik} als Koordinaten die Determinanten der Matrix:

$$\begin{vmatrix} (bc)_{ik}, & (ca)_{ik}, & (ab)_{ik} \\ (b'c')_{ik}, & (c'a')_{ik}, & (a'b')_{ik} \end{vmatrix}. \quad (19)$$

Gemäß (5) werden dann die kanonischen Koordinaten der Punkte P_{ik}, P_{lm}:

$$\left.\begin{array}{llll} P_{ik}) & O, & (\lambda_i - \lambda_k)(\lambda_i' - \lambda_k')(ca' - ac'), & O \\ P_{lm}) & O, & O, & (\lambda_l - \lambda_m)(\lambda_i' - \lambda_m')(ab' - a'b) \end{array}\right\} \quad (20)$$

während man von den Koordinaten von P_{il} nur die erste braucht, die sich als $-aa'p_{il}$ ergibt.

Demnach erhält Δ_{il} den kanonischen Ausdruck:

$$\Delta_{il} = p_{il}[aa'(\lambda_i - \lambda_k)(\lambda_i' - \lambda_k')(\lambda_l - \lambda_m)(\lambda_l' - \lambda_m')(ca' - a'c)(ab' - a'b)] \\ \equiv p_{il}F, \quad (21)$$

wo der Faktor F von p_{il} für alle vier Determinanten Δ_{il}, Δ_{km}, Δ_{mi}, Δ_{lk} ein und derselbe ist. Man multipliziere daher den Ausdruck J_1 (18) noch mit F, wodurch J_2 entstehe:

$$FJ_1 \equiv J_2. \quad (22)$$

»Dann geht dieser Ausdruck J_2 beim Übergange von dem kanonischen Koordinatendreieck des § 2 zu dem jetzt zu Grunde gelegten beliebigen bis auf eine Potenz der Substitutionsdeterminante über in die linke Seite der gesuchten Identität, so daß diese lautet:

$$\Delta_{il}(klm)(mik)+\Delta_{km}(ilm)(lik)+\Delta_{mi}(klm)(lik)+ \\ +\Delta_{lk}(ilm)(mik)=0.\text{«} \quad \text{(II)}$$

Die Gestalt von (II) wird übersichtlicher, wenn man die (klm) u. s. f., d. s. die Determinanten der aus den allgemeinen Koordinaten der Ecken i, k, l, m gebildeten Matrix bezeichnet, wie folgt:

$$\left.\begin{array}{ll} (klm)=D_i, & (ikm)=(mik)=D_l, \\ (ilm)=-D_k, & (ikl)=(lik)=-D_m. \end{array}\right\} \quad (23)$$

Da $\Delta_{il}=-\Delta_{li}$ u. s. f., so gewinnt damit die Identität (II) das Aussehen:

$$\Delta_{il}D_iD_l+\Delta_{km}D_kD_m+\Delta_{im}D_iD_m+\Delta_{kl}D_kD_l=0, \quad \text{(II')}$$

wo nunmehr die Indices stets die natürliche Reihenfolge beobachten.

Der so erweiterten Identität (II') stehen zwei analog gebaute zur Seite, indem man die bisher ausgezeichnete Paareinteilung $(ik), (lm)$ ersetzt durch die beiden anderen $(il), (km)$, respektive $(im), (kl)$.

Andrerseits sind nach § 1 die D_i, D_k, D_l, D_m auch mit den aus den $\lambda_i', \lambda_k', \lambda_l', \lambda_m'$ entsprechend gebildeten Größen D_i', D_k', D_l', D_m' vertauschbar.

Indem wir uns auf die ersteren drei Typen der Identität (II') beschränken, können wir dieselben durch einen einzigen, hinsichtlich aller vier Ecken gleichmäßig konstruierten Typus zusammenfassen.

Fügt man jedem Faktor Δ_{il} u. s. f. die jeweils zu Grunde gelegte Paareinteilung als obere Indices hinzu, so lauten die drei Typen von (II'):

$$\left.\begin{array}{rr} \Delta_{il}^{(ik,lm)} D_i D_l + \Delta_{km}^{(ik,lm)} D_k D_m + \Delta_{im}^{(ik,lm)} D_i D_m + \Delta_{kl}^{(ik,lm)} D_k D_l = 0 \\ \Delta_{ik}^{(il,km)} D_i D_k + \Delta_{lm}^{(il,km)} D_l D_m + \Delta_{im}^{(il,km)} D_i D_m + \Delta_{kl}^{(il,km)} D_k D_l = 0 \\ \Delta_{ik}^{(im,kl)} D_i D_k + \Delta_{lm}^{(im,kl)} D_l D_m + \Delta_{il}^{(im,kl)} D_i D_l + \Delta_{km}^{(im,kl)} D_k D_m = 0 \end{array}\right\}. \qquad (II'')$$

Man multipliziere diese drei Identitäten mit drei willkürlichen Größen u_1, u_2, u_3 und addiere. Berücksichtigt man hiebei, daß alle Ausdrücke von der Art $\Delta_{ik}^{(ik,lm)}$, wo also das untere Indexpaar mit einem der beiden oberen übereinstimmt, verschwinden, und versteht unter r, s irgend eines der sechs in natürlicher Folge genommenen Paare der vier Indices i, k, l, m, so entsteht die einzige Identität:

$$\sum_r \sum_s D_r D_s (u_1 \Delta_{rs}^{(ik,lm)} + u_2 \Delta_{rs}^{(il,km)} + u_3 \Delta_{rs}^{(im,kl)}) = 0. \qquad (III)$$

In dieser Gestalt läßt die in Rede stehende Identität an Durchsichtigkeit nichts mehr zu wünschen übrig. Denn irgend einer der sechs Klammerfaktoren stellt durch sein Verschwinden die Bedingung dar, daß der Punkt P_{rs}, der Schnittpunkt zugeordneter Viereckssеiten (rs), $(r's')$, einer beliebigen Geraden (u) angehört; hiebei erscheint die Gleichung der letzteren auf ein Koordinatendreieck bezogen, dessen Ecken die Hauptecken des ersten Viereckes sind. Umgekehrt, verfügt man über die Größen u_1, u_2, u_3 so, daß die Gerade (u) mit irgend einer der Hauptgeraden des ersten Viereckes zusammenfällt, so reduziert sich (III) auf irgend einen der speziellen Typen (II'').

Die D_i, D_k, D_l, D_m (23) sind von Null verschieden, da das Viereck (i, k, l, m) ein eigentliches sein sollte.

Die Identität (III) drückt also direkt die Tatsache aus, daß, wenn fünf der sechs Punkte P_{rs} auf irgend einer und derselben Geraden (u) liegen, das nämliche auch vom sechsten Punkt gilt:

IV. »Der allgemeinste algebraische Ausdruck des v. Staudt'schen Satzes für zwei Vierecke einer Ebene wird durch die Identität (III) angegeben.«

Hiebei umfaßt ihrer Herleitung nach die Identität (III) alle Fälle, in denen überhaupt die v. Staudt'sche Lage zweier eigentlicher Vierecke einer und derselben Ebene möglich ist. Denn in dem einzigen Falle, wo jene Lage nicht eintreten kann, wenn nämlich jede Hauptecke des einen Viereckes mit der entsprechenden des anderen Viereckes zusammenfällt, verschwindet jeder der sechs Klammerfaktoren in (III) identisch, d. h. für alle u_1, u_2, u_3.

Man bemerke die eigentümliche Analogie, die der Aufbau der Identität (III) mit der vom Verfasser[1] für den Raum aufgestellten aufweist, die aussagt, daß, wenn von zwei ebenen oder räumlichen, aber im ersteren Falle nicht in einer und derselben Ebene gelegenen Vierecken, fünf Paare zugeordneter Kanten sich treffen, dies auch für das sechste Paar gilt.

§ 4. Singuläre Fälle.

Die Identität (III) versagte, wenn beide Vierecke ein gemeinsames Hauptdreieck besitzen und wenn überdies jede Hauptecke mit ihrer zugeordneten koinzidiert; dann war aber auch die v. Staudt'sche Lage beider Vierecke unmöglich. Dagegen erhebt sich die Frage, ob nicht doch bei gemeinsamem Hauptdreieck die Ecken der beiden Vierecke derart einander zugeordnet werden können, daß die v. Staudt'sche Lage möglich wird.

Das gemeinsame Hauptdreieck $(A_1 A_2 A_3)$ werde als Koordinatendreieck gewählt; die Koordinaten eines beliebigen Punktes seien mit x_1, x_2, x_3 bezeichnet. Dann besitzen die Ecken beider Vierecke Koordinaten von der Form:

$$\left.\begin{array}{ll} i)\ (p_1, p_2, p_3); & k)\ (-p_1, p_2, p_3); \\ i')\ (p_1', p_2', p_3'); & k')\ (-p_1', p_2', p_3'); \\ l)\ (p_1, -p_2, p_3); & m)\ (p_1, p_2, -p_3); \\ l')\ (p_1', -p_2', p_3'); & m')\ (p_1', p_2', -p_3'); \end{array}\right\} \qquad (24)$$

[1] Wiener Monatshefte für Mathematik und Physik, XVIII (1907), p. 138, insbesondere p. 150.

wo die Größen p_1, p_2, p_3; p_1', p_2', p_3' im übrigen willkürlich gewählt werden können, nur so, daß keine von ihnen verschwindet, da beide Vierecke als eigentliche vorausgesetzt werden. Es sei $A_1 = (ik)(lm)$, $A = (il)(km)$, $A_3 = (im)(kl)$; die Zuordnung der Ecken des zweiten Viereckes zu denen des ersten bleibe noch vorbehalten.

Da die vier Ecken des zweiten Viereckes gleichberechtigt sind, so dürfen wir annehmen, daß, während die Ecken i, k, l, m des ersten Viereckes festgehalten werden, etwa der ersten Ecke i die erste Ecke i' fest zugeordnet wird.

Dann sind nur drei Typen A, B, Γ von Zuordnungen möglich:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{A)} & \begin{vmatrix} i & k & l & m \\ i' & k' & l' & m' \end{vmatrix}, \\ \text{B)} & \begin{vmatrix} i & k & l & m \\ i' & l' & k' & m' \end{vmatrix}, \\ \Gamma) & \begin{vmatrix} i & k & l & m \\ i' & l' & m' & k' \end{vmatrix}. \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 25\,\alpha) \\ 25\,\beta) \\ 25\,\gamma) \end{array}$$

Die 24 Zuordnungen der beiderlei Ecken, die im ganzen möglich sind, verteilen sich auf die drei Typen A, B, Γ derart, daß der erste Typus 4, der zweite 4.3, der dritte 4.2 jeweils gleichberechtigte Zuordnungen umfaßt.

Die drei Typen A, B, Γ lassen sich einfach dahin charakterisieren, daß beim ersten Typus jede Hauptecke sich selbst entspricht, beim zweiten Typus zwei Hauptecken sich wechselseitig entsprechen, die letzte sich selbst, z. B. (A_1, A_2), (A_2, A_1), (A_3, A_3), während beim dritten Typus die Hauptecken sich zyklisch entsprechen, z. B. (A_1, A_2), (A_2, A_3), (A_3, A_1).

Beim ersten Typus bleibt das Perspektivitätszentrum beider Dreiecke gänzlich unbestimmt, beim zweiten Typus auf einer Hauptgeraden unbestimmt, während beim dritten Typus überhaupt kein Perspektivitätszentrum existiert.

Die Verbindungsgerade einer Ecke i mit einer Ecke k heiße g_{ik}, die einer Ecke r' mit einer Ecke s' heiße g'_{rs}. Dann berechnen sich die Koordinaten u, v, w der sechs Seiten des ersten Viereckes ohneweiters wie folgt:

$$\begin{array}{lccc} & u & v & w \\ g_{ik}) & 0 & -p_3 & p_2 \\ g_{lm}) & 0 & p_3 & p_2 \\ g_{il}) & p_3 & 0 & -p_1 \\ g_{km}) & p_3 & 0 & p_1 \\ g_{im}) & -p_2 & p_1 & 0 \\ g_{kl}) & p_2 & p_1 & 0, \end{array} \tag{26}$$

aus denen die Koordinaten der Seiten g'_{ik} u. s. f. des zweiten Viereckes durch Akzentuierung der p_1, p_2, p_3 hervorgehen.

Da der Typus A erledigt ist, sind noch die Typen B und Γ zu untersuchen.

Der Typus B.

Aus (26) entnimmt man die Koordinaten der Punkte $B = (g_{ik}, g'_{il})$ und $C = (g_{lm}, g'_{km})$:

$$\begin{array}{ll} B) & (p_3 p'_1,\ p_2 p'_3,\ \ p_3 p'_3), \\ C) & (p_3 p'_1,\ p_2 p'_3,\ -p_3 p'_3); \end{array} \tag{27}$$

während andrerseits die Punkte $O = (g_{ik}, g_{lm})$ und $O' = (g'_{il}, g'_{km})$ mit den Koordinatenecken A_1, A_2 zusammenfallen. Die (wie in § 2 bezeichneten) Punkte B, C, O, O' bilden daher ein eigentliches Viereck, so daß die Voraussetzungen des § 2 erfüllt sind.

Gemäß (27) liegen die Punkte B, C auf einer Geraden g, deren Gleichung ist:

$$g) \quad x_1 p_2 p'_3 - x_2 p_3 p'_1 = 0, \tag{28}$$

und zwar harmonisch getrennt durch A_3 und $x_3 = 0$.

Der Punkt (il), $(i'k')$ hat die Koordinaten $p_1 p'_3$, $p'_2 p_3$, $p_3 p'_3$, liegt also dann und nur dann auf der Geraden g (28), wenn:

$$p_1 p_2 p'^2_3 = p'_1 p'_2 p^2_3, \quad \text{d. i.} \quad \frac{p_1}{p_3} \cdot \frac{p_2}{p_3} = \frac{p'_1}{p'_3} \cdot \frac{p'_2}{p'_3}. \tag{29}$$

Für den Punkt (km), $(l'm')$ mit den Koordinaten $p_1 p'_3$, $p'_2 p_3$, $-p_3 p'_3$ wird die Bedingung, der Geraden g (28) anzugehören, gleichfalls durch (29) angegeben.

Die beiden weiteren Punkte (im), $(i'm')$ und (kl), $(k'l')$ sind mit A_3 identisch, liegen also von selbst auf g.

Andrerseits fragen wir nach der Bedingung, unter der sich die vier Verbindungsgeraden entsprechender Ecken (ii'), (mm'), (kl'), (lk') in einem und demselben Punkte treffen.

Mittels der Kürzungen:

$$\left.\begin{array}{l} p_2p_3'-p_3p_2' = \lambda_1,\ p_3p_1'-p_1p_3' = \lambda_2,\ p_1p_2'-p_2p_1' = \lambda_3, \\ p_2p_3'+p_3p_2' = \mu_1,\ p_3p_1'+p_1p_3' = \mu_2 \end{array}\right\} \quad (30)$$

erhalten die Koordinaten der Geraden (ii'), (mm'), (kl'), $(k'l)$ die Werte:

$$\left.\begin{array}{ll} (ii'):\ (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3); & (mm'):\ (\lambda_1, \lambda_2, -\lambda_3), \\ (kl'):\ (\mu_1, \mu_2, \lambda_3); & (k'l):\ (\mu_1, \mu_2, -\lambda_3), \end{array}\right\} \quad (31)$$

so daß die Koordinaten der Schnittpunkte (ii'), (mm') und (kl'), (lk') werden:

$$\left.\begin{array}{r} (ii'),\ (mm'):\ (-\lambda_2, \lambda_1, 0), \\ (kl'),\ (k'l):\ (-\mu_2, \mu_1, 0). \end{array}\right\} \quad (32)$$

Beide Punkte gehören also der Koordinatenseite $x_3 = 0$ an; sollen sie zusammenrücken, so entsteht die Bedingung $\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 = 0$ oder entwickelt, gerade die Bedingung (29). Ist diese erfüllt, so besitzen beide Vierecke das Perspektivitätszentrum P:

$$P) \quad (p_1p_2',\ p_3p_3',\ 0). \quad (33)$$

Das Perspektivitätszentrum beider Hauptdreiecke $(A_1A_2A_3)$, $(A_2A_1A_3)$ wird auf der Geraden $x_3 = 0$ unbestimmt und diese läuft durch P, in Übereinstimmung mit § 2.

Der Typus Γ.

Die Punkte B, C und damit die Gerade g, desgleichen die Punkte O, O' sind die nämlichen wie beim Typus B. Für den Punkt $(il)(i'm')$ wird $\frac{x_1}{x_2} = \frac{k_1'}{k_2'}$, für den Punkt $(km)(l'k')$ dagegen $\frac{x_1}{x_2} = -\frac{k_1'}{k_2'}$. Sollen daher beide Punkte der Geraden g (28) angehören, so müßte gleichzeitig $k_2k_2' = k_3k_3' = -k_3k_3'$

sein, mithin $k_2 k_2' = 0$, was bei zwei eigentlichen Vierecken nicht eintreten kann.

Demnach ist das Ergebnis:

V. »Besitzen zwei eigentliche Vierecke der Ebene ein gemeinsames Hauptdreieck, so verteilen sich die 24 Möglichkeiten, die Ecken beider Vierecke einander zuzuordnen, zu je 4, 12, 8 auf drei Typen A, B, Γ. Beim Typus A, wo jede Hauptecke sich selbst entspricht, sowie beim Typus Γ, wo sich die Hauptecken zyklisch entsprechen, ist die v. Staudt'sche Lage der Vierecke unmöglich. Dagegen ist beim Typus B, wo zwei Hauptecken sich wechselseitig entsprechen, die dritte sich selbst, für das Eintreten der v. Staudt'schen Lage die einzige Bedingung (29) notwendig und hinreichend und dies ist zugleich die Bedingung dafür, daß die vier Verbindungsgeraden zugeordneter Ecken beider Vierecke durch einen und denselben Punkt laufen.«

Nunmehr bietet sich der Fall dar, wo die beiden Vierecke zwei gemeinsame Hauptecken A, B besitzen, während die dritten, C und C', getrennt sind. Die Zuordnung beider Vierecke kann dann eine dreifache sein; entweder entspricht jede der beiden Hauptecken A, B sich selbst oder aber diese entsprechen sich wechselseitig oder endlich es findet keines von beiden statt.

Da die beiden letzteren Unterfälle genau nach der Vorschrift des § 2 zu behandeln sind und im übrigen keine singulären Eigenschaften aufweisen, so können wir uns auf den ersteren Unterfall beschränken.

Es ist dieser Spezialfall eben derjenige, der bei v. Staudt zur Definition des Harmonischen dient. Trotzdem er rein geometrisch keine Schwierigkeiten bietet, ist es doch von Interesse das analytische Äquivalent in Betracht zu ziehen.

Man wähle jetzt ein Koordinatendreieck, von dem $A(1,0,0)$ und $B(0,1,0)$ zwei Ecken sind, während die dritte Ecke beliebig bleibe. Es mögen sich in B die Geraden (ik), $(i'k')$, (lm), $(l'm')$ treffen, in A die Geraden (il), $(i'l')$, (km), $(k'm')$.

Dann erhalten die Ecken beider Vierecke Koordinaten x, y, z der Gestalt:

$$\left.\begin{array}{l} i)\ (\lambda_1, \mu_1, 1);\quad k)\ (\lambda_1, \mu_2, 1);\quad l)\ (\lambda_2, \mu_1, 1);\quad m)\ (\lambda_2, \mu_2, 1); \\ i')\ (\lambda_1', \mu_1', 1);\quad k')\ (\lambda_1', \mu_2', 1);\quad l')\ (\lambda_2' \mu_1', 1);\quad m')\ (\lambda_2', \mu_2', 1), \end{array}\right\} \quad (34)$$

wo der Akzent wiederum die Zuordnung angebe.

Die Geraden (im), (kl), $(i'm')$, $(k'l')$ schneiden die Gerade $g = AB$ $(z = 0)$ in den Punkten:

$$\left.\begin{array}{ll} (im)\colon \dfrac{x}{y} = \dfrac{\lambda_1 - \lambda_2}{\mu_1 - \mu_2}, & (kl)\colon \dfrac{x}{y} = -\dfrac{\lambda_1 - \lambda_2}{\mu_1 - \mu_2}, \\ (i'm')\colon \dfrac{x}{y} = \dfrac{\lambda_1' - \lambda_2'}{\mu_1' - \mu_2'}, & (k'l')\colon \dfrac{x}{y} = -\dfrac{\lambda_1' - \lambda_2'}{\mu_1' - \mu_2'}. \end{array}\right\} \quad (35)$$

Die Bedingung, daß sich (im), $(i'm')$ auf g in einem Punkte P_{im} begegnen, ist dieselbe wie die, daß sich (kl), $(k'l')$ auf g in einem Punkte P_{kl} begegnen, nämlich:

$$\left|\begin{array}{ll} \lambda_1 - \lambda_2, & \mu_1 - \mu_2 \\ \lambda_1' - \lambda_2', & \mu_1' - \mu_2' \end{array}\right| \equiv \Pi = 0. \quad (36)$$

Ist diese Bedingung der v. Staudt'schen Lage erfüllt, so bilden P_{im} und P_{kl} gemäß (35) mit A, B zwei harmonische Punktepaare.

Andrerseits ergeben sich für die Verbindungsgeraden (ii') u. s. f. zugeordneter Ecken die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} (ii')\colon x(\mu_1 - \mu_1') - y(\lambda_1 - \lambda_1') + z\{\mu_1(\lambda_1 - \lambda_1') - \lambda_1(\mu_1 - \mu_1')\} = 0 \\ (kk')\colon x(\mu_2 - \mu_2') - y(\lambda_1 - \lambda_1') + z\{\mu_2(\lambda_1 - \lambda_1') - \lambda_1(\mu_2 - \mu_2')\} = 0 \\ (ll')\colon x(\mu_1 - \mu_1') - y(\lambda_2 - \lambda_2') + z\{\mu_1(\lambda_2 - \lambda_2') - \lambda_2(\mu_1 - \mu_1')\} = 0 \\ (mm')\colon x(\mu_2 - \mu_2') - y(\lambda_2 - \lambda_2') + z\{\mu_2(\lambda_2 - \lambda_2') - \lambda_2(\mu_2 - \mu_2')\} = 0. \end{array}\right\} \quad (37)$$

Bezeichnet man die mit abwechselnden Vorzeichen genommenen dreireihigen Determinanten aus der Matrix der Koeffizienten von (37) respektive mit Δ_i, Δ_k, Δ_l, Δ_m, so liefert einfache Umrechnung das durchsichtige Gesetz:

$$\left.\begin{array}{ll} \Delta_i = (\mu_2 - \mu_2')(\lambda_2 - \lambda_2')\Pi, & \Delta_k = (\mu_1 - \mu_1')(\lambda_2 - \lambda_2')\Pi, \\ \Delta_l = (\mu_2 - \mu_2')(\lambda_1 - \lambda_1')\Pi, & \Delta_m = (\mu_1 - \mu_1')(\lambda_1 - \lambda_1')\Pi. \end{array}\right\} \quad (38)$$

Da die Ecken beider Vierecke getrennt sein sollen, darf keiner der Faktoren $\lambda_1 - \lambda_1'$ u. s. f. verschwinden. Demnach können die vier Größen $\Delta_i, \Delta_k, \Delta_l, \Delta_m$ dann und nur dann verschwinden, d. h. die vier Geraden $(ii'), \ldots (mm')$ durch einen und denselben Punkt P laufen, wenn die Bedingung (36) der v. Staudt'schen Lage erfüllt ist.

Berechnet man noch aus (34) die Koordinaten der dritten Hauptecken C, C':

$$C) \left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}, \frac{\mu_1+\mu_2}{2}, 1\right); \quad C') \left(\frac{\lambda_1'+\lambda_2'}{2}, \frac{\mu_1'+\mu_2'}{2}, 1\right), \tag{39}$$

sowie andrerseits aus (37), unter der Voraussetzung $\Pi = 0$, die Koordinaten von P:

$$\left.\begin{aligned} P) \quad x:y:z &= \lambda_1'(\lambda_1-\lambda_2)-\lambda_1(\lambda_1'-\lambda_2') : \mu_1'(\lambda_1-\lambda_2)-\mu_1(\lambda_1'-\lambda_2') : \\ &\quad : (\lambda_1-\lambda_2)-(\lambda_1'-\lambda_2') \\ &= \lambda_1'(\mu_1-\mu_2)-\lambda_1(\mu_1'-\mu_2') : \mu_1'(\mu_1-\mu_2)-\mu_1(\mu_1'-\mu_2') : \\ &\quad : (\mu_1-\mu_2)-(\mu_1'-\mu_2'), \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

so erkennt man, daß die Gerade (CC'), auf der das Perspektivitätszentrum der beiden Hauptdreiecke unbestimmt wird, durch das Perspektivitätszentrum P der beiden Vierecke läuft, so daß auch in diesem Falle der allgemeine Satz des § 2 seine Gültigkeit behält. Somit lautet das Ergebnis:

VI. »Besitzen zwei eigentliche Vierecke der Ebene mit getrennten Ecken zwei gemeinsame Hauptecken A, B, während die dritten Hauptecken C, C' getrennt sind, so ist eine dreifache Zuordnung beider Vierecke möglich. Hiebei entsprechen sich entweder A und B je selbst oder aber wechselseitig, oder endlich es tritt keines von beiden ein. Die beiden letzteren Fälle befolgen das allgemeine Gesetz des § 2 und sind im übrigen nicht als singulär anzusehen. Im ersten Falle, der bei v. Staudt zur Definition des Harmonischen dient, ist für das Eintreten der v. Staudtschen Lage nur eine Bedingung $\Pi = 0$ notwendig und hinreichend, und diese Bedingung fällt zusammen mit der, daß die vier Verbindungsgeraden zugeordneter

Ecken durch einen und denselben Punkt P laufen. Dieses Perspektivitätszentrum P beider Vierecke liegt dann auf der Verbindungsgeraden der dritten Hauptecken C, C'.«

Es erübrigt der Fall, wo nur eine gemeinsame und zugleich sich selbst[1] entsprechende Hauptecke $B = (ik)(lm) = (i'k')(l'm')$ existiert.

Man wähle B als eine Koordinatenecke (0, 1, 0), den Schnittpunkt $C = (il)$, $(i'l')$ als eine zweite (0, 0, 1). Die Ecken (i), (i') seien die Punkte (abc), $(a'b'c')$. Dann hat man die Koordinatentabelle:

$$\left.\begin{array}{ll} i)\ (a, b, c): & k)\ (a, b+\lambda_k, c); \\ l)\ (a, b, c+\lambda_l); & m)\ (a, b+\lambda_m, c+\lambda_l), \end{array}\right\} \tag{41}$$

während bei den zugeordneten Ecken die akzentuierten Größen eintreten. Die Bedingungen der v. Staudt'schen Lage, daß sich respektive die Geraden (kl), $(k'l')$; (im), $(i'm')$; (km), $(k'm')$ auf der Geraden $g = (BC)$ treffen, sind unter Beibehaltung der Bezeichnungen des § 2:

$$p_{kl} = 0, \quad p_{lm} = 0, \quad p_{kl} + p_{lm} = 0, \tag{42}$$

deren linke Seiten offenbar an die Identität geknüpft sind:

$$(p_{kl} + p_{lm}) - p_{kl} - p_{lm} \equiv 0. \tag{43}$$

Sind zwei der Bedingungen (42) erfüllt, so auch die dritte und es wird $\frac{\lambda_k}{\lambda'_k} = \frac{\lambda_l}{\lambda'_l} = \frac{\lambda_m}{\lambda'_m}$, d. i. $q_k = q_l = q_m = q$.

Die beiden Vierecke besitzen dann ein Perspektivitätszentrum P mit Koordinaten wie in § 2:

$$P)\ \ a - qa', \quad b - qb', \quad c - qc'. \tag{44}$$

Andrerseits ergibt sich für die beiden weiteren Hauptecken paare $O_1 = (il), (km)$, $O'_1 = (i'l'), (k'm')$ und $O_2 = (im), (kl)$, $O'_2 = (i'm'), (k'l')$:

---

[1] Der Fall, daß die gemeinsame Hauptecke sich nicht selbst entspricht, bietet wiederum nichts Besonderes dar.

$$\left.\begin{aligned}
&O_1) \quad \left(a, b, c + \frac{\lambda_k \lambda_l}{\lambda_k - \lambda_m}\right), \\
&O_1') \quad \left(a', b', c' + \frac{\lambda_k' \lambda_l'}{\lambda_k' - \lambda_m'}\right); \\
&O_2) \quad \left(a, b + \frac{\lambda_k \lambda_m}{\lambda_k + \lambda_m}, c + \frac{\lambda_k \lambda_l}{\lambda_k + \lambda_m}\right), \\
&O_2') \quad \left(a', b' + \frac{\lambda_k' \lambda_m'}{\lambda_k' + \lambda_m'}, c' + \frac{\lambda_k' \lambda_l'}{\lambda_k' + \lambda_m'}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Aus (45) geht wieder hervor, daß das Perspektivitätszentrum der Vierecke mit dem der beiden Hauptdreiecke zusammenfällt.

Der besondere Fall $\lambda_k = \lambda_m$ (und damit $\lambda_k' = \lambda_m'$), respektive $\lambda_k = -\lambda_m$ (und damit $\lambda_k' = -\lambda_m'$) führt auf den oben erledigten zurück, da dann eine zweite gemeinsame und sich selbst entsprechende Hauptecke $O_1 = O_1'$, respektive $O_2 = O_2'$ auf g existiert. Es gilt also:

VII. »Haben beide Vierecke nur eine gemeinsame und sich selbst entsprechende Hauptecke, so gilt der v. Staudt'sche Satz; die beiden Bedingungen für das Eintreten der v. Staudt'schen Lage sind zugleich die eines Perspektivitätszentrums P beider Vierecke und dieses fällt mit dem der beiden Hauptdreiecke zusammen.«

Eine andere Klasse singulärer Erscheinungen bietet sich dar, wenn beide Vierecke eine, respektive zwei entsprechende Ecken gemeinsam besitzen.

Es möge zuvörderst nur eine gemeinsame und sich selbst[1] entsprechende Ecke $(i) = (i')$ existieren. Man wähle diese als eine Koordinatenecke $B(0, 1, 0)$, den Schnittpunkt $(lm), (l'm')$ als eine zweite, $C(0, 0, 1)$. $O(a, b, c)$, $O'(a', b', c')$ seien die Schnittpunkte (Bk), (lm), respektive (Bk'), $(l'm')$.

---

[1] Entspricht die Ecke (i) nicht der mit ihr zusammenfallenden (i'), so liegt wieder der Typus des allgemeinen Falles des § 2 vor.

Die Voraussetzung des § 2 versagt hier, da die dortigen Parameter λ_i, λ_i' jetzt unendlich groß werden. Dagegen haben die Ecken k, l, m, k', l', m' Ausdrücke von der unter (5) angegebenen Form. Soll die v. Staudt'sche Lage eintreten, so daß sich die Geraden (kl), $(k'l')$; (km), $(k'm')$ auf $g = BC$ begegnen, so hat man die beiden voneinander unabhängigen Bedingungen:

$$p_{kl} \equiv \lambda_k \lambda_l' - \lambda_l \lambda_k' = 0, \quad p_{km} \equiv \lambda_k \lambda_m' - \lambda_k' \lambda_m = 0. \tag{46}$$

Sind diese erfüllt, so ist $\frac{\lambda_k}{\lambda_k'} = \frac{\lambda_l}{\lambda_l'} = \frac{\lambda_m}{\lambda_m'}$, d. i. $q_k = q_l = q_m = q$ und die Vierecke besitzen dann wieder ein Perspektivitätszentrum P von der Form (44), das auf der Verbindungsgeraden der beiden zugeordneten Hauptecken O, O' liegt.

Ein zweites Paar entsprechender Hauptecken wird gebildet durch $O_1 = (il)$, (km); $O_1' = (i'l')$, $(k'm')$. Man findet für sie die Koordinaten:

$$\left.\begin{aligned} O_1) \quad & \left[a,\ b - \frac{\lambda_k}{\lambda_m}(\lambda_l - \lambda_m),\ c + \lambda_l\right], \\ O_1') \quad & \left[a',\ b' - \frac{\lambda_k'}{\lambda_m'}(\lambda_l' - \lambda_m'),\ c' + \lambda_l'\right]. \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Auf Grund von (46) gehört P auch der Geraden $(O_1 O_1')$ an und das Nämliche gilt von dem letzten Haupteckenpaar O_2, O_2', das aus (47) durch Vertauschung von λ_l mit λ_m entsteht.

Besitzen beide Vierecke noch ein zweites Paar zusammenfallender und sich entsprechender Ecken, etwa $(m) = (m')$, so tritt nur eine geringe Modifikation ein.

Seien $B = (i) = (i') = (0, 1, 0)$ und $C = (m) = (m') = (0, 0, 1)$ zwei Koordinatenecken und $O(abc)$, $O'(a'b'c')$ die Schnittpunkte (Bk), (Cl) und (Bk'), (Cl'). Die Koordinaten der Ecken (k), (l), (k'), (l') sind wieder von der Form (8) in § 2.

Die v. Staudt'sche Lage, die aussagt, daß sich (kl), $(k'l')$ auf $g = BC$ in einem Punkte P_{kl} treffen, erfordert die einzige Bedingung $p_{kl} = 0$, d. i. $q_k = q_l = q$, und wenn diese erfüllt ist, existiert wieder ein Perspektivitätszentrum P beider Vier-

ecke von der Form (44). Ein erstes Paar zugeordneter Hauptecken besteht aus O, O'; ein zweites fällt in P_{kl}, und für das dritte Paar O_2, O_2' erhält man die Darstellung:

$$O_1) \ (a, b+\lambda_k, c+\lambda_l); \quad O_1') \ (a', b'+\lambda_k', c'+\lambda_l'). \tag{48}$$

Mit Rücksicht auf $p_{kl} = 0$ ist also P der Schnittpunkt von (OO'), $(O_2 O_2')$. Somit ist das Ergebnis:

VIII. »Besitzen beide Vierecke ein einziges Paar zugeordneter, zusammenfallender Ecken, so sind die beiden für das Eintreten der v. Staudt'schen Lage erforderlichen und hinreichenden Bedingungen voneinander unabhängig, und sind zugleich die für die Existenz eines Perspektivitätszentrums P beider Vierecke, das dann mit dem Perspektivitätszentrum beider Hauptdreiecke zusammenfällt. Existiert noch ein zweites Paar zugeordneter, zusammenfallender Ecken, so tritt nur die eine Änderung ein, daß sich die obigen zwei Bedingungen der v. Staudt'schen Lage auf eine einzige reduzieren.«

Der Fall VIII ist insofern bemerkenswert, als bei ihm der v. Staudt'sche Satz seine Eigenart verliert; in der Tat zieht hier das Sichtreffen von fünf Paaren entsprechender Seiten beider Vierecke auf einer und derselben Geraden g die nämliche Eigenschaft des sechsten Paares nicht mehr nach sich.

Die bisher verwendeten Hilfsmittel reichen auch aus, um die Fälle zu diskutieren, wo nicht mehr sämtliche Ecken beider Vierecke reell sind; auf die Aufzählung der einzelnen hiebei auftretenden Möglichkeiten soll indessen verzichtet werden.

§ 5. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die v. Staudt'sche Lage zweier Vierecke.

Das Gesamtergebnis der bisherigen Entwicklungen war, daß stets, wenn sich zwei eigentliche Vierecke einer Ebene in v. Staudt'scher Lage befinden, sie auch ein Perspektivitätszentrum P besitzen, und dieses zugleich ein Perspektivitätszentrum der beiden Hauptdreiecke ist; wird im besondern das

letztere auf einer Geraden unbestimmt, so läuft diese durch P hindurch.

Wir denken uns jetzt umgekehrt die Bedingungen der Perspektivität beider Vierecke bereits erfüllt, so daß die Verbindungsgeraden zugeordneter Ecken (ii'), (kk'), (ll'), (mm') durch einen und denselben Punkt P gehen, und fragen nach einer weiteren[1] notwendigen und hinreichenden Bedingung für das Eintreten der v. Staudt'schen Lage. Das Koordinatendreieck sei vorderhand beliebig.

Sei $P(a,b,c)$ das Perspektivitätszentrum der beiden Vierecke; die Ecken i,k,l,m des ersten Viereckes mögen die Koordinaten a_i, b_i, c_i $(i = i,k,l,m)$ besitzen, dann haben die der zugeordneten Ecken i',k',l',m' des zweiten Viereckes Koordinaten von der Form $a\lambda_i+a_i$, $b\lambda_i+b_i$, $c\lambda_i+c_i$.

Die Koordinaten der Geraden $(P,i) = g_i$, d. s. die Determinanten der Matrix $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_i & b_i & c_i \end{vmatrix}$, nennen wir u_i, v_i, w_i; die Koordinaten der Geraden $g_{ik} = (i,k)$, $g'_{ik} = (i',k')$ seien mit u_{ik}, v_{ik}, w_{ik}, respektive $u'_{ik}, v'_{ik}, w'_{ik}$ bezeichnet, und endlich die ihres Schnittpunktes P_{ik} mit x_{ik}, y_{ik}, z_{ik}.

Die u_{ik}, v_{ik}, w_{ik} sind die Determinanten der Matrix $\begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ a_k & b_k & c_k \end{vmatrix}$, die $u'_{ik}, v'_{ik}, w'_{ik}$ diejenigen der Matrix

$$\begin{vmatrix} a\lambda_i+a_i, & b\lambda_i+b_i, & c\lambda_i+c_i \\ a\lambda_k+a_k, & b\lambda_k+b_k, & c\lambda_k+c_k \end{vmatrix},$$

oder entwickelt:

$$\left.\begin{aligned} u'_{ik} &= u_{ik} + \lambda_i u_k - \lambda_k u_i \\ v'_{ik} &= v_{ik} + \lambda_i v_k - \lambda_k v_i \\ w'_{ik} &= w_{ik} + \lambda_i w_k - \lambda_k w_i. \end{aligned}\right\} \qquad (49)$$

Hieraus erhält man die Koordinaten x_{ik}, y_{ik}, z_{ik} von P_{ik}, z. B. x_{ik}:

$$x_{ik} = \lambda_i \begin{vmatrix} v_{ik} & v_k \\ w_{ik} & w_k \end{vmatrix} - \lambda_k \begin{vmatrix} v_{ik} & v_i \\ w_{ik} & w_i \end{vmatrix}$$

[1] Die in § 4 behandelten Fälle, wo eine weitere solche Bedingung überflüssig ist, bleiben, als erledigt, im folgenden ausgeschlossen.

oder, wenn man sich der Abkürzung bedient:

$$\Delta_{ik} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_i & b_i & c_i \\ a_k & b_k & c_k \end{vmatrix}, \tag{50}$$

nach einfacher Umrechnung:

$$x_{ik} = \Delta_{ik}(\lambda_i a_k - \lambda_k a_i),$$
$$y_{ik} = \Delta_{ik}(\lambda_i b_k - \lambda_k b_i),$$
$$z_{ik} = \Delta_{ik}(\lambda_i c_k - \lambda_k c_i)$$

oder auch, da für eigentliche Vierecke $\Delta_{ik} \neq 0$:[1]

$$x_{ik} = \lambda_i a_k - \lambda_k a_i, \quad y_{ik} = \lambda_i b_k - \lambda_k b_i, \quad z_{ik} = \lambda_i c_k - \lambda_k c_i. \tag{51}$$

Aus (51) ist unmittelbar ersichtlich, daß die Determinante der Koordinaten von P_{ik}, P_{kl}, P_{li} verschwindet, wie es sein muß, da die Dreiecke (i, k, l) und (i', k', l') perspektiv liegen.

Sei p_m die Perspektivitätsachse beider Dreiecke; versteht man unter $(\lambda bc)_m$ die Determinante:

$$(\lambda bc)_m = \begin{vmatrix} \lambda_i & \lambda_k & \lambda_l \\ b_i & b_k & b_l \\ c_i & c_k & c_l \end{vmatrix}, \tag{52}$$

so ergeben sich auf Grund von (51) die Koordinaten U_m, V_m, W_m von p_m als:

$$U_m = (\lambda bc)_m, \quad V_m = (\lambda ca)_m, \quad W_m = (\lambda ab)_m. \tag{53}$$

Bildet man daher die Determinante:

$$\Delta = \Sigma \pm \lambda_i a_k b_l c_m, \tag{54}$$

so sind die Koordinaten U_m, V_m, W_m von p_m proportional den ersten Minoren $\mathfrak{A}_m, \mathfrak{B}_m, \Gamma_m$ der Elemente a_m, b_m, c_m von Δ, so daß die Gleichung von p_m wird:

---

[1] Es kann im besonderen vorkommen, daß ein einzelnes der Δ_{ik}, z. B. Δ_{12}, verschwindet, wenn nämlich die beiden Punktepaare (11'), (22') auf der nämlichen Geraden liegen. Von den übrigen Δ kann dann eventuell auch noch Δ_{34} verschwinden, während die vier verbleibenden Δ wieder von Null verschieden sind. Die Schlußweise des Textes wird dadurch nur unwesentlich modifiziert.

$$p_m \equiv \begin{vmatrix} \lambda_i & \lambda_k & \lambda_l & 0 \\ a_i & a_k & a_l & x \\ b_i & b_k & b_l & y \\ c_i & c_k & c_l & z \end{vmatrix} = 0. \tag{55}$$

Die Bedingungen des Zusammenfallens zweier Geraden p_l, p_m bestehen in dem Verschwinden der Determinanten der Matrix:

$$\begin{vmatrix} \mathrm{A}_l & \mathrm{B}_l & \Gamma_l \\ \mathrm{A}_m & \mathrm{B}_m & \Gamma_m \end{vmatrix} = 0. \tag{56}$$

Nach einem elementaren Determinantensatz ist aber z. B.:

$$\begin{vmatrix} \mathrm{A}_l & \mathrm{B}_l \\ \mathrm{A}_m & \mathrm{B}_m \end{vmatrix} = \Delta \begin{vmatrix} \lambda_i & \lambda_k \\ c_i & c_k \end{vmatrix} = \Delta z_{ik}. \tag{57}$$

Solange also $\Delta(54) \neq 0$, ist der Schnittpunkt der Geraden p_l, p_m der Punkt P_{ik} (51). In der Tat kommt ja bei beiden Dreieckspaaren (ikl), $(i'k'l')$ und (ikm), $(i'k'm')$ der Schnittpunkt (ik), $(i'k') = P_{ik}$ vor.

Verschwindet aber Δ und nur dann, so wird der Schnittpunkt von irgend zweien der vier Dreiecksperspektivitätsachsen p_i unbestimmt, d. h. diese vier Achsen fallen in eine einzige, die Perspektivitätsachse p beider Vierecke, zusammen. In der Tat gilt für $\Delta = 0$:

$$\mathrm{A}_m : \mathrm{B}_m : \Gamma_m = \mathrm{A}_l : \mathrm{B}_l : \Gamma_l = \mathrm{A}_k : \mathrm{B}_k : \Gamma_k = \mathrm{A}_i : \mathrm{B}_i : \Gamma_i \tag{58}$$

und die rechten Seiten (55) von p_m, p_l, p_k, p_i werden einander proportional.

Gibt man dem Koordinatendreieck eine kanonische Lage, so daß die Ecken i, k, l, m die Einheitspunkte werden — also das Koordinatendreieck das Hauptdreieck des ersten Vierecks — nach dem Schema;

$$\begin{matrix} i & k & l & m \end{matrix}$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \tag{59}$$

so nimmt Δ (54) den einfachen Wert an:

$$\Delta = -\lambda_i+\lambda_k+\lambda_l+\lambda_m \tag{60}$$

und für $\Delta=0$ wird die Gleichung der Perspektivitätsachse p:

$$x(\lambda_l+\lambda_m)+y(\lambda_m+\lambda_k)+z(\lambda_k+\lambda_l) = 0. \tag{61}$$

Nunmehr werden die linken Seiten der Bedingungen aufgestellt, daß irgend drei der sechs Punkte P_{ik} auf einer Geraden liegen. Da der Typus (P_{ik}, P_{li}, P_{kl}) schon erledigt ist (die betreffende Bedingung ist identisch erfüllt), so verbleiben noch zwei Typen: (P_{ik}, P_{il}, P_{im}) und (P_{ik}, P_{lm}, P_{li}).

Auf Grund von (51) kommt ohneweiters:

$$(P_{ik}, P_{il}, P_{im}) = \lambda_i^2\Delta; \tag{62a}$$

$$(P_{ik}, P_{lm}, P_{li}) = \lambda_i\lambda_k\Delta. \tag{62b}$$

Mit Rücksicht auf (57) und (62) gilt also der Satz:

IX. »Liegen zwei Vierecke $(iklm)$, $(i'k'l'm')$ einer Ebene perspektiv, so daß die Verbindungsgeraden (ii'), (kk'), (ll'), (mm') zugeordneter Ecken durch einen und denselben Punkt P laufen, so ist für das Eintreten der v. Staudt'schen Lage notwendig und hinreichend, daß entweder irgend zwei der vier Perspektivitätsachsen der Dreieckspaare (ikl), $(i'k'l')$ u. s. f. zusammenfallen oder daß von den sechs Punkten $P_{ik} = (ik), (i'k')$ irgend drei Punkte des Typus P_{ik}, P_{il}, P_{im} oder aber des Typus P_{ik}, P_{lm}, P_{il} auf einer Geraden liegen.

In allen drei Fällen ist dann die betreffende Gerade die Perspektivitätsachse p beider Vierecke.«

Nunmehr schreiten wir zur Bedingung für die perspektive Lage beider Hauptdreiecke.

Behufs Kürzung der Rechnung bedienen wir uns der kanonischen Lage (59) des Koordinatendreieckes, das zugleich das erste, durch O_{ik}, O_{il}, O_{im} bezeichnete Hauptdreieck darstellt. Dann führt einfache Rechnung zu folgenden Tabellen.

A. Koordinaten u_{ik}, v_{ik}, w_{ik} der Geraden $g_{ik} = (ik)$ (mit Weglassung des Faktors 2):

$$\left.\begin{array}{lll} u_{ik}=0,\ v_{ik}=-1,\ w_{ik}=1; & u_{il}=1,\ v_{il}=0,\ w_{il}=-1; & u_{im}=-1,\ v_{im}=1,\ w_{im}=0; \\ u_{lm}=0,\ v_{lm}=1,\ w_{lm}=1; & u_{mk}=1,\ v_{mk}=0,\ w_{mk}=1; & u_{kl}=1,\ v_{kl}=1,\ w_{kl}=0. \end{array}\right\} \quad (A)$$

B. Koordinaten u_i, v_i, w_i der Geraden $g_i = (P, i)$:

$$\left.\begin{array}{llll} u_i=b-c, & u_k=b-c, & u_l=b+c, & u_m=-(b+c) \\ v_i=c-a, & v_k=-(c+a), & v_l=c-a, & v_m=c+a \\ w_i=a-b, & w_k=a+b, & w_l=-(a+b), & w_m=a-b. \end{array}\right\} \quad (B)$$

C. Die Koordinaten der Schnittpunkte $(g_i g_k)$ sind den Koordinaten a, b, c von P proportional. Der jeweilige Proportionalitätsfaktor (bis auf den Zahlenfaktor 2) wird:

$$\left.\begin{array}{cccccc} (ik), & (il), & (im), & (kl), & (mk), & (lm) \\ c-b, & a-c, & b-a, & a+b, & c+a, & b+c. \end{array}\right\} \quad (C)$$

D. Tabellen der Größen $\begin{vmatrix} u_{ik} & u_l \\ v_{ik} & v_l \end{vmatrix}$ etc.:

$$\left.\begin{array}{llll} \begin{vmatrix} u_{ik} & u_l \\ v_{ik} & v_l \end{vmatrix} = b+c, & \begin{vmatrix} u_{ik} & u_m \\ v_{ik} & v_m \end{vmatrix} = -(b+c), & \begin{vmatrix} u_{lm} & u_i \\ v_{lm} & v_i \end{vmatrix} = -(b-c), & \begin{vmatrix} u_{lm} & u_k \\ v_{lm} & v_k \end{vmatrix} = -(b-c) \\ \begin{vmatrix} u_{ik} & u_l \\ w_{ik} & w_l \end{vmatrix} = -(b+c), & \begin{vmatrix} u_{ik} & u_m \\ w_{ik} & w_m \end{vmatrix} = b+c, & \begin{vmatrix} u_{lm} & u_i \\ w_{lm} & w_i \end{vmatrix} = -(b-c), & \begin{vmatrix} u_{lm} & u_k \\ w_{lm} & w_k \end{vmatrix} = -(b-c) \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{llll}
\begin{vmatrix} v_{il} & v_m \\ u_{il} & u_m \end{vmatrix} = -(c+a), & \begin{vmatrix} v_{il} & v_k \\ u_{il} & u_k \end{vmatrix} = c+a, & \begin{vmatrix} v_{mk} & v_i \\ u_{mk} & u_i \end{vmatrix} = -(c-a), & \begin{vmatrix} v_{mk} & v_l \\ u_{mk} & u_l \end{vmatrix} = -(c-a) \\
\begin{vmatrix} v_{il} & v_m \\ w_{il} & w_m \end{vmatrix} = c+a, & \begin{vmatrix} v_{il} & v_k \\ w_{il} & w_k \end{vmatrix} = -(c+a), & \begin{vmatrix} v_{mk} & v_i \\ w_{mk} & w_i \end{vmatrix} = -(c-a), & \begin{vmatrix} v_{mk} & v_l \\ w_{mk} & w_l \end{vmatrix} = -(c-a) \\
\begin{vmatrix} w_{im} & w_k \\ u_{im} & u_k \end{vmatrix} = a+b, & \begin{vmatrix} w_{im} & w_l \\ u_{im} & u_l \end{vmatrix} = -(a+b), & \begin{vmatrix} w_{kl} & w_i \\ u_{kl} & u_l \end{vmatrix} = -(a-b), & \begin{vmatrix} w_{kl} & w_m \\ u_{kl} & u_m \end{vmatrix} = -(a-b) \\
\begin{vmatrix} w_{im} & w_k \\ v_{im} & v_k \end{vmatrix} = -(a+b), & \begin{vmatrix} w_{im} & w_l \\ v_{im} & v_l \end{vmatrix} = a+b, & \begin{vmatrix} w_{kl} & w_i \\ v_{kl} & v_i \end{vmatrix} = -(a-b), & \begin{vmatrix} w_{kl} & w_m \\ v_{kl} & v_m \end{vmatrix} = -(a-b).
\end{array}\right\} \quad (D)$$

Die Ecken des zweiten Hauptdreieckes seien mit $O'_{ik}, O'_{il}, O'_{im}$ bezeichnet, ihre Koordinaten mit $x'_{ik}, y'_{ik}, z'_{ik}$ u. s. f. Berechnet man z. B. z'_{ik} gemäß (49) und *(A), (B), (C), (D),* so ergibt sich (mit Weglassung des Faktors 2):

$$z'_{ik} = -(b+c)(\lambda_l+\lambda_m)+(b-c)(\lambda_i-\lambda_k)-c\{a(\lambda_i-\lambda_k)(\lambda_l+\lambda_m)+b(\lambda_i\lambda_m+\lambda_k\lambda_l)+c(\lambda_i\lambda_l+\lambda_k\lambda_m)\}.$$

Führt man hier den Wert (60) von Δ ein und setzt zur Abkürzung:

$$\left.\begin{aligned}
\mu_k &= 1+\lambda_l(a+c)+\lambda_m(a+b), \\
\mu_l &= 1+\lambda_m(b+a)+\lambda_k(b+c), \\
\mu_m &= 1+\lambda_k(c+b)+\lambda_l(c+a), \\
M &= 2+a(\lambda_l+\lambda_m)+b(\lambda_m+\lambda_k)+c(\lambda_k+\lambda_l), \\
&= 2+\lambda_k(b+c)+\lambda_l(c+a)+\lambda_m(a+b),
\end{aligned}\right\} \quad (63)$$

so daß zwischen den Ausdrücken μ_k, μ_l, μ_m, M die Relation herrscht:

$$2M-(\mu_k+\mu_l+\mu_m)=1, \tag{64}$$

und berücksichtigt, daß durch gleichzeitige Vertauschung von b mit c, λ_l mit λ_m der Wert von z'_{ik} in den von y'_{ik} übergeht u. s. f., so gewinnt man für die bei der vorliegenden Frage allein in Betracht kommenden Koordinaten y'_{ik}, z'_{ik}, z'_{il}, x'_{il}, x'_{im}, y'_{im} der Hauptecken O'_{ik}, O'_{il}, O'_{im} die Werte:

$$\left.\begin{aligned} y'_{ik} &= \Delta(c-b\,\mu_k)+b(\lambda_l+\lambda_m)M \\ z'_{ik} &= \Delta(b-c\,\mu_k)+c(\lambda_l+\lambda_m)M \\ z'_{il} &= \Delta(a-c\,\mu_l)+c(\lambda_m+\lambda_k)M \\ x'_{il} &= \Delta(c-a\,\mu_l)+a(\lambda_m+\lambda_k)M \\ x'_{im} &= \Delta(b-a\,\mu_m)+a(\lambda_k+\lambda_l)M \\ y'_{im} &= \Delta(a-b\,\mu_m)+b(\lambda_k+\lambda_l)M. \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die perspektive Lage beider Hauptdreiecke wird geliefert durch das Verschwinden des Ausdruckes P:

$$P\equiv z'_{ik}\,x'_{il}\,y'_{im}-y'_{ik}\,z'_{il}\,x'_{im}. \tag{66}$$

Dieser Ausdruck ist vom dritten Grade in Δ; wie man jedoch sofort erkennt, verschwindet das freie Glied, so daß der Faktor Δ heraustritt.

Damit ist zunächst von neuem der erste Teil des Satzes II des § 2 bewiesen, daß sich bei der v. Staudt'schen Lage zweier Vierecke einer Ebene auch die beiden Hauptdreiecke in perspektiver Lage befinden.

Weiter erhält man aus je zwei zusammengehörigen der Gleichungen (65) durch Elimination von M:

$$\left.\begin{aligned} cy'_{ik}-bz'_{ik} &= \Delta(b^2-c^2), \\ bx'_{im}-ay'_{im} &= \Delta(a^2-b^2), \\ az'_{il}-cx'_{il} &= \Delta(c^2-a^2). \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

Bei der gewählten Lage des Koordinatendreieckes sind die drei Differenzen b^2-c^2, a^2-b^2, c^2-a^2 von Null verschieden.

Somit folgt aus (67) nicht nur der zweite Teil des Satzes II des § 2, daß bei der v. Staudt'schen Lage zweier Vierecke

deren Perspektivitätszentrum mit dem der beiden Hauptdreiecke zusammenfällt, sondern auch der engere Satz:

X. »Für das Eintreten der v. Staudt'schen Lage zweier Vierecke einer Ebene ist notwendig und hinreichend, daß einmal die Verbindungsgeraden zugeordneter Ecken durch ein Perspektivitätszentrum P laufen, sodann, daß irgend eine einzelne der Verbindungsgeraden zugeordneter Hauptecken durch P geht.«

Schließlich ist der ergänzende Satz für die gemeinsame Perspektivitätsachse der Vierecke und ihrer Hauptdreiecke abzuleiten. Dazu bedarf man noch der jeweiligen dritten Koordinate $x'_{ik}, y'_{il}, z'_{im}$ der Punkte $O'_{ik}, O'_{il}, O'_{im}$. Die Tabelle (D) ist daher noch zu ergänzen durch die Werte (bei denen wiederum der Faktor 2 unterdrückt ist):

$$\left.\begin{array}{llll} \begin{vmatrix} v_{ik} & v_{lm} \\ w_{ik} & w_{lm} \end{vmatrix} = -4, & & & \\ \begin{vmatrix} v_{ik} & v_l \\ w_{ik} & w_l \end{vmatrix} = 2a+b-c, & \begin{vmatrix} v_{ik} & v_m \\ w_{ik} & w_m \end{vmatrix} = -2a+b-c, & (D') \\ \begin{vmatrix} v_{lm} & v_i \\ w_{lm} & w_i \end{vmatrix} = 2a-b-c, & \begin{vmatrix} v_{lm} & v_k \\ w_{lm} & w_k \end{vmatrix} = 2a+b+c. & \end{array}\right\}$$

Auf Grund von (49) und der Tabellen $(A),\ldots(D')$ gewinnt man z. B. für x'_{ik} die Darstellung:

$$-x'_{ik} = 4+2a(\lambda_i-\lambda_k+\lambda_l+\lambda_m)+(b+c)(\lambda_i+\lambda_k-\lambda_l+\lambda_m)$$
$$+a\{a(\lambda_i-\lambda_k)(\lambda_l+\lambda_m)+b(\lambda_i\lambda_m+\lambda_k\lambda_l)+c(\lambda_i\lambda_l+\lambda_k\lambda_m)\}. \quad (68)$$

Hier ist der in geschweiften Klammern eingeschlossene Faktor von a schon oben bei z'_{ik} betrachtet worden; er hat den Wert $\Delta(1-\mu_k)+(\lambda_k+\lambda_m)(M-2)$. Drückt man auch in dem übrig bleibenden Teile der rechten Seite von (68) vermöge (60) λ_i durch Δ und $\lambda_k, \lambda_l, \lambda_m$ aus, so erfährt (68) die Umgestaltung:

$$-x'_{ik} = -\Delta(a+b+c+a\mu_k)+M\{a(\lambda_l+\lambda_m)+2\}. \quad (68')$$

Entsprechendes gilt für die y'_{il}, z'_{im}. Setzt man noch zur Abkürzung:

$$a+b+c = s, \quad \lambda_l+\lambda_m = \nu_k, \quad \lambda_m+\lambda_k = \nu_l, \quad \lambda_k+\lambda_l = \nu_m, \quad (69)$$

so vervollständigt sich die Tabelle (65) zu der folgenden:

$$\left.\begin{array}{lccc} & & x' & y' \\ O'_{ik}) & & -\Delta(s+a\mu_k)+M(a\nu_k+2), & \Delta(c-b\mu_k)+b\nu_k M, \\ O'_{il}) & & \Delta(c-a\mu_l)+a\nu_l M, & -\Delta(s+b\mu_l)+M(b\nu_l+2), \\ O'_{im}) & & \Delta(b-a\mu_m)+a\nu_m M, & \Delta(a-b\mu_m)+b\nu_m M, \\ & & z' & \\ & O'_{ik}) & \Delta(b-c\mu_k)+c\nu_k M & \\ & O'_{il}) & \Delta(a-c\mu_l)+c\nu_l M & \\ & O'_{im}) & -\Delta(s+c\mu_m)+M(c\nu_m+2). & \end{array}\right\} (65')$$

Hieraus entnimmt man sofort die Gleichungen der Hauptgeraden des zweiten Hauptdreieckes. Man hat z. B. für (O'_{il}, O'_{im}):

$$(O'_{il}, O'_{im}): \quad -x(b\nu_l+c\nu_m+2)+ay\nu_l+az\nu_m = 0. \qquad (70)$$

Der Schnittpunkt dieser Hauptgeraden mit der zugeordneten (O_{il}, O_{im}) i. e. $x = 0$ des ersten Hauptdreieckes bestimmt sich somit durch:

$$y = \nu_m, \quad z = -\nu_l. \qquad (71)$$

Dieser Punkt liegt aber auf der Geraden (61), d. i. der Perspektivitätsachse beider Vierecke. Damit ist der Satz III des § 2 von neuem bewiesen und zugleich vervollständigt.

XI. »Im Falle der v. Staudt'schen Lage zweier Vierecke einer Ebene fällt die Perspektivitätsachse der beiden Vierecke mit der der beiden Hauptdreiecke zusammen; es ist indessen bereits hinreichend, daß sich auf der als existierend vorausgesetzten Perspektivitätsachse beider Vierecke irgend ein einzelnes Paar entsprechender Hauptgeraden trifft.«

Im vorstehenden ist mit den einfachsten Hilfsmitteln ein die v. Staudt'sche Lage zweier Vierecke einer Ebene unter Berücksichtigung aller besonderen Fälle beherrschender algebraischer Apparat hergestellt.

Es sei dem Leser überlassen, hieraus weitere Eigenschaften der für den Aufbau der projektiven Geometrie fundamentalen Konfiguration abzuleiten.

Untersuchungen über radioaktive Substanzen.

(X. Mitteilung).

Über die Zerfallskonstante von Radium *D*

von

Dr. **Stefan Meyer** und Dr. **Egon** Ritter v. **Schweidler.**

Aus dem Institut für theoretische Physik und dem II. physikalischen Institut der k. k. Universität in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 2. Mai 1907.)

Über die Zerfallsgeschwindigkeit von Radium *D*, des primären Bestandteiles des Radioblei, liegen bisher nur spärliche Angaben vor. E. Rutherford[1] fand aus dem Vergleiche der β-Strahlung von Ra *C* mit derjenigen von Ra *E* (eigentlich Ra E_2) für die Halbierungskonstante des Ra *D* zirka 40 Jahre, ein Wert, an dem er noch in neuester Zeit[2] keine Änderung angebracht hat. Wir fanden[3] aus dem Vergleiche der α-Strahlung von Ra *C* mit derjenigen von Polonium (Ra *F*) den niedrigeren Wert von zirka 24 Jahren, der bei Berücksichtigung der verschiedenen ionisierenden Wirkung der beiden Strahlenarten noch zu verkleinern gewesen wäre. Da aber die Versuchsbedingungen für diese Bestimmungen nicht gut vergleichbar waren, maßen wir unserer Zahl kein entscheidendes Gewicht bei.

Wir sahen uns jedoch dadurch veranlaßt, der Frage weiter nachzugehen, um unmittelbar nach beiden Methoden (Verhältnis der α-Strahlungen und Verhältnis der β-Strahlungen) direkt vergleichbare Resultate zu erhalten.

---

[1] E. Rutherford, Radioaktivity, 2. Aufl., p. 405 und 409 (1905); Phil. mag. (VI), 8, p. 641 (1904).

[2] E. Rutherford, Phil. mag. (VI), 13, p. 112 (1907).

[3] St. Meyer und E. v. Schweidler, diese Sitzungsberichte, *115*, IIa, 709 (1906).

Theorie der Versuche.

In einem abgeschlossenen Raume, dessen Gehalt an Radiumemanation konstant sei, werde ein Körper durch eine Zeit Δ aufbewahrt, dann aus diesem Raume entfernt und auf seine Aktivität geprüft. Bereits wenige Stunden nach dem Beginne der Expositionszeit befindet sich auf der Oberfläche des Körpers eine Menge von Ra C, die mit C_0 bezeichnet werden soll und die weiterhin bis zum Herausnehmen des Körpers aus dem emanationshaltigen Raume konstant bleibt.

Bezeichnet τ die mittlere Lebensdauer des nächstfolgenden Umwandlungsproduktes, Ra D, so ist inzwischen eine Menge von Ra D gebildet worden, die gegeben ist durch

$$D_\Delta = D_\infty (1 - e^{-\frac{\Delta}{\tau}}) = \text{annähernd } D_\infty \cdot \frac{\Delta}{\tau},$$

wenn Δ klein gegen τ ist. [Die Abweichung des Näherungswertes ist von der Größenordnung $\left(\frac{\Delta}{\tau}\right)^2$]. D_∞ bezeichnet dabei jene Menge von Ra D, die bei unendlich langer Expositionszeit gebildet würde, also mit der Menge C_0 von Radium C im radioaktiven Gleichgewichte steht.

Ist Δ zugleich groß gegen die mittlere Lebensdauer von Ra E (beziehungsweise Ra E_1 und Ra E_2), so kann die Menge dieses Produktes E_Δ, die sich in der Zeit Δ gebildet hat, aufgefaßt werden als mit der Menge D_Δ im Gleichgewicht stehend. Bezeichnet man weiters mit E_∞ jene Menge, die mit D_∞ und daher auch mit C_0 im Gleichgewichte stehen würde, so ist

$$E_\Delta = \frac{\Delta}{\tau} E_\infty.$$

Für Polonium (Ra F) ist infolge seines langsameren Zerfalles eine analoge Annahme nicht mehr zulässig. Zur Zeit Δ ist eine Menge F'_Δ gebildet, die gegeben ist durch die Formel:

$$F'_\Delta = F_\Delta \left(1 - \frac{1 - e^{-\lambda\Delta}}{\lambda\Delta}\right).$$

Hierin ist wieder F_Δ jene Menge, die mit D_Δ im Gleichgewicht stünde; λ die Zerfallskonstante von Polonium (RaF). [Für die Halbierungskonstante des Polonium $HC = 138 \cdot 6$ Tage, die dem gefundenen Mittelwerte sehr nahe liegt,[1] wird λ gerade gleich $5 \cdot 00 . 10^{-3} \frac{1}{\text{Tage}}$]. Man erhält diese Formel, indem man unter Vernachlässigung der kurzlebigen Zwischenphasen RaE_1 und RaE_2, die aus der nahezu linear ansteigenden Menge $D_t = \frac{D_\infty}{\Delta} t$ gebildete Menge F' gleichsetzt:

$$F'_\Delta = \int_0^\Delta a \frac{D_\Delta t}{\Delta} \cdot e^{-\lambda(\Delta - t)} dt$$

und

$$F_\Delta = \frac{a}{\lambda} D_\Delta .$$

Jene Menge, die mit D_∞ und C_0 im Gleichgewicht steht, ist dann $\frac{\tau}{\Delta} F_\Delta = F_\infty$.

Es sind also C_0, D_∞, E_∞ und F_∞ die Mengen der aufeinanderfolgenden Zerfallsprodukte, die im Verhältnisse des radioaktiven Gleichgewichtes stehen würden.

Tatsächlich sind am Ende der Expositionszeit Δ vorhanden die Mengen:

von Radium C . . . . . C_0

» » D . . . . . $D_\Delta = \frac{\Delta}{\tau} D_\infty$

» » E . . . . . $E_\Delta = \frac{\Delta}{\tau} E_\infty$

» » F . . . . . $F'_\Delta = \frac{\Delta}{\tau} F_\infty \left(1 - \frac{1 - e^{-\lambda\Delta}}{\lambda\Delta}\right)$.

Nach Beendigung der Expositionszeit Δ sinkt dann die Menge von RaC ab nach der Curie-Danne'schen Formel,[2] D und

---

[1] Vergl. St. Meyer und E. v. Schweidler, Jahrb. der Radioaktivität und Elektronik, III, 394 (1907).

[2] Vergl. den Anhang.

damit E bleiben praktisch konstant, F steigt infolge Nacherzeugung noch langsam an.

Geht man von der vereinfachten Annahme aus, daß die verschiedenen radioaktiven Substanzen für den Zerfall jedes Atomes bei gleicher Strahlenart (α-, respektive β-Strahlung) die gleiche ionisierende Wirkung hervorbringen, mit anderen Worten, daß die verschiedenen Umwandlungsprodukte im radioaktiven Gleichgewichte die gleiche Strahlungsintensität, J, besitzen, so folgt aus obigen Formeln:

$$J_\beta(C_0) = \frac{\tau}{\Delta} J_\beta(E_\lambda) \quad \text{oder} \quad \tau = \Delta \frac{J_\beta(C_0)}{J_\beta(E_\lambda)}$$

und

$$J_\alpha(C_0) = \frac{\tau}{\Delta} J_\alpha(F_\lambda) \quad \text{oder} \quad \tau = \Delta \frac{J_\alpha(C_0)}{J_\alpha(F_\lambda)}.$$

Berücksichtigt man aber, daß je ein α-, beziehungsweise β-Partikel je nach der Anfangsgeschwindigkeit, die bei den verschiedenen Substanzen verschieden ist, auch eine verschiedene Anzahl von Ionen erzeugt, so gehen die Formeln über in:

$$\tau = \Delta \frac{J_\beta(C) . k(\beta, E)}{J_\beta(E) . k(\beta, C)} = \Delta \frac{J_\alpha(C) . k(\alpha, F)}{J_\alpha(F) . k(\alpha, C)},$$

wobei k die Anzahl der Ionen bezeichnet, die je ein Partikel (α oder β) der betreffenden Substanz im Versuchsraum erzeugt. $\frac{J}{k}$ ist dann die Anzahl der pro Zeiteinheit zerfallenden Atome.

Für die α-Strahlung läßt sich nun diese Korrektur leicht durchführen, wenn man dem Versuchsraum, in dem die ionisierende Wirkung der Strahlen gemessen wird, derartige Dimensionen gibt, daß die α-Strahlen vollkommen in der Luft absorbiert werden. Aus der von Mc Clung[1] angegebenen Kurve für die Ionisierungsstärke der α-Strahlen des Ra C (Range = zirka 7 *cm*) in verschiedener Entfernung von der

[1] Mc Clung, Phil. mag. (VI), 11, p. 131 (1906).

strahlenden Oberfläche und der übereinstimmenden Angabe verschiedener Autoren, daß der Range der Poloniumstrahlen 4 *cm* betrage, berechnet sich auf graphischem Wege das Verhältnis:

$$\frac{k(\alpha, F)}{k(\alpha, C)} = \frac{16 \cdot 0}{26 \cdot 1} = 0 \cdot 613.$$

Der nach der ersten vereinfachten Methode gefundene Wert wird also hier durch die Anwendung der exakteren Formel verkleinert.

Bei der β-Strahlung dagegen ist diese Rechnung praktisch kaum durchführbar. Da nämlich die β-Strahlung im Versuchsraum nur teilweise absorbiert wird, ist k abhängig von den Dimensionen dieses Raumes und bei gegebenen Dimensionen, falls diese nicht sehr groß sind, größer für eine weiche als für eine harte β-Strahlung. Da nun RaE eine relativ sehr weiche, hingegen RaC eine harte β-Strahlung aussendet, wird die exaktere Formel zu einem höheren Werte der mittleren Lebensdauer führen als die vereinfachte erste Formel. Eine genauere Berechnung des Verhältnisses der beiden k scheitert aber daran, daß die β-Strahlung von RaC nicht homogen ist, also keinen definierten Absorptionskoeffizienten besitzt. Ferner ist zu berücksichtigen, daß an der beobachteten ionisierenden Wirkung auch die an den Wänden des Versuchsgefäßes durch die β-Strahlung erzeugten Sekundärstrahlen in einem nicht abschätzbaren Betrage beteiligt sind, endlich daß nach den neueren Untersuchungen die β-Strahlung von RaB nicht vollkommen vernachlässigt werden darf.

Aus diesen Überlegungen ergibt sich von vornherein, daß die auf die Messung der α-Strahlen von RaC und RaF gegründete Berechnung zu verläßlicheren Werten für die mittlere Lebensdauer von RaD führt als diejenige die auf die Messung der β-Strahlen von RaC und RaE_2 gegründet ist.

Versuchsergebnisse.

Im geschlossenen Gefäße, zusammen mit zirka 0·5 *g* Radium-Bariumbromid (schätzungsweise zirka 60% Radium-

bromid, 40% Bariumbromid) wurde ein Platinblech durch eine Expositionszeit $\Delta = 263 \cdot 6$ Tage aufbewahrt.

Nach dem Herausnehmen aus dem Aktivierungsgefäß wurde das Platinblech in drei Stücke I, II, III zerschnitten, und zwar unter Anwendung größtmöglicher Vorsicht, damit hiebei nicht auf mechanischem Wege ein Verlust des an der Oberfläche niedergeschlagenen radioaktiven Belages eintrete. I wurde unbedeckt bezüglich seiner Gesamtstrahlung, III in dreifacher Umhüllung von Stanniol (Gesamtdicke $= 0 \cdot 0318$ *mm* Sn) bezüglich seiner β-Strahlung untersucht; II diente bloß zu Kontrollversuchen; seine Gesamtstrahlung war ungefähr die gleiche wie die von I, seine β-Strahlung ebenso ungefähr gleich der des Stückes III. Aus den beiden Werten folgte, daß bei Versuchsstück I die β-Strahlung gegenüber der Gesamtstrahlung vernachlässigt werden konnte.

Bei der großen Intensität der vorhandenen Strahlung konnte zu ihrer Messung eine galvanometrische Methode angewendet werden; für die hohen Anfangswerte der α-Strahlung bei Stück I wurde direkt der Dauerausschlag des Galvanometers (1 Pars $= 3 \cdot 31 \cdot 10^{-10}$ Ampère) beobachtet bei einer Spannung von zirka 1500 Volt, die nach Kontrollversuchen ausreichte, um Sättigungsstrom zu erzielen. Die kleineren Werte des Stromes für die α-Strahlung von I, nach dem Verschwinden von Ra *C* sowie diejenigen für die β-Strahlung von Stück III wurden nach einer ballistischen Methode bestimmt. Der Strom führte durch eine gemessene Zeit einem Glimmerkondensator von 1 Mikrofarad Kapazität und zu vernachlässigender Leitung und Rückstandsbildung eine Ladung zu, die dann durch das Galvanometer entladen und durch den ballistischen Ausschlag gemessen wurde (ballistisch 1 Pars $= 13 \cdot 9 \cdot 10^{-10}$ Coulomb).

Die unmittelbaren Ergebnisse der Messung waren die folgenden:

1. α-Strahlung von Stück I.

Wird die Zeit t vom Moment der Entnahme aus dem Aktivierungsgefäß gerechnet, so war:

für $t =$	23 Minuten	..... $J =$	227 Partes
	60 »	.....	131
	120 »	.....	40
	>24 Stunden	.....	2·95

Indem man diesen Restwert gleich der Strahlung von F_Δ' setzt und mittels der Curie-Danne'schen Kurve (vergl. die Tabelle des Anhanges) aus den ersten drei Werten den Betrag der Ra C-Strahlung für $t=0$ extrapoliert, erhält man

$C_0 = 253$, beziehungsweise 256 und 264; im Mittel: 257.

Ferner findet man:

$$F_\Delta = F_\Delta' \frac{1}{1-\frac{1-e^{-\lambda\Delta}}{\lambda\Delta}} = \frac{F_\Delta'}{0{\cdot}445} = 6{\cdot}63$$

und daraus nach der ersten vereinfachten Annahme gleicher ionisierender Wirkung der verschiedenen Produkte die mittlere Lebensdauer:

$$\tau = \Delta \frac{C_0}{F_\Delta} = 10270 \text{ Tage} = 28{\cdot}1 \text{ Jahre}$$

und daraus die Halbierungskonstante $\boldsymbol{HC} = \mathbf{19{\cdot}5}$ **Jahre.**

Unter Berücksichtigung der geringeren ionisierenden Wirkung der Polonium(Ra F)strahlung und Einsetzung des oben erwähnten Faktors 0·631 erhält man endlich den verkleinerten Wert

$$\tau = 17{\cdot}2 \text{ Jahre}$$
$$\boldsymbol{HC} = \mathbf{11{\cdot}9} \text{ Jahre.}$$

2. β-Strahlung von Stück III.

Die Intensität der β-Strahlung (in anderen Einheiten wie die der α-Strahlung der vorhergehenden Messungsreihe ausgedrückt) ergab sich:

für $t =$	80 Minuten	..... $J =$ 15·0
für $t >$	24 Stunden	..... $J =$ 0·60.

Daraus bestimmt sich:

$$C_0 = 42 \cdot 7$$
$$E_\lambda = 0 \cdot 60$$

und weiters

$$\tau = 18790 \text{ Tage} = 51 \cdot 5 \text{ Jahre}$$
$$\boldsymbol{HC = 35 \cdot 7 \text{ Jahre.}}$$

Diese Zahl stimmt gut überein mit der nach gleicher Methode erhaltenen E. Rutherford's (zirka 40 Jahre). Die Korrektion für die verschiedene ionisierende Wirkung der RaC- und RaE_2-Strahlung kann, wie oben erwähnt, praktisch nicht durchgeführt werden, hätte aber die Tendenz, den gefundenen Wert zu vergrößern.

Wie sich hieraus ergibt, besteht also eine bedeutende, die Beobachtungsfehler weit übersteigende Differenz zwischen den Werten der mittleren Lebensdauer, beziehungsweise den Halbierungskonstanten von Radium D, die man aus dem Vergleich der α-Strahlungen und die man aus dem der β-Strahlungen erhält.

Auf Grund der oben ausgeführten Überlegungen halten wir die aus der α-Strahlung abgeleiteten Resultate für die zuverlässigeren.

Daß die Methode der Vergleichung der β-Strahlungen zu einem zirka dreimal so großen Werte führt, ist möglicherweise in folgenden Umständen begründet:

Der Rechnung liegt die Voraussetzung zu Grunde, daß RaC ein einheitlicher Körper sei; wenn aber im sogenannten RaC zwei oder mehr β-strahlende, in der Umwandlungsreihe aufeinanderfolgende Zerfallsprodukte vorhanden wären, so müßte auch der gefundene Wert für die mittlere Lebensdauer des RaD sich im Verhältnis zum richtigen Werte verdoppeln, beziehungsweise vervielfachen. Für eine solche Annahme sprechen nun in der Tat auch anderweitige Gründe.

Während im allgemeinen für eine bestimmte radioaktive Substanz Gleichartigkeit der von ihr ausgesandten Strahlen beobachtet wurde, ist die β-Strahlung von RaC komplex und

nach H. W. Schmidt[1] in zwei homogene Strahlengruppen mit bestimmten Absorptionskoeffizienten zerlegbar; dies macht auch eine komplexe Natur der strahlenden Substanz selbst wahrscheinlich. Zu einer analogen Annahme gelangt auch E. Rutherford[2] auf Grund der Beziehungen zwischen der Zerfallsgeschwindigkeit der radioaktiven Stoffe und der Anfangsgeschwindigkeit der von ihnen ausgesendeten α-Partikeln.

Wird also tatsächlich die β-Strahlung von RaE mit der von zwei oder (unter Hinzurechnung der Strahlung von RaB) drei Zerfallsprodukten verglichen, so ist das Auftreten eines Multiplums des richtigen Wertes erklärlich.

Eine Bestätigung unserer Annahme, daß der kleinere Wert für die Halbierungskonstante des RaD der richtige sei, lieferten Beobachtungen über die Änderungen der α-Aktivität alter Präparate, in denen RaF aus RaD nacherzeugt wurde.

Denkt man sich zur Zeit $t = 0$ eine Menge D_0 von RaD abgetrennt, so wird das daraus entwickelte Quantum von RaF als Funktion der Zeit dargestellt durch die Formel:

$$F = \frac{\lambda_D}{\lambda_F - \lambda_D} D_0 \{e^{-\lambda_D t} - e^{-\lambda_F t}\}.$$

F erreicht ein Maximum zur Zeit:

$$t = T = \frac{1}{(\lambda_F - \lambda_D) \log e} \cdot \log \frac{\lambda_F}{\lambda_D}.$$

E. Rutherford[3] berechnet T zu 2·6 Jahren = 949 Tagen unter der Annahme $HC = 40$ Jahre. Setzt man aber $HC = 12$ J, so wird $T = 714$ Tage.

Eine Eisenplatte, die im Jahre 1905 durch einige Wochen in Radiumemanation aktiviert worden war, zeigte folgenden zeitlichen Gang ihrer α-Aktivität:

---

[1] H. W. Schmidt, Ann. d. Phys. (4) *21*, 611 (1906).

[2] E. Rutherford, Phil. Mag. (6), Jänner 1907, p. 116.

[3] E. Rutherford-Aschkinass, Die Radioaktivität, p. 421 (1907).

21. Juni 1905	$J =$	3·75 $\frac{V}{\text{Minuten}}$
27. Juni 1905		4·13
23. Oktober 1905		8·50
7. April 1906		11·58
7. Jänner 1907		12·93
28. April 1907		12·50

Durch Extrapolation berechnet sich der Zeitpunkt, für welchen $J = 0$ ist, zu 40 Tage vor dem Beginne der Messungen gelegen (also 12. Mai 1905). Am 28. April 1907, also 717 Tage später, ist das Maximum bereits überschritten. Mit dem oben aus der Halbierungskonstante von 12 Jahren berechneten Werte $T = 714$ Tage steht dieses Resultat in guter Übereinstimmung.

Eine Bleiplatte, die im Mai 1905 in heißer Lösung von Radiobleichlorid aktiviert worden war,[1] zeigte einen analogen Gang; die zunächst ansteigende α-Aktivität hat bereits ihr Maximum überschritten, so daß wieder $T < 2$ Jahre ist.

Für eine genaue Bestimmung der HC des RaD ist diese Methode der Beobachtung des Maximums des entwickelten RaF nicht sehr geeignet, einerseits, da bei der langsamen zeitlichen Änderung die Lage des Maximums nicht scharf festzustellen ist, andrerseits, weil beträchtliche Variationen des Wertes für HC die Zahl T relativ wenig verändern (für $HC = 10$ Jahre: $T = 680$ Tage; für $HC = 12$ Jahre: $T = 714$ Tage; für $HC = 15$ Jahre: $T = 754$ Tage). Immerhin aber ergeben diese Messungsreihen, daß die Halbierungskonstante des RaD von der Größenordnung 10 bis 12 Jahre ist, und bestätigen so die Richtigkeit der aus der α-Strahlung abgeleiteten Resultate.

Zusammenfassung der Resultate.

Die Halbierungskonstante von RaD läßt sich berechnen, indem man an einem in Radiumemanation aktivierten Körper entweder 1. die auf RaC und auf Polonium (RaF) entfallenden

---

[1] St. Meyer und E. v. Schweidler, diese Sitzungsberichte, *114*, IIa, 1202 (1905).

Beträge der α-Aktivität oder 2. die auf Ra*C* und auf Ra*E* entfallenden Beträge der β-Aktivitäten vergleicht. Die darauf bezüglichen Formeln wurden abgeleitet. Ferner wurde gezeigt, in welcher Weise die verschiedene ionisierende Wirkung der einzelnen Strahlenarten die Resultate beeinflußt. Die daraus sich ergebenden Korrektionen wurden für die α-Strahlung von Ra*C* und Ra*F* numerisch durchgeführt, während für die β-Strahlungen infolge von Komplikationen, die durch Sekundärstrahlen, Inhomogenität der Strahlung des Ra*C* etc. bedingt sind, diese praktisch undurchführbar erscheinen.

An einem durch 263·6 Tage über einem starken Radiumpräparat aktivierten Platinblech wurden durch direkte galvanometrische Bestimmungen der α-, beziehungsweise β-Aktivität folgende Werte für die Halbierungskonstante von Ra*D* gefunden:

1. aus α-Strahlung unkorrigiert 19·5 Jahre, korrigiert 11·9 Jahre;

2. aus β-Strahlung unkorrigiert 35·7 Jahre, korrigiert größer als 35·7 Jahre.

Die Nichtübereinstimmung der nach beiden Methoden erhaltenen Werte ist erklärbar unter der Annahme, daß Ra*C* kein einheitlicher Körper sei, sondern aus zwei aufeinanderfolgenden, β-strahlenden Produkten bestehe und eventuell auch die Strahlung von Ra*B* zu berücksichtigen sei.

Der Wert, der sich nach der ersten Methode ergibt, erscheint demnach als der verläßlichere.

Er findet eine weitere Stütze in Beobachtungen über den zeitlichen Gang der Entwicklung von Ra*F* und Ra*D*. Nach der Theorie würde ein Maximum der Aktivität erreicht nach 949 Tagen für $HC = 40$ Jahre, nach 714 Tagen für $HC = 12$ Jahre. Tatsächlich wurde in zwei Fällen beobachtet, daß das Maximum zu einer Zeit von 700 Tagen schon überschritten ist.

Anhang.

Da die zuerst von P. Curie und J. Danne[1] berechnete Kurve für die Abklingung der induzierten Radiumaktivität vielfach für Reduktionen herangezogen werden muß, mit Rücksicht auf die neueren Konstantenbestimmungen für den Zerfall von Ra A, Ra B und Ra C aber einer Rektifikation bedarf, geben wir im folgenden eine auf Grund der von F. v. Lerch[2] bestimmten Halbierungskonstanten berechnete Tabelle für den zeitlichen Abfall der Aktivität von Ra C nach unendlich langer Expositionszeit in Radiumemanation.

Die Theorie ergibt die Formel:

$$C = C_0 \left\{ e^{-\gamma t} \left[1 - \frac{\alpha\gamma}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)} + \frac{\beta\gamma}{(\alpha-\beta)(\gamma-\alpha)} \right] + \right.$$
$$\left. + e^{-\beta t} \frac{\alpha\gamma}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)} + e^{-\alpha t} \frac{\beta\gamma}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} \right),$$

worin C die Menge des zur Zeit t vorhandenen Ra C, C_0 dieselbe zur Zeit $t=0$; α, β und γ die Zerfallskonstanten von Ra A, Ra B, Ra C sind.

Der Berechnung liegen zu Grunde die Annahmen für die Zerfallskonstanten, respektive die Halbierungskonstanten:

$\alpha = 0{\cdot}2310 \ \frac{1}{\text{Minuten}}$; $HC = 3{\cdot}0$ Minuten für Ra A
$\beta = 0{\cdot}02596$ » ; $HC = 26{\cdot}7$ » » Ra B
$\gamma = 0{\cdot}03555$ » ; $HC = 19{\cdot}5$ » » Ra C.

Daraus ergibt sich:

$$\frac{C}{C_0} = -e^{-\gamma t}.3{\cdot}19935 + e^{-\beta t}.4{\cdot}17632 + e^{-\alpha t}.0{\cdot}023029.$$

Das dritte Glied hat nach 10 Minuten den Wert von 0·00229, nach 20 Minuten 0·00023, nach 30 Minuten 0·00002. ist also praktisch schon nach kurzer Zeit zu vernachlässigen.

---

[1] P. Curie und J. Danne, C. r., *136*, 364 (1903); vergl. auch H. W. Schmidt, Ann. d. Phys. (IV), *21*, 626, 628 (1906).

[2] F. v. Lerch, diese Sitzungsberichte, *115*, IIa, 197 (1906).

Abklingung des Radium *C*.

t Minuten	$\frac{C}{C_0}$	t Minuten	$\frac{C}{C_0}$
0	1·00000	160	0·05477
5	0·99686	170	0·04301
10	0·98156	180	0·03371
15	0·95298		
20	0·91376	190	0·02638
25	0·86701	200	0·02061
30	0·81552	210	0·01608
		220	0·01254
35	0·76152	230	0·00976
40	0·70672	240	0·00758
45	0·65243		
50	0·59958	250	0·00590
55	0·54883	260	0·00458
60	0·50064	270	0·00355
		280	0·00276
70	0·41291	290	0·00214
80	0·33724	300	0·00166
90	0·27327		
100	0·21999	310	0·00129
110	0·17615	320	0·00099
120	0·14039	330	0·00077
		340	0·00060
130	0·11145	350	0·00046
140	0·08819	360	0·00035
150	0·06959		

Änderung des Peltiereffektes Ni-Cu zwischen 20 und 800° C.

von

Karl Rziha.

Aus dem physikalischen Institut der k. k. deutschen Universität in Prag.

(Mit 3 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 25. April 1907.)

Die vorliegende Arbeit hat die Aufgabe, die Abhängigkeit des Peltiereffektes eines Ni-Cu-Elémentes von der Temperatur festzustellen.

Der Verlauf der thermoelektromotorischen Kraft eines solchen Elementes wurde schon zu wiederholten Malen untersucht und es hatte sich gezeigt, daß dieselbe nicht proportional der Temperatur ansteigt. Die thermoelektromotorische Geschwindigkeit ändert sich vielmehr entsprechend den zwei Knickungen der Ni-Linie im Tait'schen Diagramm bei zirka 230 und 360° C. In der vorliegenden Arbeit nun handelt es sich vor allem darum, zu untersuchen, ob auch die Kurve für den Peltiereffekt den Änderungen der thermoelektromotorischen Geschwindigkeit entsprechende Änderungen erfährt.

Die Methode der Untersuchung, bei der es besonders darauf ankam, durch Bestimmung vieler Punkte die thermoelektromotorische Kraft, den Peltiereffekt und die Temperatur möglichst gleichzeitig zu messen, schloß sich im allgemeinen an die seinerzeit von E. Bausenwein[1] bei Bestimmung der Abhängigkeit des Peltiereffektes von Fe-Cu, Fe-Ag und

[1] E. Bausenwein, diese Sitzungsberichte. Bd. 113, Abt. IIa, p. 663. und Bd. 114, Abt. IIa, p. 1625.

Fe-Konstantan angewendete an. Der Verlauf der einzelnen Messungen war folgender:

Das aus 3·8 *mm* starkem Cu-Ni-Draht bestehende, mit Silber gelötete Thermoelement war so in einen mit Wechselstrom geheizten Porzellanofen (OO' in Fig. 1) eingeführt, daß sich die beiden Lötstellen unmittelbar nebeneinander möglichst genau in der Mitte des Ofens bei a und b befanden. Der Peltiereffekt wurde nicht absolut in Calorien gemessen, sondern vermittels des durch ihn in den Lötstellen a und b erzeugten Temperaturanstieges. Zu diesem Zwecke war in die Lötstellen a und b je ein Fe-Konstantanelement aus 0·5 *mm* starkem Drahte (vide Fig. 1) hart eingelötet. Die Schaltung war nun so getroffen, daß zunächst durch Herunterklappen einer Wippe

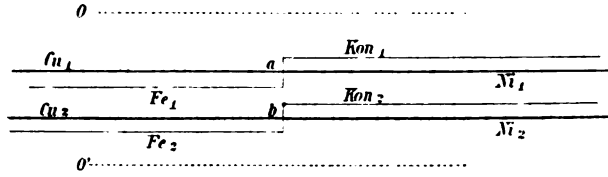


Fig. 1.

aus einer Akkumulatorenbatterie ein Gleichstrom von zirka 8 Ampère (Hauptstrom) durch die beiden Lötstellen $Cu_1 Ni_1$ und $Ni_2 Cu_2$ geschickt werden konnte, und zwar so, daß er in a vom Cu_1 zum Ni_1, in b vom Ni_2 zum Cu_2 floß. Der Peltiereffekt erwärmt dann die eine Lötstelle und kühlt die andere ab. Die Thermoelementchen Fe_1-Kon_1 und Fe_2-Kon_2 waren dabei ausgeschaltet. Durch eine elastische Feder an der Wippe wurde nun der Hauptstrom, nachdem er genau eine halbe Minute gewirkt hatte, unterbrochen, die zwei Elementchen Fe_1-Kon_1—Kon_2-Fe_2 sehr rasch in den Galvanometerkreis eingeschaltet und der durch die Temperaturdifferenz an den beiden Lötstellen hervorgerufene Thermostrom durch den ballistischen Ausschlag des Galvanometers gemessen. Das Galvanometer war ein alter Thermomultiplikator mit objektiver Spiegelablesung. Dieser Versuch wurde gemacht, indem der Hauptstrom einmal in der einen und dann in der entgegengesetzten Richtung floß. In

jedem Falle entspricht der Ausschlag dem doppelten Werte des Peltiereffektes.

Bevor jedoch der Hauptstrom durch die Metallkombination hindurchgeschickt werden konnte, mußte erst die Temperatur an den beiden Lötstellen *a* und *b* ausgeglichen werden. Denn trotzdem sich diese Lötstellen in einer isothermischen Fläche des Ofens befanden, war die Temperatur in *a* und *b* niemals die gleiche. Dies zeigte sich durch einen Ausschlag des Galvanometers, wenn die beiden Lötstellen *a* und *b* ohne vorhergehende Wirkung des Hauptstromes vermittels der Elementchen Fe_1-Kon_1—Kon_2-Fe_2 in den Galvanometerkreis eingeschaltet wurden. Um diesen Übelstand zu beheben, war ein galvanisches

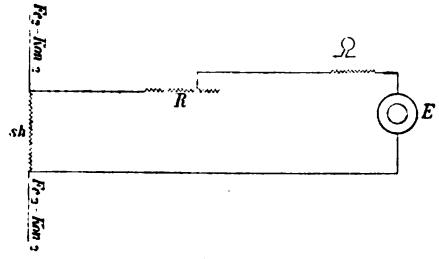


Fig. 2.

Element *E* mittels eines Shuntes *sh* (Fig. 2) in diesen Galvanometerstromkreis eingeschaltet, so daß ein Zweigstrom in entgegengesetzter Richtung durch das Thermoelement hindurchgeschickt werden konnte, der mittels eines Schieberrheostaten *R* so lange reguliert wurde, bis sich die beiden Ströme kompensierten. Erst wenn so das Galvanometer sich in Nullstellung befand, wurde der eigentliche Versuch gemacht.

Zur Messung der thermoelektrischen Kraft Cu-Ni, die nur an der einen Lötstelle *a* gemessen wurde, brauchte bloß ein Quecksilberkontakt umgelegt zu werden. Die im Verhältnis zu der bei der Messung des Peltiereffektes in Frage kommende sehr große thermoelektromotorische Potentialdifferenz machte hier die Vorschaltung eines Widerstandes von 1000 Ω notwendig.

Die Temperatur wurde mittels der thermoelektromotorischen Kraft Fe-Kon gemessen, wozu durch eine einfache

Umschaltung das Fe_1-Kon_1-Element mit der Lötstelle a an den Galvanometerkreis angeschlossen werden konnte. Hier war wegen der größeren Potentialdifferenz von Fe-Kon eine Vorschaltung von 3000 Ω nötig. Außerdem war in diesen Stromkreis ein Siemens-Halske-Präzisionsmikrovoltmeter mittels eines Schlüssels einzuschalten, an welchem die einem bestimmten Ausschlage des Galvanometers entsprechende Thermospannung abgelesen werden konnte. Aus diesen gleichzeitigen Ablesungen wurde der Reduktionsfaktor der Galvanometerausschläge auf 10^{-3} Volt Thermospannung entnommen, was sich als nötig erwies, da das Präzisionsmikrovoltmeter nur eine Teilung bis 18.10^{-3} Volt, die einer Temperatur von zirka 340° C. entspricht, aufwies. Zur Übertragung der Thermospannung von Fe-Kon auf Celsiusgrade wurde eine bereits eingangs erwähnte Arbeit von E. Bausenwein verwendet, deren Ergebnis zeigte, daß die thermoelektromotorische Kraft von Fe-Kon eine lineare Funktion der Temperatur ist und daß der Einfluß verschiedener Eisensorten ganz unerheblich ist. Daher konnte die einer bestimmten Thermospannung entsprechende Temperatur in Celsiusgraden aus der in der Bausenwein'schen Arbeit enthaltenen Tabelle [1] erhalten werden. Übrigens wurden auch zum Schlusse meiner Arbeit mittels desselben Fe-Kon-Elementes und eines in den Ofen eingeführten geeichten Quecksilberthermometers diese Resultate überprüft. Die sich ergebenden Werte stimmten fast genau mit den bereits gefundenen überein, so daß die Verwendung der Bausenwein'schen Tabelle berechtigt erscheint.

Um die Empfindlichkeitsschwankungen des Galvanometers und die Widerstandsänderungen der Leitung eliminieren zu können, wurde zu Beginn und zum Schlusse einer jeden Messung mittels des oben genannten Shuntes ein zweites galvanisches Element mit einem Ballastwiderstand von 845 Ω an das Galvanometer angeschlossen, wobei durch Einlegen einer Brücke die Thermoelemente aus dem Stromkreise abgeblendet wurden, so daß der Zweigstrom des Elementes auf die Galvanometerleitung beschränkt blieb. Diese Kontroll-

[1] E. Bausenwein, l. c. p. 1626.

eichungen lieferten die notwendigen Korrekturen der Galvanometerausschläge auf eine bestimmte Empfindlichkeit, welche sich von Tag zu Tag etwas änderte.

Die Untersuchung lieferte die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Werte.

Fe-Kon 10^{-3} Volt	Temperatur in Celsiusgraden	Cu-Ni, willkürliches Maß	
		T. E. K.	II
0·00	18	0·00	5·80
2·25	75	2·50	6·91
2·80	82	2·70	7·56
3·10	90	3·21	7·58
4·20	106	4·70	8·11
4·57	115	5·36	8·40
5·40	130	6·32	8·68
7·05	160	8·51	9·36
8·32	182	9·71	10·17
9·30	200	11·44	10·20
9·46	204	11·96	10·36
10·47	223	13·57	10·92
10·60	226	13·80	10·72
10·80	230	14·07	10·99
11·70	245	15·15	11·27
12·20	252	16·25	11·34
13·90	268	17·4	10·93
14·50	296	18·15	10·44
15·00	304	18·60	9·95
15·00	304	18·67	10·07
16·00	323	19·50	9·43
16·42	328	19·66	8·65
17·40	348	20 70	8·24
17·95	357	21·81	8·37
19·70	392	23·90	8·97
20·24	402	24·31	9·05

Fe-Kon 10^{-3} Volt	Temperatur in Celsiusgraden	Cu-Ni, willkürliches Maß	
		T. E. K.	II
21·74	428	26·08	9·14
22·26	447	26·86	9·53
24·10	473	28·64	10·21
25·75	490	30·61	11·02
28·41	546	34·24	11·57
30·23	584	35·8	12·05
35·50	650	42·46	13·58
43·34	770	53·02	13·23
44·75	800	55·49	11·43

Die erste Vertikalreihe enthält die Werte der Thermospannung zwischen Fe-Kon in Millivolt. Diese Werte liefern aus der p. 718 zitierten Tabelle die entsprechenden Temperaturen in Celsiusgraden, welche in der zweiten Reihe stehen. Die dritte Kolumne unter T. E. K. enthält die beobachteten Galvanometerausschläge der Thermospannung Cu-Ni bei der entsprechenden Temperatur der einen Lötstelle Ni-Cu, während die zweite Lötstelle Cu-Ni desselben Stromkreises auf Zimmertemperatur (18° C.) gehalten wurde, in Teilstrichen der Skala. Die vierte Kolumne gibt die Werte des Peltiereffektes ebenfalls in Teilstrichen der Skala; die beiden letzten Maße sind also willkürlich.

Die diesen gefundenen Werten entsprechende graphische Darstellung zeigt Fig. 3.

Die Abszissenachse gibt die Temperaturen in Celsiusgraden, die Ordinaten geben die thermoelektromotorische Kraft und den Peltiereffekt in willkürlichen, voneinander unabhängigen Maßen.

Was nun die Thermokurve anlangt, so zeigt sie bei den Temperaturen von zirka 250 und 350° C. die den Umkehrungen der Nickellinie des Tait'schen Diagrammes entsprechenden Knickungen, zwischen diesen beiden Punkten und außerhalb

derselben, verläuft sie vollkommen geradlinig. Eine dritte Knickung wurde nicht beobachtet.

Die Kurve des Peltiereffektes steigt zunächst an bis zu der ersten Knickung der Thermokurve bei zirka 250° C. Dieser Teil der Kurve, nach rückwärts verlängert, schneidet die Abszissenachse entsprechend der Theorie bei —273° C. Von 250° C. an fällt sie dann wieder, und zwar etwas steiler ab bis zur zweiten Knickung der Thermokurve bei zirka 350° C., um dann wieder geradlinig anzusteigen. Die letzten zwei Beobachtungen bei 770 und 800° bedingen zwar noch eine dritte

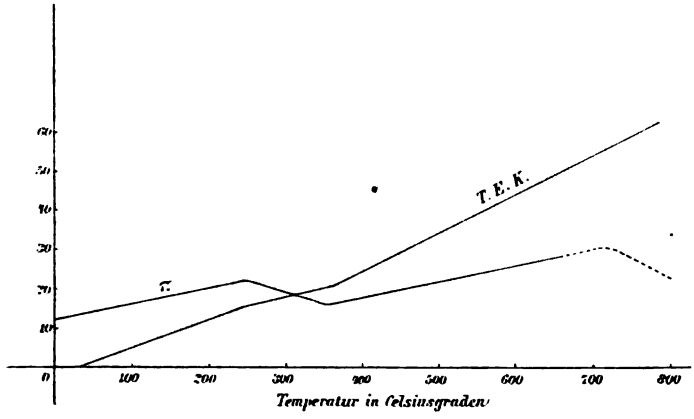


Fig. 3.

Umkehrung, doch scheinen mir diese beiden Punkte sehr unzuverlässig zu sein, da infolge der bereits sehr starken Oxydation der dünnen Fe-Drähte die Leitungsfähigkeit derselben beträchtlich herabgemindert wurde. Übrigens zeigt auch die Thermokurve keine entsprechende Knickung.

Auf große Genauigkeit kann die angewendete Methode zwar keinen Anspruch erheben, da besonders zwei Fehlerquellen nicht berücksichtigt wurden. Es wäre nämlich eine Korrektur für den Wärmeverlust durch Ausstrahlung während der Wirkungszeit des Hauptstromes anzubringen, da dieselbe Korrektur bei verschiedenen Temperaturen vielleicht verschieden ist. Viel wichtiger erscheint aber der durch Änderung der spezifischen Wärme mit der Temperatur verursachte Fehler.

Diese Änderung der spezifischen Wärme von Cu und Ni bis zu so hohen Temperaturen ist noch nicht untersucht. Trotzdem aber eignet sich die angewendete Methode sehr gut dazu, Wendepunkte zu bestimmen und so den allgemeinen Verlauf der Kurven festzustellen.

In diesem Sinne hoffe ich, daß die vorliegenden Beobachtungen als Vorarbeit für spätere absolute Messungen gute Dienste leisten können.

Zum Schlusse sei es mir noch gestattet, Herrn Prof. Dr. Ernst Lecher, auf dessen Anregung hin ich diese Untersuchung vornahm, für seine vielseitigen Ratschläge und die liebenswürdige Überlassung der notwendigen Präzisionsinstrumente meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

Gewitterbeobachtungen und Gewitterhäufigkeit an einigen meteorologischen Beobachtungsstationen der Alpen, insbesondere an Gipfelstationen

von

Albert v. Obermayer,

k. M. k. Akad.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 25. April 1907.)

Im Jahre 1869 hat Wilhelm von Bezold in einer Abhandlung: »Ein Beitrag zur Gewitterkunde«[1] die von den Versicherungsanstalten des Königreiches Bayern 1844 bis 1856 aufgezeichneten Blitzschäden nach halbmonatlichen Perioden geordnet und dabei im Sommer zwei Maxima der Gewitterhäufigkeit aufgefunden, von dem das eine auf die erste Hälfte des Monats Juni, das zweite, und zwar das absolute, auf die zweite Hälfte des Monats Juli fällt. Dieses Resultat fand er in der 52 Jahre umfassenden Gewitterbeobachtungsreihe am Hohenpeissenberge bestätigt. W. v. Bezold weist bei dieser Gelegenheit auch darauf hin, daß die halbmonatlichen Temperaturmittel gleichfalls zwei Maxima zu jenen Zeiten aufweisen.

In einer späteren Abhandlung: »Das doppelte Maximum in der Häufigkeit der Gewitter während der Sommermonate«[2] wird dieses Resultat bestätigt.

---

[1] Pogg. Ann. der Phys. und Chem., Bd. 136, p. 513.

[2] Sitzungsber. der kgl. bayr. Akad. der Wissenschaften, mathem.-physik. Klasse, Juli 1875.

In einer Abhandlung: »Die Gewitterperioden in Wien«[1] hat Dr. J. Hann gezeigt, daß auch in Wien jene doppelte Periode der Gewitterhäufigkeit Geltung besitzt und daß sich eine solche Doppelperiode auch in den Hagelfällen ausspricht, wie Prettner für Kärnten und Fournet für das Rhônetal[2] nachgewiesen haben. Hann sagt dortselbst: »Da diese Gewitterperioden unstreitig mit den Störungen im jährlichen Wärmegange, namentlich mit den großen Kälterückfällen in der zweiten Junihälfte zusammenhängen, wäre eine eingehende Untersuchung derselben an vielen Orten Europas von Interesse. In der Gewitterfrequenz scheinen sich die Wärmerückgänge, wie die Unterbrechungen der Regenperioden deutlicher abzuspiegeln, wie in den Mittelwerten der meteorologischen Elemente selbst«.

Bei einer Zusammenstellung der Gewitterbeobachtungen auf dem Hohen Sonnblick nach Drittelmonaten, d. i. nach der in den meteorologischen Jahrbüchern gebräuchlichen Einteilung, anschließend an die im internationalen meteorologischen Kodex empfohlene Beibehaltung des bürgerlichen Monats, haben sich zwei solche Maxima sehr deutlich ergeben, und zwar eines für das erste Drittel des Monats Juni, ein zweites für das dritte Drittel des Monats Juli. Das zwischenliegende Minimum fiel ausgesprochen während des in Betracht gezogenen Zeitabschnittes 1888—1906 auf das zweite Drittel des Monats Juni, in welchem im jährlichen Gange der Temperatur nach Pentadenmitteln[3] ein Rückgang der Temperaturmittel bis zu 1·5° C. gegen den Anfang Juni stattfindet. Wie nicht anders zu erwarten, wurde ein gleiches Resultat auch für die Gewitterhäufigkeit der Fußstation des Sonnblick im Lehnerhäusl in Bucheben gefunden.

Ich habe hienach auch die Gewitterbeobachtungen der anderen österreichischen Gipfelstationen, d. s. Schmittenhöhe (1935 *m*) bei Zell am See, Schafberg (1776 *m*) bei St. Wolfgang und Hochobir (2044 *m*) in Kärnten, und als deren Fußstationen

---

[1] Meteorolog. Zeitschr., Bd. XXI, 1886, p. 237.

[2] Meteorolog. Zeitschr., Bd. VIII, 1875, p. 161 und 172.

[3] XV. Jahresbericht des Sonnblick-Vereines, p. 34, 1906.

Kremsmünster (389 *m*) und Klagenfurt (448 *m*), dann die langjährige Beobachtungsreihe auf dem Hohenpeissenberg in Bayern und zum Vergleiche jene von München, in der gleichen Weise geordnet, und für den Zeitschnitt seit 1856 gefunden, daß jenes sekundäre Minimum der Gewitterhäufigkeit durchwegs im zweiten Drittel des Monats Juni eintritt, nur Klagenfurt zeigt dasselbe im ersten Drittel dieses Monats.

Wie aus der graphischen Darstellung der Gewitterhäufigkeit in Fig. 1 und 2 entnommen werden kann, weisen diese den jährlichen Gang der Gewitterhäufigkeit darstellenden Kurven während der Sommermonate drei Maxima auf, oder sie zeigen wenigstens an Stelle des dritten Maximums einen verzögerten Abfall. Die Lage des ersten Maximums fällt in allen in Betracht gezogenen Stationen auf das erste Drittel des Monats Juni, nur in Klagenfurt tritt es schwach ausgesprochen im dritten Drittel des Monats Mai ein. Auf dem Hohenpeissenberg wird dasselbe zum Hauptmaximum und in München hat es denselben Betrag wie das spätere Maximum im Juli. Das erste Minimum im zweiten Drittel des Juni ist allen Stationen gemeinschaftlich, nur in Klagenfurt tritt es bereits im ersten Drittel dieses Monats ein.

Der Obir und der Hohenpeissenberg zeigen das zweite Sommermaximum im dritten Drittel des Juni, bei allen anderen Stationen fällt es als Hauptmaximum in den Juli.

Sonnblick, Bucheben und Schmittenhöhe zeigen einen sehr ähnlichen Verlauf der jährlichen Gewitterhäufigkeit, ebenso verhalten sich Schafberg und Kremsmünster, Hohenpeissenberg und München ähnlich, Obir und Klagenfurt scheinen aber merklich voneinander abzuweichen.

In Fig. 2 sind aus der Beobachtungsreihe 1857—1904 von Kremsmünster zehnjährige Mittel des jährlichen Ganges der Gewitterhäufigkeit gebildet. So verschieden die so erhaltenen fünf Kurven sind, so zeigen sie alle im zweiten Drittel des Juni eine mehr oder minder ausgesprochene Einsenkung. Das erste Maximum hält sich bis 1895 im ersten Drittel des Juni, in dem Zeitabschnitt 1896—1904 rückt es auf den Mai zurück. Das in den Juli fallende Hauptmaximum aller fünf Zeitabschnitte scheint vom dritten Drittel des Juli auf das erste zurück-

gewichen und dann wieder auf das dritte Drittel vorgerückt zu sein. Das darauffolgende sekundäre Maximum ist bald mehr,

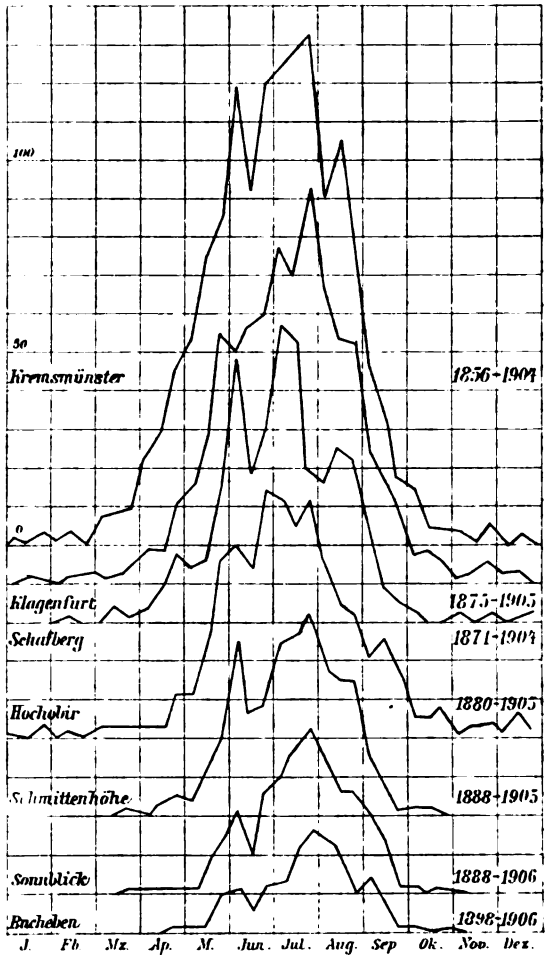


Fig. 1.

bald weniger ausgebildet. Zum Vergleich ist in Fig. 2 die der ganzen Periode 1857—1904 entsprechende Häufigkeitskurve oberhalb angefügt. Auch sind in Fig. 2 Hohenpeissenberg und München aufgenommen.

Die Schwierigkeiten, welche der Erlangung einwurfsfreier Gewitterbeobachtungen entgegenstehen, sind von J. Hann[1] und von W. v. Bezold[2] erörtert, von letzterem die Unzuverlässigkeit vieler Angaben betont und die diesbezüglichen Mängel einzelner Beobachtungsreihen nachgewiesen worden.

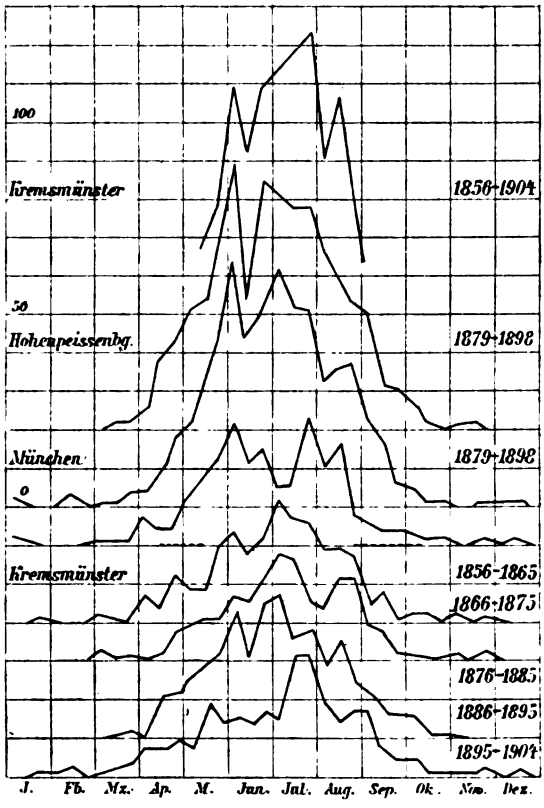


Fig. 2.

Aus diesem Grunde ist es auch schwer, mit Sicherheit festzustellen, ob die Zahl der Gewittertage im Laufe der Zeit zugenommen hat oder nicht.

[1] Über die Gewitterperioden in Wien. Meteorolog. Zeitschr. 1886, p. 337.

[2] Über die gesetzmäßigen Schwankungen in der Häufigkeit der Gewitter während längerer Zeiträume. Sitzungsber. der Münchener Akad. der Wissensch., mathem.-physik. Klasse, Juni 1874, p. 284 bis 322. Ges. Abhandlungen p. 35.

In den beiden, sich bezüglich der Gewitter ähnlich verhaltenden Stationen Hohenpeissenberg und Kremsmünster betragen, aus verschiedenen Zeitabschnitten gerechnet, die mittleren Zahlen der Gewittertage im Jahre:

		Gewittertage
Kremsmünster	1763—1799....	18·0
	1802—1850....	27·3
	1856—1904....	30·0
Hohenpeissenberg	1795—1810....	36·0[1]
	1795—1850....	25·0
	1879—1898....	35·0

Es ist kaum anzunehmen, daß Hohenpeissenberg durch einen Zeitabschnitt doppelt so viele Gewittertage hatte als Kremsmünster. Die Art, in welcher die Gewittertage gezählt werden, spielt hiebei sicher eine große Rolle. Bezold hielt für den richtigsten Maßstab zur Beurteilung, ob ein Tag als Gewittertag zu zählen ist, den Beschluß des Wiener Meteorologenkongresses, wonach dafür entscheidend sei, ob Donner gehört wurde. Nach dem internationalen meteorologischen Kodex (G. Hellmann und H. H. Hildebrandson) soll als Gewittertag nur ein solcher bezeichnet werden, an welchem Blitz und Donner beobachtet worden, Blitze ohne Donner sollen als Wetterleuchten eingetragen werden, allerdings wird unter 4, p. 18, auch empfohlen, nach Möglichkeit die Zahl der Tage für jeden der Fälle, daß Donner gehört, Blitze wahrgenommen, Blitz und Donner beobachtet wurden, gesondert anzuzeigen. Auf Hochgipfeln, welche zu Gewitterzeiten in Nebel gehüllt sind, mag es wohl vorkommen, daß von einem entfernten Gewitter der Donner gehört, aber der Blitz nicht wahrgenommen wird.

In den zur vorliegenden Untersuchung benützten Gewitterbeobachtungsreihen dürften solche wechselnde Anschauungen über die Bezeichnung als Gewittertage auch zur Geltung gelangt sein; indessen scheint der Einfluß dieser Ungleichmäßig-

[1] Ohne 1799.

keiten bezüglich der Darstellung des jährlichen Ganges der Gewitterhäufigkeit von keiner wesentlichen Bedeutung zu sein, wofür die Gleichartigkeit des Verlaufes der Häufigkeitskurven für die verschiedenen Beobachtungsorte spricht.

Begegnet die einwurfsfreie Feststellung der Zahl der Gewittertage bereits an den meteorologischen Observatorien gewissen Schwierigkeiten, so ist dies in noch ausgesprochenerem Maße auf den Gipfelstationen der Fall. Gewöhnlich sind dort wissenschaftlich ungeschulte Beobachter, zu Zeiten das Dienstpersonal des Hotelbesitzers mit solchen Beobachtungen betraut, oder die Beobachter selbst durch die Bewirtschaftung der mit dem Observatorium verbundenen Schutzhütte während der Sommermonate in Anspruch genommen. Die häufigen Wechsel der Beobachter sind einer gleichförmigen Aufzeichnung sehr im Wege, auch sind die Beobachter mitunter nicht sehr schreibgewandt, so daß es recht beschwerlich fällt, die Aufzeichnungen zu entziffern. Die besten derlei Beobachtungen sind übrigens seit dem Jahre 1881 auf dem Hochobir gesammelt worden.

Der nachfolgenden Untersuchung sind, wo es möglich ist, die Gewittertage zu Grunde gelegt und bei den einzelnen Beobachtungsstationen ist darauf hingewiesen, auf welchem Wege die angeführten Zahlen gewonnen sind. Von den besonderen Bemerkungen, welche in den Beobachtungsbögen angefügt sind, habe ich diejenigen, die mir besonders beachtenswert scheinen, hier aufgenommen.

Auf dem Hohen Sonnblick begannen regelmäßige Aufzeichnungen von Gewittern mit dem Jahre 1888 durch den Beobachter Peter Lechner und wurden von ihm bis zum Jahre 1894 fortgeführt. In der Zeit vom 20. Juli 1890 bis zum 30. Juni 1902, dann vom Februar 1893 bis zum Mai 1894 stellte er über Anregung der Herren Elster und Geitel Beobachtungen über Elmsfeuer an,[1] welche in diesen Sitzungsberichten veröffentlicht wurden. Allerdings führte er zu diesem Zweck ein eigenes

---

[1] Elster Julius und Geitel Hans, Elmsfeuerbeobachtungen auf dem Hohen Sonnblick. Diese Sitzungsber., Bd. CI, Abt. IIa, p. 1485 bis 1504. — Elektrische Beobachtungen auf dem Sonnblick. Diese Sitzungsber., Bd. CIV, Abt. IIa, p. 37 bis 45.

Protokoll und es sind nicht alle von ihm beobachteten Elmsfeuer in die Beobachtungsbögen der k. k. Zentralanstalt eingetragen. Peter Lechner machte hiebei auch die Wahrnehmung, daß nach blauen Blitzen negatives Elmsfeuer, nach rötlichen Blitzen positives Elmsfeuer auftritt, eine Erscheinung, welche Elster und Geitel während ihres Aufenthaltes auf dem Sonnblick bestätigt fanden und der sie besondere Aufmerksamkeit widmeten.[1]

In den Beobachtungsbögen finden sich im Jahre 1889 Bemerkungen, wie:

2. August 1889 Gewitter von 5 bis 9^h p., Hagel, rote und bläuliche Blitze, positives und negatives Elmsfeuer bis 1^h a.,

oder:

1. September Gewitter von 6 bis 7^h p. mit lichtroten Blitzen, Regen. Gewitter von 7 bis 9^h p. mit bläulichen Blitzen, Schnee, von 10^h p. bis Mitternacht negatives Elmsfeuer.

Dagegen heißt es im Jahre 1890:

Am 22. Juni Gewitter von 10^h p. bis 4^h a. bei positivem und negativem Elmsfeuer; nach den roten Blitzen kommt positives, nach den bläulichen negatives Elmsfeuer.

Vom Jahre 1894 an wurden die Gewitterbeobachtungen von den späteren Beobachtern und deren Gehilfen fortgesetzt und wenn nach den sonstigen besonderen Aufzeichnungen geschlossen werden soll, mit keiner besonderen Sorgfalt. Insbesondere fällt in Tabelle III auf, daß in den Jahren 1899 bis 1902 auf dem Sonnblick merklich weniger Gewitter aufgezeichnet sind, als in der Fußstation, im Lehnerhäusl, in Bucheben (1200 *m*), die etwa 7500 *m* vom Sonnblick entfernt ist. Die Bedeckung des Gipfels mit Nebel dürfte wohl dazu beitragen, daß entfernte Gewitter übersehen werden, dagegen

[1] Diese Sitzungsber., Bd. XCIX, p. 1025, und Bd. CI, p. 1501, Tab. II.

genießt der Sonnblick den Ausblick nach Süden, welcher für Bucheben durch den Tauernkamm völlig abgeschnitten ist. Die in dem Zeitraume von 1888 bis 1906 gewonnene Zahl von 314 Gewittertagen ist zur Berechnung der mittleren Zahl der Gewitter im Jahre, um die 8 Gewittertage des Jahres 1896, für welches die Junibeobachtungen fehlen, zu vermindern. Es ergeben sich dann 17 Gewittertage auf das Jahr. Aus den oben angeführten Gründen schätze ich diese Zahl für zu niedrig, wofür der Umstand spricht, daß Bucheben 21 Gewittertage im Jahre im Mittel aufweist und daß in den Beobachtungsbögen der beiden Stationen die Tage, an denen Gewitter verzeichnet sind, nicht völlig übereinstimmen.

Während der von Prof. Karl Prohaska in der meteorologischen Zeitschrift beschriebenen Wetterstürze in den Alpen am 12. und 13. Juli 1890, am 3. und 7. August 1890, am 25. und 26. August 1890, am 21. und 22. August 1892, am 4. September 1894, am 5. und 7. August 1896, am 9. August 1898, am 21. und 28. Mai 1904, am 3. Juli 1906 sind auch auf dem Sonnblick mehr oder weniger heftige Gewittererscheinungen beobachtet worden.

Das Zittelhaus auf dem Sonnblick ist so ziemlich blitzsicher. Solche Blitzschläge in das Haus, wie dieselben im folgenden bezüglich des Obir und des Schafberges angeführt werden, oder wie dieselben auf dem verhältnismäßig gewitterarmen Ben Nevis in Schottland (etwa 7 Gewitter im Mittel im Jahre) vorkommen, sind auf dem Sonnblick nicht verzeichnet worden. Es ist dies wohl der dortselbst angewendeten Blitzsicherung zuzuschreiben. Dieselbe ist zum Teil nach dem Melsens'schen System angeordnet. Es sind Drahtlitzen unterhalb des Dachrandes um das ganze Haus geführt und ebensolche Litzen rund um das Haus herum eingegraben worden. Diese beiden Litzen sind durch Drähte mehrfach untereinander und an den geeigneten Stellen mit den drei Auffangstangen der Blitzableiteranlage, dann mit den Eisenstangen verbunden, mit welchen das Holzhaus gegen den Untergrund niedergezogen ist. Die Erdleitung führt über den Gletschersattel zwischen dem Goldberggletscher und dem Kleinen Fleißkers zum Goldbergspitz und von dort zum Pilatussee; sie ist

ungefähr 2250 *m* lang und dient auch zur Erdung des Telephons, welches durch zwei hintereinander geschaltete Blitzplatten gesichert, aber doch vorsichtshalber ausgeschaltet wird, so oft zwischen den Zacken der Blitzplatte schnalzende Funken überzugehen beginnen.

Seitenentladungen in das Haus sind wohl selten beobachtet worden, dagegen kommen solche außerhalb des Hauses, in der Nähe der erwähnten Eisenstangen vor. So ist im Sommer 1906 der auf dem Sonnblick zu Triangulierungszwecken beschäftigt gewesene Hauptmann Julius Gregor des k. u. k. Militärgeographischen Instituts von einer solchen Seitenentladung getroffen worden, ohne indes Schaden zu nehmen.

Die Blitzschläge, welche das Haus treffen, schmelzen häufig die außerhalb desselben befindlichen Kupferdrähte, welche zur Telephonleitung führen und beschädigen auch diese, so daß die telephonische Verbindung gestört ist. Solche Blitzschläge sind aufgezeichnet am 20. Mai 1888, am 25. Juni 1888, am 21. August 1890, am 4. Juli 1891, am 4. und 5. September 1891; am 30. Juni 1892, auch mit Beschädigung der Luftleitung vom Sonnblick herab und Beschädigungen des Telephons in Kolm-Saigurn und im Badehause verbunden; am 21. August 1892 mit etwa 20 Blitzschlägen in die Leitung, durch welche die überflüssigen (noch immer empfohlenen) Platinspitzen der Blitzableiter abgeschmolzen wurden (Meteorolog. Zeitschr., 1892, p. 23); am 9. Juli 1893, am 4. August 1894, am 19. Juli 1898. Ferner sind angeführt am 26. Juni 1904 6 bis 8, am 9. August 1896 6, am 5. September 1906 9 Blitzschläge in die Leitung.

Über das Jahr verteilen sich die aufgezeichneten 23 Fälle von Blitzschlägen in das Haus, deren Zahl sicher zu gering ist, in folgender Weise:

Mai	1
Juni	5
Juli	8
August	6
September ..	3

Der jährliche Gang der Gewitterhäufigkeit ist in Tabelle I und Fig. 1 ersichtlich gemacht. Die Ermittlung des täglichen

Ganges ist mit einer gewissen Unsicherheit behaftet, da in den Beobachtungsbögen die Bezeichnungen: »Den ganzen Tag Gewitter«, »Nachmittags Gewitter« u. dgl. vorkommen. Derselbe ist in Tabelle II mitgeteilt.

Im Lehnerhäusl in Bucheben (1200 *m*) wurden die Gewitterbeobachtungen im Jahre 1898 durch Peter Lechner begonnen und bis zu seinem Tode, im Jänner 1901, fortgeführt. Seither beobachtet sein Ziehsohn Makarius Janschütz und liefert auch in anderer Beziehung recht brauchbare Aufzeichnungen. Der jährliche und der tägliche Gang der Gewitterhäufigkeit ist aus den Tabellen I und II zu entnehmen. Die in der Zeit von 9 Jahren verzeichneten 190 Gewittertage geben im Mittel 21 Gewittertage im Jahre.

Auf der Schmittenhöhe (1935 *m*) bei Zell am See wurden die meteorologischen Beobachtungen im Jahre 1880 durch den Gasthofbesitzer Albert Hubinger begonnen und bis 1894 fortgeführt. Von diesem Jahre an beobachtete Karl Haschke. Bis zum Jahre 1888 scheinen die Gewitteraufzeichnungen nicht in gleichmäßiger Weise geführt zu sein, sie fehlen überdies für drei Jahre. In den 18 in Betracht kommenden Jahren, von 1888 bis 1905, wurden 424 Gewittertage angegeben, woraus im Mittel 23 bis 24 Gewittertage im Jahre folgen. Da die Eintrittszeiten der Gewitter nur in einzelnen Fällen mitgeteilt sind, ließ sich der tägliche Gang der Gewitterhäufigkeit nicht ermitteln.

Die meteorologischen Beobachtungen auf dem Schafberg bei St. Wolfgang (1776 *m*) wurden am 7. September 1870 von Wolfgang Grömer, Gasthofbesitzer in St. Wolfgang und Eigentümer des Hotels auf dem Schafberg, begonnen, während seiner Anwesenheit auf dem Gipfel in den Sommermonaten durch ihn selbst, in den Herbst-, Winter- und Frühjahrsmonaten aber durch seine Bediensteten fortgeführt. Bei der isolierten Lage des Schafberges und dem vollständigen Mangel an Wasser bis tief unterhalb des Gipfels konnte für das Haus nur ein ganz ungenügender Blitzschutz erzielt werden, so daß vielfache Entladungen in das Haus selbst stattfanden, welche von Grömer zunächst kurz beschrieben wurden. Seine Aufzeichnungen über die Zahl der Gewitter und über die Zeit ihres Eintritts scheinen sehr vollständig zu sein. Nicht das gleiche läßt sich von den

bezüglichen Aufzeichnungen seiner oft gewechselten Gehilfen behaupten. Es fehlen aus den Jahren 1872, 1873, 1874, 1875, 1877, 1879, 1887 und 1892 die Beobachtungsbögen für einzelne Monate, von 1893 an aber für mehrere Monate im Jahre. Von 1900 bis 1902 liegen überhaupt keine Gewitterbeobachtungen vor, erst im Jahre 1903 beginnen dieselben wieder. Nach dem Bau eines neuen Hotels auf dem Gipfel des Schafberges begann Franz Humer im Jahre 1894 zu beobachten. Mit dem Jahre 1904 schließen diese Beobachtungen, das Hotel brannte 1906 ab.

In dem Zeitraume von 1871 bis 1904, d. i. von 34 Jahren, finden sich 18 Jahre, für welche die Gewitterbeobachtungen als brauchbar angesehen werden können und darunter sind 1874 mit 7 und 1882 mit 5 Gewittertagen zweifelhaft. Aus diesen 18 Jahren kann auf eine Zahl von 19 Gewittertagen im Jahre geschlossen werden.

Auch diese Zahl glaube ich für zu niedrig halten zu sollen. Trotz der Lückenhaftigkeit dieser Beobachtungen ergeben dieselben den jährlichen und täglichen Gang der Gewitterhäufigkeit einigermaßen befriedigend.

In der Tabelle I sind die aus der Beobachtung folgenden Zahlen in den Monatsdritteln eingetragen und dann die durch ein sehr einfaches Verfahren auf 34 Jahre umgerechneten Zahlen. Es ändert dies am jährlichen Gange nichts wesentliches, nur die Zahl der Gewittertage vermehrt sich. Der jährliche Gang der Gewitterhäufigkeit ist in Fig. 1 mit Hilfe der korrigierten Zahlen dargestellt worden.

Die in den Beobachtungsbögen angegebenen 103 Blitzschläge in das Haus oder in dessen Nachbarschaft verteilen sich wie folgt über das Jahr:

März	1
April	7
Mai	19
Juni	29
Juli	31
August	9
September	6
Oktober	1

Aus den sehr ausführlichen besonderen Bemerkungen Grömer's seien die folgenden herausgehoben:

Bemerkenswerte Blitzschläge und Gewitter.

5. Jänner 1873: Blitzschlag in das Haus, einen Mann am Auge beschädigt, das Gold der Etiketten der Vöslauerflaschen in das Glas eingebrannt.
6. September 1876: Intensiv blaue Blitze.
6. Juli 1877: Dunkelblaue Blitze.
10. September 1880: Blaue Farbe der Blitze.
4. Juni 1882: Farbe der Blitze tiefviolett.
22. Juli 1887: Blaue Blitze (in Bayern Gewitter).
14. Juni 1889: 200 Schritte vom Hotel eingeschlagen, die Erde gebrannt.
12. Juli 1889: 1^h a. blaue Blitze.
28. August 1889: Die Telegraphenglocken läuten von selbst.
3. September 1889: $12^h\ 30^m$ p. sind im Gebäude von der Telegraphenleitung starke Funken am Boden übersprungen. Die Apparate in St. Wolfgang wurden durch den gleichen Blitzschlag beschädigt, die Leitung unterbrochen.
23. Juni 1890: Schlägt ein schwacher Blitzstrahl ein, der Knall wie der einer starken Kapsel.
25. August 1890: Von Mittag an mehrere Gewitter. Wettersturz vom 25. und 26. August 1890 in den Ostalpen.[1]
22. Mai 1895: Der Blitz schlägt zuerst auf der höchsten Spitze der Wand in das Gebäude und geht von da ins Haus, durch zwei Mauern zum Blitzableiter.
8. August 1898: Nachmittags Gewitter, Südweststurm, 8, nachts starker variabler Wind.
9. August 1898: Nachmittags zeitweise Donner bei Nebel und Regen, die auch den 10. anhielten (Gewitter und Hagel in den Ostalpen).[2]
21. November 1903:[3] Den ganzen Tag Sturm und Schneegestöber, die ganze Nacht Sturm, 9, von $12^h\ 15^m$ p. bis

[1] Meteorolog. Zeitschr., 1892, p. 161.

[2] Prohaska Karl, Meteorolog. Zeitschr., 1899, p. 224.

[3] Prohaska Karl, Gewitter und Stürme in der Nacht vom 21. zum 22. November 1903. Meteorolog. Zeitschr., 1903, p. 573.

$12^h\ 25^m$ p. öfter Gewitter mit Hagel, um 1^h p. abermals Gewitter. Zuerst fiel abends das Barometer sehr rasch, die Temperatur wird viel höher, in der Frühe wieder tiefer. Barometer am 20., 9^h p.: 615·5 *mm*, am 21., 9^h p.: 609·0 *mm*, am 22., 7^h a.: 613·0 *mm*; Temperatur am 21., 7^h a.: —6° C., am 21., 9^h p.: —3° C., am 22., 7^h a.: —8° C. In Deutschland und Westösterreich herrschten heftige Stürme und Gewitter mit zündenden Blitzen.

Kugelblitzähnliche Erscheinungen.

9. September 1872: Sprang ein elektrischer Funken im Gebäude in der Flur von der Mauer in den Boden über. Derselbe war von der Größe einer Haselnuß, der Knall wie jener einer großen Kapsel, bei 35 *cm* Schlagweite.

2. September 1880: $1^h\ 30^m$ p., 20 Schritte von hier eingeschlagen; gleich darauf, 50 Schritte weit, unmittelbar auf diesen Schlag, heftiger elektrischer Ausgleich zweimal vor der Türe, Funkengröße wie ein Ei. Ausgleichshöhe zwischen Nebel und Erde 4 Zoll, Geräusch wie beim Losgehen eines großen Pulverhaufens. Am Boden, im Gebäude im hinteren Teile Funkensprühen.

29. Juli 1890: $11^h\ 30^m$ p., 50 Schritte von hier eingeschlagen, gleich darauf das Telephon zerstört; von der Leitung im Gebäude flogen kleine Kugelblitze auf Lampe und Glocke und am Boden herum.

Elmsfeuer.

1865, Juni, am Dreifaltigkeitssonntage: Im Inneren des Hauses eine 2 *m* hohe, flammenartige Elmsfeuererscheinung, welche von K. Prohaska beschrieben wurde.[1]

23. Mai 1875: Sausen der Blitzableiter.

16. Juli 1884: 10^h Elmsfeuer auf der Triangulierungspyramide und auf dem Flaggenstocke.

16. September 1888: Schönes, großes Elmsfeuer 1000 Schritte vom Gipfel entfernt.

---

[1] Meteorolog. Zeitschr., 1893, p. 223.

11. Juli 1889: 11^h p. bis $0^h\,45^m$ a. Elmsfeuer an den Fingerspitzen von der Größe eines Nadelkopfes, an der Flaggenstange ungewöhnlich starkes Sausen.
12. Juli 1889: $1^h\,30^m$ a. Elmsfeuer an der Flaggenstange.
12. Juli 1890: Nach einem von $8^h\,20^m$ p. bis 10^h p. währenden Gewitter[1] um $10^h\,15^m$ p. an der Flaggenstange ein 2 *m* langes, 30 *cm* dickes Elmsfeuer bei heftigem Sausen.
2. Juli 1891: An der Flaggenstange heftiges Sausen zufolge elektrischer Ausströmung.
4. September 1892:[2] $7^h\,30^m$ a. Schnee, um $1^h\,45^m$ p. Schneegestöber, dichter Nebel und Donner hörbar, um $2^h\,30^m$ p. dasselbe gegen Südwesten, dauert ununterbrochen fort, um 6^h p. starkes Blitzen, gewaltige und langrollende Donnerschläge, um 7^h p. langanhaltender Blitz, furchtbarer Donner, starke Elmsfeuer am Flaggenstock und Blitzableiter. Entfernung des Gewitters 1500 bis 1800 *m*. Dichter Nebel, massiger Schneefall, an der Flaggenstange intensives Sausen, 8^h p. Entfernung des Gewitters, dauerte bis $9^h\,45^m$ p. Die ganze Zeit variabler Wind, 1.

Brände während des Gewitters entstanden und vom Schafberg beobachtet.

3. August 1871: Über der Donau.
15. August 1871: In Zell am Moos.
8. Juli 1875: Drei Brände gegen Westen, ein Brand gegen Süden, unmittelbar am Fuße des Dachsteins.
12. Juni 1877: Brand durch Blitzschlag gegen Braunau.
20. Juli 1881: 9^h p. Brand in Bayern; im Umkreise sechs Brände durch Biltzschlag.
16. Juli 1884: Brand am Inn, dann in Nordwesten und bei Schwanenstadt (ein Gewitter, welches ganz Deutschland durchzog, für welches Börnstein die Isobroten veröffentlichte).

---

[1] Prohaska Karl, Der Wettersturz vom 12. und 13. Juli 1890 in den Ostalpen. Meteorolog. Zeitschr., 1890, p. 456.

[2] Prohaska Karl, Die Gewitter und der Wettersturz vom 4. September 1892 in den Ostalpen. Meteorolog. Zeitschr., 1894, p. 249.

22. Juli 1887: Brand in Nußdorf am Attersee, ausgedehnter auch in Bayern beobachteter Gewitterzug.

1. August 1887: Brand in Hof und im Norden.

16. August 1887: Brand in Trum, im Salzburgischen, nächst Schärding, am Meierhofberg, gegen Neubau und Enns.

13. August 1890: 10^h p. Brand im Norden, $10^h 15^m$ p. ein zweiter Brand in gleicher Richtung, $10^h 20^m$ p. ein Brand in Bayern.

Auf der Sternwarte des Stiftes Kremsmünster werden die Gewitter seit 1763 mit geringfügigen Unterbrechungen fortlaufend aufgezeichnet. Im I. Jahrbuche der k. k. Zentralanstalt für Meteorologie in Wien sind die Zahlen der Gewittertage in den einzelnen Monaten von 1763 bis 1850 veröffentlicht.

W. v. Bezold[1] führt in seiner Abhandlung: »Über gesetzmäßige Schwankungen in der Häufigkeit der Gewitter« an, daß nach Angabe Dr. Augustin Reslhuber's in dem Zeitraume 1802 bis 1833 Gewitterzahlen eingetragen seien, während vor und nach diesem Zeitraume die Gewittertage angegeben werden.

Für den Zeitabschnitt 1763 bis 1799 gibt Karl Kreil im I. Jahrbuch als mittleren Wert der Zahl der Gewittertage im Jahre 18·0, für den Zeitabschnitt 1802 bis 1850 27·3 an.

Zur Ableitung der Gewitterzahlen für die Monatsdrittel wurden verschiedene Originalmitteilungen benutzt[2] und mir die fehlenden 3 Jahre durch den Herrn Direktor der Sternwarte, P. Thiemo Schwarz, in dankenswerter Weise ergänzt.

Der jährliche Gang der Gewitterhäufigkeit ist für Kremsmünster für je 10 Jahre in Tabelle I aufgenommen und es sind in Fig. 2 die entsprechenden Kurven gezogen; es ist auch der aus der ganzen Reihe folgende jährliche Gang gerechnet und graphisch in Fig. 1 und 2 dargestellt.

Die 1485 Gewittertage in dem Zeitraume von 1856 bis 1904 ergeben 30 Gewittertage auf das Jahr.

---

[1] Ges. Abhandlungen, p. 37.

[2] Von 1856 bis 1871. P. Augustin Reslhuber, Resultate aus den auf der Sternwarte zu Kremsmünster angestellten Beobachtungen; — von 1872 bis 1898 die Beobachtungsbögen der k. k. Zentralanstalt; von 1899 bis 1905. P. Thiemo Schwarz, Resultate aus den auf der Sternwarte zu Kremsmünster angestellten Beobachtungen.

In Tabelle II wird der von P. Koloman Wagner ermittelte tägliche Gang der Gewitterhäufigkeit angeführt.

Das mehrfache Maximum der Gewitterhäufigkeit während der Sommermonate ist von Prof. P. Koloman Wagner in dem nach Dekaden geordneten jährlichen Gange der Gewitterzahlen nachgewiesen worden.[1] Es stellt sich dabei ein merklicher Unterschied zwischen den Zeitabschnitten 1802—1840 und 1840—1887, aber auch ein Unterschied mit der von mir nach Drittelmonaten geordneten Reihe der Gewittertage von 1857 bis 1904 heraus. Ich führe die in Betracht kommenden Zahlen aus der Abhandlung P. Wagner's hier an:

			1802—1840	1840—1887	1802—1887
11. Mai	bis	20. Mai	66	81	147
21. »	»	30. »	**79**	82	161
31. »	»	9. Juni.....	66*	**169**	235
10. Juni	»	19. »	93	152	245
20. »	»	29. »	**114**	147*	**261**
30. »	»	9. Juli	95	155	250
10. Juli	»	19. »	80*	**157**	237*
20. »	»	29. »	91	156	**247**
30. »	»	8. August ...	**105**	142	**247**
9. August	»	18. » ...	81	120	201

Das für den jährlichen Gang der Gewitterhäufigkeit in den letzten 50 Jahren so charakteristische Minimum des zweiten Drittels Juni findet sich in der älteren Reihe 1802 bis 1840 ausgesprochen im ersten Drittel dieses Monats, während in die ältere Beobachtungsreihe des Hohenpeissenberges dieses Minimum auf das dritte Drittel des Monats Juni fällt.

Auf dem Obir (2044 *m*) bei Klagenfurt hat der um die Meteorologie Kärntens so verdiente Jos. Prettner meteorologische Beobachtungen eingerichtet.[2] Dieselben bezweckten

---

[1] Programm des k. k. Obergymnasiums zu Kremsmünster, 1888. Niederschläge und Gewitter in Kremsmünster.

[2] Temperaturbestimmungen in verschiedenen Höhen am Berge Obir in Kärnten. Aus den Berichten über die Mitteilungen der Freunde der Naturwissenschaften in Wien, herausgegeben von Wilhelm Haidinger. V. Bd., März 1849, p. 218.

die Ermittlung der Temperaturänderung mit der Höhe und des Ganges der Temperatur in den höheren Luftschichten und wurden in drei Berghäusern, welche zu den 13 Bleibergbauen der Gebrüder Komposch gehörten, durch die Vorsteher angestellt und von dem Hutmanne Andreas Ortner in Kappel überwacht und kontrolliert. Diese Beobachtungsstationen waren die folgenden:

Obir I, 3879 Wiener Fuß, Vorsteher Mathias Weißnigg;
Obir II, Seealpe, 5091 Wiener Fuß, Vorsteher Jobst, und
Obir III, 6462 Wiener Fuß, datiert mit Asterz.

Von Obir I schreibt Prettner: Dasselbe ist ein Berghaus, von kahlen Bergflächen und Schutthalden, Kalkgerölle, umgeben, welche durch Insolation sich selbst und die Luft stark erwärmen, es ist daher diese Station nicht viel wert. 1868 gingen mit der Pensionierung Weißnigg's die Beobachtungen daselbst ein. Das Berghaus Obir III ist am 11. Mai 1865 abgebrannt.

Die Beobachtungen scheinen an einer anderen Station fortgesetzt worden zu sein, welche der Beobachter Mallner mit Obir II/III bezeichnet und für welche Prettner den Namen »Hochobir« vorschlug, unter welchem dieselbe in den Beobachtungsbögen weitergeführt ist. Prettner gibt die Höhe derselben zu 6441 Wiener Fuß = 1044 Toisen, d. i. 286 Wiener Fuß = 46·4 Toisen unter dem Gipfel, an.

Aufzeichnungen von Gewittern finden sich vereinzelt in den Beobachtungsbögen, die mit 1851 beginnen, schon im Jahre 1852, woselbst am 21. Juli Blitz und Donner, »schauderliches Gewitter« notiert ist, aber zusammenhängende Beobachtungen sind erst vom Jahre 1866 von Lorenz Mallner vorhanden. Mit dem Beobachterwechsel 1870 werden dieselben unvollständig, von 1872 bis 1875 liefern sie die Zahl der Gewitter; von 1876 und 1877 sind überhaupt keine Beobachtungsbögen vorhanden. Brauchbare Gewitterbeobachtungen beginnen erst 1880 durch Emmerling, aber erst 1881 sind auch die Eintrittszeiten der Gewitter und die Zugrichtungen angegeben. In gleicher Weise wurden die Beobachtungen bis zum Oktober 1883 von Ferdinand Jamnigg und weiter bis zum Oktober 1888 durch Anton Pissonitz und von dieser Zeit an bis zur

Gegenwart durch Johann Matteweber in mustergültiger Weise fortgeführt.

Die Station beim Berghause am Obir wurde 1882 durch den Berg- und Hüttenverwalter Raimund Prugger unter Beihilfe der k. k. Österreichischen Gesellschaft für Meteorologie in eine Station I. Ordnung umgewandelt und im Jahre 1891 durch den Bau der Hannwarte auf dem Gipfel ergänzt. Es unterliegt wohl keinem Zweifel, daß die von Prugger gegebenen Anleitungen wesentlich zu der mustergültigen Führung der Beobachtungen auf dem Hochobir beigetragen haben.

In dem Zeitraume von 1880 bis 1905 sind auf dem Hochobir 663 Gewittertage notiert worden, was im Mittel 25 bis 26 Gewittertage im Jahre ergibt.

Von Pissonitz sind am 11. Oktober 1884, am 6. März 1885 und am 8. Mai 1885 Elmsfeuer an der Windfahne vor dem Berghause während oder nach Gewittern beobachtet worden.

Blitzschläge in die Signal- und Fahnenstangen, in die Telephonleitung, ohne größeren Schaden, sind von Pissonitz am 29. Mai 1884, am 21. Juni 1887; von Matteweber am 27. Juli 1889, am 12. Juni 1894, am 22. Juli 1897 (die Detonation glich der einer Dynamitpatrone); am 19. August 1903 (der Blitz schlug in das Telephon, beschädigte die Fahnenstange am Gipfel und mehrerer Telephonstangen) und am 8. Oktober 1904 aufgezeichnet worden.

Am 17. Juni 1897 bei einem Gewitter von $9^h\,45^m$ bis 11^h p. zündete der Blitz im Schutzhause unter dem Dachfirst. Durch rasches Eingreifen konnte das Feuer erstickt werden. »30 Fensterscheiben fielen zum Opfer«.

Am 21. Juli 1897, nach einer größeren Zahl von Gewittern seit Mittag, schlug bei dem letzten derselben um $9^h\,55^m$ p. der Blitz in die Telephonleitung, »wo derselbe die Erde 3 *m* lang, $^1/_2$ *m* breit und $^1/_4$ *m* hoch aufgeworfen hat, eine zentnerschwere Steinplatte, welche bei der Instrumentenhütte lehnte, in drei Stücke zerriß und dieselben fortschleuderte«.

Am 20. Mai 1901 schlug der Blitz am Gipfel, an der Südseite, 2 *m* von der Warte entfernt, ein, warf Steine bis zu 5 *kg* an die Oberfläche, Erde und Rasen lagen auf 50 Schritte

zerstreut. Im Wohnzimmer schlug der Blitz, »durch die Leitung gekommen«, 3 *m* vom Apparat entfernt, in die Mauer, machte dortselbst ein handgroßes Loch und schleuderte den Mörtel im Zimmer umher. Der Beobachter selbst hatte in den Füßen die Empfindung, als ob ihn jemand elektrisiert hätte.

Am 14. Juni 1905, während eines Gewitters von $12^h\ 15^m$ p. bis $12^h\ 40^m$ p., schlug der Blitz in das Wohnzimmer des Beobachters. Zwei Mauerseitenwände wurden stark beschädigt, am Plafond entstanden vier Löcher, die Glasscheibe vom Wirtschaftstarife wurde zersplittert, in der Küche waren im Plafond zwei Löcher entstanden, in der Vorlauben der Boden aufgerissen, dann ging die Blitzspur durch den Speisekasten und den Ofen in das Gesellschaftszimmer, welches gleichfalls beschädigt wurde.

Die 11 aufgezeichneten Blitzschläge verteilen sich wie folgt über das Jahr:

Mai	2
Juni	5
Juli.....	2
August.....	1
September	0
Oktober	1

Über die meteorologischen Beobachtungen in Klagenfurt, zirka 17 *km* vom Obir nordnordwestlich gelegen, finden sich 1854 und 1855 Berichte über mehrere Stationen umfassende Beobachtungen vor mit der Aufzeichnung eines Wintergewitters um 6^h bis 8^h p. am 6. Jänner 1854, mit neun starken Blitz- und Donnerschlägen und reichlichem Schneefalle. Diese meteorologischen Beobachtungen wurden von Josef Prettner[1] geleitet und späterhin für Klagenfurt fortgeführt. Die Gewitter scheinen sehr sorgfältig aufgezeichnet zu sein, aber die Tagesstunden,

[1] Die Zahl der Gewittertage ist den Beobachtungsbögen der k. k. Zentralanstalt in Wien entnommen. W. v. Bezold weist in seiner Abhandlung: »Die Schwankungen der Gewitterhäufigkeit«, Ges. Abhandl., p. 38, darauf hin, daß die in den Jahrbüchern der k. k. Zentralanstalt veröffentlichten Zahlen mit den von Prettner im Jahrb. des naturhist. Landesmuseums in Kärnten, XI, 1873, in »Klima von Kärnten« veröffentlichten Zahlen nicht übereinstimmen.

zu welchen dieselben eintraten, sind nur in einzelnen Fällen angegeben.

Die Beobachtungsbögen enthalten zahlreiche Notizen über Gewittererscheinungen und Blitzschläge, von denen einige hier angeführt und dabei auf die gleichzeitig auf dem Obir notierten Erscheinungen hingewiesen werden soll.

Am 13. Juli 1864 ein Hagelwetter mit Nordweststurm, währenddessen zahllose Bäume entwurzelt und an 50000 Fensterscheiben eingeschlagen wurden; auf dem Obir ist am 12. Juli abends Gewitter angegeben.

Am 28. Februar 1866 fiel während eines heftigen Gewitters, worüber vom Obir nichts gemeldet wird, von $5^h\ 30^m$ bis 10^h p. Schnee von rostbrauner Farbe. 20 Maß Schmelzwasser ergaben 13 Wiener Gran (0·95 *g*) Bodensatz.

Die Beobachtungsbögen von 1867 bis 1874 fehlen, erst von 1875 an sind dieselben wieder vorhanden und von 1877 an ist Bergrat Ferdinand Seeland als Beobachter eingeschrieben. Aus den besonderen Bemerkungen der aus den folgenden Jahren stammenden Beobachtungsbögen seien die folgenden hervorgehoben.

Am 12. Juli 1877 (von Obir fehlt der Beobachtungsbogen), nachmittags wolkenbruchartiger Regen, in $1^1/_2$ Stunden 31 *mm*. Im Nordwesten von Klagenfurt ein starkes Hagelwetter und eine Windhose, welche die stärksten Bäume entwurzelte und Gebäude abdeckte. Die Längenachse dieser Sturm- und Hagelregion erstreckte sich von Wölfnitz bis Viktring, die kurze Achse von Krumpendorf zur westlichen Stadtgrenze.

Am 25. Februar 1879[1] fiel zwischen $1^h\ 30^m$ und 3^h p. bei Südoststurm rotgelber Schnee aus einer roten Wolke, welche über Lesina heraufzog und afrikanischen Wüstenstaub enthielt. Am Hochobir herrschte Südoststurm, vom 23. bis zum 25. Februar fiel 229 *mm* Niederschlag.

Über den großen Staubfall am 10. März 1901[2] ist angegeben: 3^h a. Hagel mit Sturm. Die Schneedecke zeigte morgens punktierte Vertiefungen und eine gelbliche Färbung. Sonnblick

[1] Meteorolog. Zeitschr., 1879, p. 141 und 146.

[2] Meteorolog. Zeitschr., 1902, p. 180, 463, 533.

berichtete hierüber erst am 25. März: »Wunderschönes Wetter mit herrlicher Aussicht auf die mit rötlichem Schnee bedeckten Gebirge.«

Zum Teil besonders bemerkenswerte Blitzschläge sind in Klagenfurt aufgezeichnet:

Am 14. August 1884 zwei Blitzschläge in die Südostecke des Südbahnhofes. Obir notiert $4^h\ 30^m$ bis $5^h\ 10^m$ p. Gewitter in Nordwesten.

Am 27. September 1885, 8^h a. Blitzschlag in den Benediktinerturm. Am Obir sind an diesem Tage drei Gewitter aufgezeichnet: 1^h bis 5^h a. in Südwesten, $8^h\ 40^m$ bis $9^h\ 10^m$ a. in Südwesten, $4^h\ 20^m$ p. zwei Blitze und Donner in Südwesten.

Am 23. Juli 1887 während der Gewitter von 10^h a. bis 5^h p. Blitzschläge in einen Blitzableiter bei Kazettl und in die Tabakfabrik; Obir notiert Gewitter von 11^h a. bis 12^h in Norden und Süden, 12^h bis 2^h p. in Westen und Osten; 3^h bis 6^h p. entferntes Gewitter.

Am 15. Juni 1892 während eines Gewitters von 3^h p. bis 7^h p. (Sonnblick meldet: Gewitter von 4^h bis $7^h\ 30^m$ a. mit starken Blitzschlägen; Obir: Gewitter um $6^h\ 15^m$ p. in Südwesten und Osten) aus Nordwesten, fuhr der Blitz in eine hohe Pappel an der Nordwestecke des Suppangartens, sprang auf das Ziegeldach der Gartenmauer, zum Bleche des Glashauses, dessen aufstehender Rand zweimal gelocht wurde, endlich zum Blechsaume und zur Dachrinne des Wohnhauses nach dem Wasserabfallrohre, durch drei Erdlöcher nächst dem Trottoir zum Straßenkanal. Die Hausbewohner blieben unversehrt, trotzdem sie ganz von elektrischen Funken umzingelt waren, die eine an der Gartenmauer stehende Fichte schwärzten und den wilden Wein am Glashause verbrannten.

Am 7. Juni 1895 meldet Obir kein Gewitter, dagegen Klagenfurt sehr heftiges Gewitter mit Blitzschlägen in den Blitzableiter des Stadtturmes und südöstlich des Lendkanals, wo nächst der Maut ein Feldarbeiter getötet wurde.

Am 4. Juli 1903 meldet Obir kein Gewitter, dagegen schlug in Klagenfurt der Blitz in den Heustadl des Tischlermeisters Bloth bei Franzensmühl und zündete; in St. Rupprecht wurden zwei Schornsteine und der Oberboden demoliert, der Blitz-

ableiter des Hauses Nr. 19 am Bismarckringe umgebogen, die Blätter des an der Westseite stehenden Trompetenbaumes wurden auf der Nordseite welk und fielen ab, noch mehr die von dem außerhalb des Gartens stehenden Kastanienbaume auf der Ringstraße, die an der Ostseite ganz verdorrten.

Am 23. Juni 1904 meldet Obir von $3^h\,30^m$ bis $6^h\,40^m$ p. Gewitter in Nordwesten und Südwesten, Klagenfurt Gewitter von $2^h\,30^m$ bis $8^h\,15^m$ p. und Hagel in Krumpendorf, woselbst ein Mann durch den Blitz getötet wurde.

Am 5. Juli 1904 meldet Obir: Gewitter von 6^h bis $6^h\,18^m$ p. in Norden und Osten; Klagenfurt meldet: Hinter Predigtstuhl schlug während eines Gewitters von $4^h\,50^m$ bis 7^h p. der Blitz ein und zündete zwei Objekte. In der Landwehrkaserne wurde ein Kugelblitz beobachtet.

Am 18. Juli 1904 meldet Obir Gewitter von $3^h\,15^m$ p. bis $3^h\,45^m$ p. Nordwesten bis Süden, $7^h\,30^m$ bis $8^h\,45^m$ p. Nordosten bis Südosten; Klagenfurt Gewitter um $2^h\,35^m$ p. und $7^h\,30^m$ p. in Zell durch Blitzschläge zwei Gehöfte abgebrannt.

Am 21. Juli 1904 meldet Obir Gewitter von $3^h\,15^m$ p. bis $4^h\,10^m$ p. in Nordwesten bis Südwesten Hagel und Regen; Klagenfurt Gewitter von $2^h\,30^m$ bis $3^h\,15^m$ p. und um 7^h p. Gewitter in Stein bei Viktring, woselbst eine Magd vom Blitze getötet wurde.

Von den bemerkenswerten in Klagenfurt aufgezeichneten Hagelfällen vom 18. Juli 1880 mit haselnußgroßen geschichteten Hagelkörnern, vom 14. Juli 1884 und vom 24. August 1894 mit Hagelkörnern von 10 bis 22 *mm* Durchmesser, meldet Obir nichts Bemerkenswertes. Dagegen wurde während des am 25. August 1890 in Klagenfurt beobachteten, von $5^h\,50^m$ p. bis $5^h\,55^m$ p. währenden Hagelfalles mit Hagelkörnern von 50 *mm* in der großen Achse, von denen 80 auf ein Zollpfund gingen,[1] auf dem Obir um 4^h p. entfernte Gewitter in Südwesten und Nordosten, von 7^h bis $8^h\,30^m$ p. heftige Gewitter auf allen Seiten, Südoststurm und Neuschnee notiert.

Am 16. Juli 1902 meldet Obir Gewitter von $3^h\,15^m$ p. bis $3^h\,45^m$ p. mit Nordwest- und Südweststurm, während in Klagen-

[1] Meteorolog. Zeitschr., 1902, p. 161.

furt während eines Gewitters von $2^h\ 40^m$ bis $3^h\ 30^m$ p. nußgroße und taubeneigroße Hagelkörner fielen und viel Schaden anrichteten, insbesondere Nordfenster einschlugen.

Während eines am 21. Mai 1904[1] in Klagenfurt von 7^h p. bis 8^h p. notierten Gewitters mit Sturm, Wolkenbruch und Hagelfall berichtet Obir: Gewitter von $7^h\ 30^m$ bis 8^h p. in Norden und Südwesten.

Es ist noch anzufügen, daß in Klagenfurt von 1896 bis 1897 E. Janežic beobachtete und im April 1901 Prof. Jäger zu beobachten begann, welcher die Gewitter mit Angabe der Zeit und der Weltgegend sorgfältig aufzeichnete. Aus diesen fünf vollständigen Jahrgängen ist der tägliche Gang der Gewitterhäufigkeit abgeleitet worden; derselbe ist in Tabelle II eingetragen.

In dem Zeitraume 1857 bis 1866 sind 273, in jenem 1875 bis 1905 966, zusammen 1239 Gewitter aufgezeichnet worden, was im Mittel 30 Gewittertage auf das Jahr ergibt.

Die seit 1884 angeführten 11 Blitzschläge verteilen sich wie folgt über das Jahr:

Juni	3
Juli.....	6
August.....	1
September	1

Auf dem Hohenpeissenberg (989 *m*) sind meteorologische Beobachtungen von der »Societas Palatina«, welche der Kurfürst Karl Theodor 1780 begründet hatte, durch den geistlichen Rat und Aufseher der kurfürstlichen Kunstkammer der Naturlehre, Johann Jakob Hemmer, im Jahre 1871 eingeleitet worden. Die Beobachtungen wurden von den dem Kloster Rottenbuch zugehörigen Pfarrern unter Beihilfe der Schullehrer begonnen und später unter staatlicher Aufsicht durch diese Persönlichkeiten weitergeführt. Die seit 1792 gesammelten Beobachtungen sind von Lamont im I. Supplementbande zu den Annalen der Münchener Sternwarte, 1851, bis zum Jahre 1850 veröffentlicht worden. Die Gewitter sind nach

[1] Meteorolog. Zeitschr., 1905, p. 177.

den Beobachtungsstunden notiert, ich habe sie nach Gewittertagen geordnet.

Es haben sich auf diese Art 1330 Gewittertage in 53 Jahren, aus denen Beobachtungen vorliegen, ergeben, was im Mittel 25 Tage mit Gewittern im Jahre ausmacht.

W. v. Bezold war der Ansicht, daß die Gewitterbeobachtungen auf dem Hohenpeissenberg nicht nach einheitlichen Gesichtspunkten geführt sind und benützte dieselben nicht bei seinen Untersuchungen über die gesetzmäßigen Schwankungen in der Häufigkeit der Gewitter.[1]

Die Gewitterbeobachtungsreihe des Hohenpeissenberges ist mit dem Jahre 1850 unterbrochen und beginnt erst wieder mit dem Jahre 1879; sie ist bis zum Jahre 1898 veröffentlicht.[2]

Die in diesen 20 Jahren aufgezeichneten 699 Gewittertage ergeben im Mittel 35 Gewittertage auf das Jahr. Die in Sonderabdrucken der Augsburger Abendzeitung erscheinenden monatlichen »Übersichten über die Witterungsverhältnisse im Königreiche Bayern« ergeben von 1899 bis 1906 247 Gewittertage, somit im Mittel 31 Gewittertage auf das Jahr.

In Tabelle I ist der jährliche Gang nach der älteren und neueren Beobachtungsreihe in Drittelmonaten angegeben und in Fig. 2 ist derselbe, der neueren Beobachtungsreihe entsprechend, graphisch dargestellt.

Zum Vergleiche sind von mir auch die Gewitterbeobachtungen in München herangezogen worden.

Die Zahl der Gewittertage für die Jahre 1842 bis 1859 beträgt nach Dr. Ph. Carl[3] 339, somit auf das Jahr 19. Die neuere Reihe von 1879 bis 1898[4] ergibt 627 Gewittertage und jene von 1899 bis 1906[5] 293 Gewittertage, somit 31 und 37 Gewittertage auf das Jahr.

Im Mittel geben von 1879 bis 1906 der Hohenpeissenberg 34 und München 33 Gewittertage auf das Jahr.

---

1 Ges. Abhandlungen, p. 43.

2 Beobachtungen der meteorologischen Stationen im Königreiche Bayern.

3 Pogg. Ann. der Phys. und Chemie, Bd. 112, 1862, p. 107.

4 Beobachtungen der meteorologischen Stationen im Königreiche Bayern.

5 Übersicht über die Witterungsverhältnisse. Separatabdruck aus der Augsburger Abendzeitung.

Aus der Reihe 1879 bis 1898 ist der jährliche Gang in Drittelmonaten abgeleitet, in Tabelle II angeführt und in Fig. 2 graphisch dargestellt.

Prof. Karl Prohaska in Graz hat im Jahre 1885 mit Unterstützung des Naturwissenschaftlichen Vereines für Steiermark ein Gewitterbeobachtungsnetz in Steiermark, Kärnten und Krain eingerichtet. Die Meldungen sind eingelaufen in den Jahren 1885 bis 1892 und 1896 bis 1902, d. i. während 15 Jahren. In der Meteorologischen Zeitschrift, 1906, p. 134, sind die gefundenen Ergebnisse in einer Mitteilung: »Über die jährliche und tägliche Periode der Gewitter und Hagelfälle in Steiermark, Kärnten und Krain« zusammengestellt,

Nach Dekaden geordnet führe ich hieraus die folgenden Zahlen der Gewittermeldungen an, welche den Rückgang der Gewitterhäufigkeit im zweiten Drittel des Monats Juni so, wie er sich auch an den im vorhergehenden in Betracht gezogenen Stationen ergeben hat, zum Ausdrucke bringen:

11. Mai	bis	20. Mai	4988
21. Mai	»	30. Mai	7938
31. Mai	»	9. Juni	**14409**
10. Juni	»	19. Juni	8915*
20. Juni	»	29. Juni	11314
30. Juni	»	9. Juli	13160
10. Juli	»	19. Juli	**15228**
20. Juli	»	29. Juli	14205
30. Juli	»	8. August	13653
9. August	»	18. August	9947

In der Tabelle II ist der tägliche Gang der Gewitterhäufigkeit für Sonnblick, Bucheben, Schafberg, Kremsmünster, Hochobir und Klagenfurt angeführt und zum Schluß eine diesbezügliche Zusammenstellung Karl Prohaska's[1] beigefügt. Dem in der letzteren ausgesprochenen Morgenmaximum in der Stunde 1^h bis 2^h a. begegnet man wieder im täglichen Gange der Gewitterhäufigkeit von Kremsmünster und des Zeitabschnittes

[1] Über die jährliche und tägliche Periode der Gewitter und Hagelfälle in Steiermark, Kärnten und Krain. Meteorolog. Zeitschr., 1906, p. 134.

1881 bis 1890 auf dem Obir. Das Hauptminimum von 4^h a. bis 8^h a. der Prohaska'schen Reihe scheint in Kremsmünster etwas verspätet, auf den Gipfelstationen auf eine frühere Stunde zu fallen, was indessen nur vermutet werden kann. Das Hauptmaximum von 3^h bis 5^h p. findet sich am Schafberg, in Kremsmünster, am Obir und in Klagenfurt. Auf dem Sonnblick und in Bucheben ist es auf 5^h bis 6^h p. verschoben. Auf dem Sonnblick erscheinen überhaupt die Stunden 4^h bis 10^h p. bezüglich der Gewitterhäufigkeit nur wenig voneinander verschieden. Schafberg und Kremsmünster zeigen noch ein zweites sekundäres Maximum von 8^h bis 9^h p. und von 7^h bis 9^h p.

In der Tabelle III ist eine Zusammenstellung der Zahl der Gewittertage im Jahre für solche Stationen, von denen längere Beobachtungsreihen vorliegen und der im vorhergehenden betrachteten Gipfelstationen versucht. Die eingeklammerten Zahlen entsprechen Jahren, in welchen die Beobachtungen für einzelne Monate fehlen.

In Kremsmünster sind von 1856 bis 1870 die Zahlen den Reslhuber'schen Mitteilungen, von 1871 bis 1897 den Beobachtungsbögen der k. k. Zentralanstalt, von 1898 bis 1904 der Mitteilung von P. Thiemo Schwarz entnommen. Für Hohenpeissenberg und München sind von 1899 an die Beobachtungen aus den Übersichten über die Witterungsverhältnisse aus der Augsburger Abendzeitung entnommen.

Die großen Unterschiede in den Gewitterzahlen einzelner Jahre in benachbarten Stationen lassen wohl vermuten, daß die Gewitterbeobachtungen nicht nach den gleichen Gesichtspunkten geführt sind.

Tabelle I.

	Sonnblick 1888 bis 1906	Bucheben 1898 bis 1906	Schmittenhöhe 1888 bis 1905	Obir 1880 bis 1905	Klagenfurt 1857 bis 1866	Klagenfurt 1875 bis 1905	Klagenfurt 1857 bis 1905	Schafberg 1871 bis 1904 unkorr.	Schafberg 1871 bis 1904 auf 34 Jahre
Jänner I	.	.	.	1	.	.	.	.	.
Jänner II	.	.	.	.	.	1	1	.	.
Jänner III	.	.	.	3	.	1	1	.	.
Februar I	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Februar II	.	.	.	1	.	1	1	1	1
Februar III	.	.	.	2	1	2	3	.	.
März I	.	.	.	3	.	1	1	1	1
März II	.	.	.	4	2	2	4	3	4
März III	1	.	1	4	1	5	6	2	2
April I	1	.	.	4	5	8	13	4	4
April II	1	.	3	4	2	8	10	7	8
April III	1	2	6	11	5	21	26	16	18
Mai I	2	2	4	12	2	26	28	12	15
Mai II	8	3	11	26	10	38	48	13	16
Mai III	14	10	21	46	13	65	78	28	35
Juni I	22	11	47	49	22	59	81	51	69
Juni II	9	6	26	45	27	66	93	28	38
Juni III	25	12	28	63	19	70	89	36	49

Juli	I	30	14	43	61	23	87	110	62	78
	II	37	23	46	55	24	79	103	58	73
	III	**42**	**27**	**51**	**61**	**27**	**102**	129	32	40
August	I	35	25	39	46	20	77	97	27	37
	II	26	18	35	35	17	63	80	34	**46**
	III	26	11	34	31	15	62	77	31	42
September	I	20	15	17	21	13	35	48	17	25
	II	11	7	7	26	10	27	37	7	10
	III	2	2	1	16	1	19	20	4	6
Oktober	I	2	1	2	6	6	8	14	2	3
	II	.	.	2	6	2	9	11	.	.
	III	1	1	.	8	4	6	10	.	.
November	I	.	.	.	1	1	2	3	2	2
	II	.	.	.	2	.	3	3	.	.
	III	.	.	.	4	1	6	7	2	2
Dezember	I	.	.	.	2	.	3	3	.	.
	II	.	.	.	6	.	3	3	1	1
	III	.	.	.	2	.	1	1	2	2
Summe		314	190	424	663	273	966	1239	483	626
Jahr		17	21	24	26	27·3	31	30	.	18

	Kremsmünster						Hohenpeissenberg		München
	1856 bis 1865	1866 bis 1875	1876 bis 1885	1886 bis 1895	1896 bis 1904	1856 bis 1904	1792 bis 1850	1879 bis 1898	1879 bis 1898
Jänner I	2	.	.	.	.	2	2	.	1
Jänner II	1	.	.	.	.	1	2	.	.
Jänner III	.	1	.	.	1	2	1	.	.
Februar I	.	.	.	.	1	1	2	.	.
Februar II	.	.	.	.	2	2	2	.	2
Februar III	.	.	.	.	.	.	4	.	.
März I	1	2	3	.	1	7	2	.	1
März II	1	1	2	1	3	8	6	2	2
März III	1	1	2	2	4	9	7	3	4
April I	7	5	1	1	7	23	18	5	4
April II	5	7	2	11	7	30	31	19	10
April III	4	12	8	12	9	45	38	25	19
Mai I	13	9	10	16	8	56	73	32	23
Mai II	19	9	11	19	19	77	73	34	32
Mai III	22	19	11	21	15	88	79	52	44
Juni I	31	24	17	33	15	**120**	89	**70**	**63**
Juni II	22	19	16	21	14	92	**96**	34	45
Juni III	25	22	21	35	16	119	79	**64**	51

Juli.....	I	15	33	27	36	14	125	98	61	**62**		
	II	17	28	26	26	31	128	90	57	53		
	III	33	26	17	27	31	**134**	126	57	51		
August	I	21	19	14	19	18	91	103	46	33		
	II	26	19	21	25	15	**106**	92	39	36		
	III	9	17	21	15	16	78	82	34	**37**		
September .	I	7	5	9	11	16	48	57	30	22		
	II	5	7	7	7	8	34	29	12	15		
	III	5	1	2	6	4	18	20	10	7		
Oktober	I	4	2	1	4	4	15	11	7	5		
	II	2	2	.	1	1	6	5	2	1		
	III	2	1	.	1	1	5	4	.	1		
November .	I	.	2	1	.	1	4	1	1	.		
	II	.	1	.	.	1	2	.	2	.		
	III	1	1	2	.	2	6	1	.	1		
Dezember ..	I	.	.	.	.	.	.	2	.	1		
	II	1	.	.	1	1	3	.	.	1		
	III	.	•	.	.	.	.	5	1	.		
Summe.....		302	294	252	351	286	1485	1330	699	627		
Jahr		.	.	.	.	.	30	25	35	31		

Tabelle II.

	Sonnblick 1888 bis 1906	Bucheben 1898 bis 1906	Schafberg berechnet auf 34 Jahre	Krems-münster 1802 bis 1887	Hochobir 1881 bis 1890	Hochobir 1891 bis 1905	Hochobir 1881 bis 1905	Klagenfurt 1901 bis 1905	Prohaska 1885—1892 1890—1902 Anzahl der Meldungen
Mittn.— 1h a.	12	3	27	23	8	12	20	3	3829
1— 2	7	3	9	**49**	**10**	7	17	2	**4085**
2— 3	6	.	11	15	7	6	13	3	3217
3— 4	2	.	7	18	7	5	12	3	2464
4— 5	7	.	8	16	5	16	21	4	2149*
5— 6	8	3	4	13	4	13	17	5	2186
6— 7	13	4	3	10	2	13	15	2	2156
7— 8	14	4	3	14	6	14	20	4	2158
8— 9	16	6	4	13	6	12	18	7	2245
9—10	14	3	5	18	9	12	21	8	2548
10—11	14	7	9	24	7	14	21	8	3830
11—Mittag	14	8	13	49	12	22	34	11	6797

Mittag— 1h p.	29	17	26	139	30	32	62	10	10998
1— 2	38	25	44	205	54	58	112	20	15999
2— 3	53	36	81	280	63	66	129	29	19610
3— 4	60	39	**98**	334	**75**	**80**	**155**	**30**	**21591**
4— 5	68	38	97	**375**	68	76	144	**31**	21063
5— 6	**74**	**45**	93	318	**47**	**69**	116	23	19001
6— 7	68	40	88	228	31	44	75	27	15646
7— 8	69	40	105	**273**	28	43	71	32	13118
8— 9	67	31	**148**	245	33	44	77	28	11509
9—10	68	21	113	171	40	40	80	13	8546
10—11	22	10	67	75	12	23	35	5	5447
11—Mittn.	17	6	40	53	8	13	21	4	3770*

Tabelle III.

	Kremsmünster	Schafberg	Hohenpeissenberg	München	Sonnblick	Bucheben	Schmittenhöhe	Obir	Klagenfurt
1856	36	.	.	17	.	.	.	.	.
57	38	.	.	25	.	.	.	.	21
58	26	.	.	16	.	.	.	.	23
59	33	.	.	30	.	.	.	.	31
1860	23	.	.	.	.	.	.	.	28
61	25	.	.	.	.	.	.	.	27
62	36	.	.	.	.	.	.	.	27
63	28	.	.	.	.	.	.	.	31
64	24	.	.	.	.	.	.	.	26
1865	33	.	.	.	.	.	.	.	22
66	31	.	.	.	.	.	.	17	37
67	28	.	.	.	.	.	.	21	.
68	35	.	.	.	.	.	.	20	.
69	28	.	.	.	.	.	.	17	.
1870	36	.	.	.	.	.	.	.	.
71	22	12	.	.	.	.	.	.	.
72	22	13	.	.	.	.	.	(13)	.
73	26	21	.	.	.	.	.	(9)	.
74	24	27	.	.	.	.	.	22	.
1875	33	25	.	.	.	.	.	19	32
76	19	13	.	.	.	.	.	.	23
77	22	15	.	.	.	.	.	.	23

	Kremsmünster	Schafberg	Hohenpeissenberg	München	Sonnblick	Bucheben	Schmittenhöhe	Obir	Klagenfurt
1878	20	7	.	.	.	.	.	.	33
79	20	7	24	20	.	.	.	.	28
1880	42	29	24	34	.	.	18	21	33
81	35	15	26	31	.	.	19	26	25
82	24	5	13	28	.	.	.	23	28
83	18	14	25	34	.	.	7	38	23
84	21	19	13	28	.		10	24	20
1885	31	26	27	29	.	.	13	29	34
86	35	20	38	34	.	.	.	31	25
87	33	12	41	36	.	.	.	29	21
88	32	17	30	33	19	.	11	22	27
89	40	26	53	38	21	.	20	29	31
1890	39	22	45	29	22	.	26	21	29
91	39	21	39	30	23	.	18	30	30
92	31	16	50	27	20	.	19	28	31
93	35	(8)	44	26	17	.	43	31	31
94	33	(5)	46	28	22	.	13	27	37
1895	34	(7)	46	37	15	.	24	28	30
96	25	(8)	42	32	(8)	.	6	42	47
97	25	(4)	39	33	11	.	56	25	34
98	22	21	34	40	17	20	41	29	48
99	34	(7)	35	40	16	22	15	18	40
1900	31	.	22	51	13	25	14	16	30

	Kremsmünster	Schafberg	Hohenpeissenberg	München	Sonnblick	Bucheben	Schmittenhöhe	Obir	Klagenfurt
1901	42	.	28	41	8	20	26	23	33
02	36	.	26	26	16	20	16	18	27
03	35	17	31	27	14	13	21	11	27
04	38	24	30	31	21	29	29	30	51
1905	.	.	34	38	17	25	26	14	36
06	.	.	41	39	13	16	.	.	.

Zur Rotation von Gasmolekülen

von

Dr. **Rudolf Girtler,**
Assistent für Physik an der k. k. technischen Hochschule in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 10. Mai 1907.)

Um sich die Differenzen zwischen der unter Voraussetzung alleiniger fortschreitender Bewegung der Moleküle berechneten spezifischen Wärme eines Gases und experimentellen Ergebnissen zu erklären, nahm Clausius neben der fortschreitenden kinetischen Energie der Moleküle auch eine potentielle Energie der ein Molekül zusammensetzenden Bestandteile an, indem er eine intramolekulare Kräftefunktion einführte, durch deren entsprechende Wahl allein schon die Verschiedenartigkeit des Verhältnisses $\varkappa$ der beiden spezifischen Wärmen eines Gases erklärt werden könnte. Maxwell fand (Phil. Mag., IV, 20, 1860), daß die Rotationsenergie eines elastischen Gasmoleküls von beliebiger Gestalt seiner Translationsenergie im Mittel gleich sein müsse, und schloß aus seiner Untersuchung, daß eine derartige Annahme über die Art der Moleküle mit den Erfahrungstatsachen in Bezug auf $\varkappa$ nicht in Vereinbarung zu bringen sei. Boltzmann (Gastheorie, II. Bd.) verband die Anschauungen von Clausius und Maxwell und schrieb jedem Gasmolekül eine fortschreitende kinetische Energie Q_2 und eine intramolekulare Energie Q_3 zu, von welchen die letztere sich zusammensetzt aus der kinetischen und potentiellen Energie Q_5 und Q_6; für die kinetische Energie der Atome Q_5 kommt insbesondere auch die Rotation derselben

um irgend eine Achse in Betracht. Boltzmann stellte dann seine berühmte Formel für

$$\varkappa = \frac{c_p}{c_v} = 1 + \frac{2}{\mu + 3\varepsilon} \tag{1}$$

auf, worin bekanntlich μ die Anzahl der Freiheitsgrade des Moleküls und ε das Verhältnis der gesamten intramolekularen Energie zur Erhöhung der potentiellen Energie der Atome bei Erwärmung des Gases vorstellt. Durch nähere Bestimmung von μ und ε in jedem einzelnen Falle ist eine große Mannigfaltigkeit der Werte von $\varkappa$ gegeben. Da ε im allgemeinen von der Temperatur abhängig sein wird, so ergibt sich $\varkappa$ aus (1) als eine Funktion der Temperatur. Boltzmann sagt aber selbst, daß eine Betrachtung vieler spezieller Fälle wohl nicht schwierig, jedoch überflüssig erscheine, solange nicht umfassenderes experimentelles Material vorliege.

Wir wollen im folgenden zur Bestimmung von $\varkappa$ einen unseres Wissens neuen Weg einschlagen, nämlich den der Herleitung von $\varkappa$ aus dem von Clausius aufgestellten Virialbegriff. Wir fassen zunächst die Moleküle als absolut glatte, elastische Körperchen von vorerst beliebiger Gestalt auf, zwischen denen weiter keine Kräfte als die im Momente des Stoßes zur Tätigkeit gelangenden Abstoßungskräfte wirken sollen. Sie werden dann neben der fortschreitenden kinetischen Energie auch eine Rotationsbewegung besitzen müssen und es wird sich das Virial dementsprechend in ein solches der fortschreitenden und rotierenden Bewegung V_f und V_r teilen müssen. Das Gesamtvirial V ist daher

$$V = V_f + V_r. \tag{2}$$

Für V hat Clausius (Wied. Ann., Jubelband, 1874, p. 422) den Ausdruck

$$V = -\frac{1}{2} \Sigma \overline{\frac{d(U_\nu - T_\nu)}{dq_\nu} q_\nu} + \overline{\frac{1}{2} \frac{d \Sigma p_\nu q_\nu}{dt}} \tag{3}$$

aufgestellt. Darin ist U_ν das Kräftepotential, T_ν die lebendige Kraft des Systems, q_ν repräsentiert die generalisierten Koordi-

naten eines Teilchens und $p_\nu = \frac{\partial T_\nu}{\partial q_\nu}$. Die Querstriche bedeuten, daß die Mittelwerte der Summen Σ über eine genügend große Zeit t genommen werden sollen. Für V_f fand schon Clausius

$$V_f = -\frac{1}{2}\Sigma\overline{X_x + Y_y + Z_z}. \tag{4}$$

V_r folgt aus (3): Die lebendige Kraft T_ν^r eines Teilchens ist

$$T_\nu^r = \int M_x d\vartheta_x + \int M_y d\vartheta_y + \int M_z d\vartheta_z, \tag{5}$$

wenn wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem x, y, z zu Grunde legen und M_x, M_y, M_z die auf diese Achsen bezüglichen Drehungsmomente, $\vartheta_x, \vartheta_y, \vartheta_z$ aber die in einem bestimmten Sinne genommenen Drehungswinkel bedeuten. Da nach unserer Voraussetzung über die wirkenden Kräfte $U_\nu = 0$ ist und bei einer stationären, d. h. einer solchen, für welche nach einer genügend großen Zeit immer genau dieselben Werte $\vartheta_x, \vartheta_y, \vartheta_z$ wiederkehren, $\frac{dp_\nu q_\nu}{dt} = 0$ gesetzt werden kann, so ergibt sich aus (3) unter Berücksichtigung von (5)

$$V_r = -\frac{1}{2}\Sigma\overline{\frac{d\int M_x d\vartheta_x}{d\vartheta_x}\vartheta_x + \frac{d\int M_y d\vartheta_y}{d\vartheta_y}\vartheta_y + \frac{d\int M_z d\vartheta_z}{d\vartheta_z}\vartheta_z} \tag{6}$$

und daher

$$V_r = -\frac{1}{2}\Sigma\overline{M_x\vartheta_x + M_y\vartheta_y + M_z\vartheta_z}. \tag{7}$$

Die gesamte mittlere lebendige Kraft während einer genügend großen Zeit wird daher nach (4) und (7)

$$V = -\frac{1}{2}\Sigma\overline{Xx + Yy + Zz} - \frac{1}{2}\Sigma\overline{M_x\vartheta_x + M_y\vartheta_y + M_z\vartheta_z}. \tag{8}$$

Die Gleichung (7) kann auch direkt aus den dynamischen Grundgleichungen hergeleitet werden, ohne auf Gleichung (3) zurückzugreifen. Um die Gleichung (7) etwas durchsichtiger zu gestalten, werden wir das im folgenden kurz tun.

Die allgemeinste Bewegung eines Körpers setzt sich bekanntlich aus einer Rotation um eine durch den Anfangspunkt O des Koordinatensystems gehende Achse und einer fortschreitenden Bewegung des Schwerpunktes zusammen. Die zu den drei Achsen x, y, z parallelen Geschwindigkeitskomponenten der Rotationsgeschwindigkeit eines materiellen Teilchens μ des Körpers sind:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= zq - yr = A & \frac{d\vartheta_x}{dt} &= p \\ \frac{dy}{dt} &= xr - zp = B & \frac{d\vartheta_y}{dt} &= q \\ \frac{dz}{dt} &= yp - xq = C & \frac{d\vartheta_z}{dt} &= r \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Die gesamte mittlere Rotationsenergie unseres Gases ist also

$$V_r = \Sigma\Sigma \overline{\frac{\mu}{2}(A^2+B^2+C^2)}.$$

Die Rotationsenergie eines Moleküls ist

$$\begin{aligned} v_r &= \Sigma \frac{\mu}{2}(A^2+B^2+C^2) \\ &= \Sigma \frac{\mu}{2}\left[\left(\frac{d\vartheta_x}{dt}\right)^2\rho_x^2+\left(\frac{d\vartheta_y}{dt}\right)^2\rho_y^2+\left(\frac{d\vartheta_z}{dt}\right)^2\rho_z^2\right]- \\ &\quad -\mu\left[\frac{d\vartheta_y}{dt}\frac{d\vartheta_z}{dt}yz+\frac{d\vartheta_x}{dt}\cdot\frac{d\vartheta_z}{dt}xz+\frac{d\vartheta_x}{dt}\cdot\frac{d\vartheta_y}{dt}xy\right]. \end{aligned}$$

ρ_x, ρ_y, ρ_z bezeichnen die Größe der Drehungshalbmesser des Teilchens μ bezüglich der Achsen x, y, z.

Aus den Gleichungen (9) folgt

$$\frac{dz}{dt}y - \frac{dy}{dt}z = \frac{d\vartheta_x}{dt}(y^2+z^2) - x\left(\frac{d\vartheta_y}{dt}y+\frac{d\vartheta_z}{dt}z\right), \qquad (10)$$

wozu noch zwei analoge Gleichungen durch zyklische Vertauschung von x, y, z entstehen.

Aus (10) erhalten wir durch Multiplikation mit $\frac{\mu}{2}\frac{d\vartheta_x}{dt}$ die Gleichung:

$$\frac{\mu}{2}\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)\frac{d\vartheta_x}{dt}=$$

$$=\frac{\mu}{2}\left[\left(\frac{d\vartheta_x}{dt}\right)^2\rho_x^2-xy\frac{d\vartheta_y}{dt}\frac{d\vartheta_x}{dt}-xz\frac{d\vartheta_z}{dt}\frac{d\vartheta_x}{dt}\right].$$

Über die Werte der zuletzt aufgeschriebenen Gleichung nehmen wir die Zeitmittelwerte für eine genügend große Zeit τ, d. h.

$$\frac{1}{\tau}\frac{\mu}{2}\int_0^\tau\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)\frac{d\vartheta_x}{dt}dt=$$

$$=\frac{1}{\tau}\frac{\mu}{2}\int_0^\tau\left[\left(\frac{d\vartheta_x}{dt}\right)^2\rho_x^2-xy\frac{d\vartheta_y}{dt}\frac{d\vartheta_x}{dt}-xz\frac{d\vartheta_z}{dt}\frac{d\vartheta_x}{dt}\right]dt. \quad (11)$$

Die linke Seite von (11) können wir durch partielle Integration umformen:

$$\int_0^\tau\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)\frac{d\vartheta_x}{dt}dt=$$

$$=\int_0^\tau y\frac{dz}{dt}\frac{d\vartheta_x}{dt}dt-\int_0^\tau z\frac{dy}{dt}\frac{d\vartheta_x}{dt}dt$$

$$=\left[\vartheta_x y\frac{dz}{dt}\right]_0^\tau-\int_0^\tau\vartheta_x\left(\frac{dy}{dt}\frac{dz}{dt}+y\frac{d^2z}{dt^2}\right)dt-\left[\vartheta_x z\frac{dy}{dt}\right]_0^\tau+$$

$$+\int_0^\tau\vartheta_x\left(\frac{dz}{dt}\frac{dy}{dt}+z\frac{d^2y}{dt^2}\right)dt$$

Also ist:

$$\int_0^\tau\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)\frac{d\vartheta_x}{dt}dt=$$

$$=\left[\vartheta_x\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)\right]_0^\tau-\int_0^\tau\vartheta_x\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)dt. \quad (12)$$

Denken wir uns den zuletzt gefundenen Ausdruck in (11) eingesetzt und ist die Rotation eine stationäre, d. h. liegen die den Bewegungszustand eines Teilchens μ charakterisierenden Größen in einem solchen Bereiche, daß sie nach einer genügend großen Zeit immer wiederkehren, so verschwindet der erste Ausdruck auf der rechten Seite von (12) und wir erhalten demgemäß aus (11), wenn wir über alle Teilchen μ summieren

$$-\frac{1}{2\tau}\Sigma\mu\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)dt=$$

$$=\Sigma\frac{\mu}{2\tau}\int_0^\tau\left[\left(\frac{d\vartheta_x}{dt}\right)^2\rho_x^2-xy\frac{d\vartheta_x}{dt}\frac{d\vartheta_y}{dt}-xz\frac{d\vartheta_x}{dt}\cdot\frac{d\vartheta_z}{dt}\right]dt. \quad (11a)$$

Das Zeichen Σ bezieht sich auf die Summierung über ein Molekül. Zu den zuletzt aufgeschriebenen Gleichungen gibt es zwei analoge Gleichungen bezüglich der y- und z-Achse. Addiert man diese Gleichungen zu (11, 11a) und bedenkt, daß z. B.

$$-\frac{1}{2\tau}\Sigma\int_0^\tau\mu\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)dt$$

als Zeitmittelwert der auf ein Molekül wirkenden äußeren Momente angesehen werden kann, so ergibt sich bei Summation über alle Moleküle der Ausdruck

$$-\frac{1}{2}\Sigma\overline{(M_x\vartheta_x+M_y\vartheta_y+M_z\vartheta_z)}=\Sigma\Sigma\overline{\frac{\mu}{2}(A^2+B^2+C^2)}=V_r,$$

was wir bereits gefunden haben.

Es verdient bemerkt zu werden, daß die Gleichung (7) nach einem bekannten Satze der Mechanik auch richtig bleibt, wenn x, y, z die Koordinaten in einem Achsensystem bedeuten, das mit dem betreffenden Molekül fortschreitet und seinen Ursprung im Schwerpunkte des Moleküls hat. Da sich also ergibt, daß die Rotationsenergie des Gases unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems ist, kann geschlossen werden, daß jede Rotationsachsenrichtung im Raume gleich wahrscheinlich ist.

Nach unserer Annahme wirkt als äußere Kraft der auf die Begrenzungsfläche ω des Gasvolumens v sich gleichmäßig verteilende Druck p pro Flächeneinheit.

Für diesen Druck p geht die Gleichung (7) über in

$$\left.\begin{aligned} V_r = &-\frac{1}{2}\int_\omega p\,d\omega\,[y\cos(nz) - z\cos(ny)]\,\operatorname{arctg}\frac{z}{y} - \\ &-\frac{1}{2}\int_\omega p\,d\omega\,[z\cos(nx) - x\cos(nz)]\,\operatorname{arctg}\frac{x}{z} \\ &-\frac{1}{2}\int_\omega p\,d\omega\,[x\cos(ny) - y\cos(nx)]\,\operatorname{arctg}\frac{y}{x} \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

wobei wir uns erinnern, daß

$$M_x = yZ - zY, \quad M_y = zX - Zx, \quad M_z = xY - yX.$$

n bedeutet die nach innen gezogene Normale der Fläche ω, die Integrale sind über die ganze Fläche ω zu nehmen.

(13) kann auch so geschrieben werden:

$$\left.\begin{aligned} V_r = &-\frac{1}{2}\int_\omega p\,d\omega\cos(nx)\left[z\operatorname{arctg}\frac{x}{z} - y\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right] - \\ &-\frac{1}{2}\int_\omega p\,d\omega\cos(ny)\left[x\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - z\operatorname{arctg}\frac{z}{y}\right] - \\ &-\frac{1}{2}\int_\omega p\,d\omega\cos(nz)\left[y\operatorname{arctg}\frac{z}{y} - x\operatorname{arctg}\frac{x}{z}\right] \end{aligned}\right\} \quad (13a)$$

Nun lautet ein Satz der Mathematik, durch welchen man von einem Oberflächenintegral auf ein Volumintegral übergehen kann:

$$\int_v \frac{\partial F}{\partial x}\,dv = -\int_\omega F\cos(nx)\,d\omega$$

und zwei entsprechende Gleichungen für die y- und z-Achse. Setzen wir F, was eine stetige Funktion bedeuten muß, beziehungsweise gleich den eckigen Klammerausdrücken in (13a), so erhalten wir die folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
-\frac{1}{2}p\int_\omega\left(z\,\mathrm{arctg}\frac{x}{z}-y\,\mathrm{arctg}\frac{y}{x}\right)\cos(nx)\,d\omega &= \\
&= \frac{1}{2}p\int_v\left(\frac{z^2}{z^2+x^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)dv \\
-\frac{1}{2}p\int_\omega\left(x\,\mathrm{arctg}\frac{y}{x}-z\,\mathrm{arctg}\frac{z}{y}\right)\cos(ny)\,d\omega &= \\
&= \frac{1}{2}p\int_v\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{z^2}{y^2+z^2}\right)dv \\
-\frac{1}{2}p\int_\omega\left(y\,\mathrm{arctg}\frac{z}{y}-x\,\mathrm{arctg}\frac{x}{z}\right)\cos(nz)\,d\omega &= \\
&= \frac{1}{2}p\int_v\left(\frac{y^2}{y^2+z^2}+\frac{x^2}{z^2+x^2}\right)dv
\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Addiert man die Gleichungen (14), so erhält man

$$V_r = \frac{3pv}{2}. \quad (15)$$

Die Gleichung (7) gilt, wie schon erwähnt, auch, wenn man die dort vorkommende Summe $\Sigma\,\overline{M_x\vartheta_x+M_y\vartheta_y+M_z\vartheta_z}$ auf jedes einzelne Molekül in Bezug auf ein mit dem Molekül festverbundenes Achsensystem nimmt und über alle Moleküle summiert. Sind die Moleküle Rotationskörperchen, so verschwindet das Produkt $M\vartheta$, das sich auf die Rotationsachse bezieht, z. B. $M_z\vartheta_z$ für jedes Molekül. Daraus erkennt man, daß auch für ein außerhalb der Moleküle liegendes festes Achsensystem, für den Fall, daß die Moleküle Rotationskörperchen sind, die Gleichung (7) die Form

$$V_r = \Sigma\,\overline{M_x\vartheta_x+M_y\vartheta_y} \quad (7a)$$

annehmen kann.

Um aber keinen Zweifel an der Richtigkeit von Gleichung (7*a*) unter den angeführten Umständen aufkommen zu lassen, führen wir folgende Betrachtung durch. Das mit jedem Molekül fest verbundene Achsensystem habe die Bezeichnung x, y, z,

das von der Bewegung der Moleküle unabhängige Achsensystem heiße x', y', z'. Das System x, y, z kann für jedes Molekül gegenüber dem System x', y', z' durch drei Winkel ϑ, f, φ festgelegt werden, von welchen ϑ von Null bis π, f von Null bis 2π, φ von Null bis 2π läuft.[1] Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß für die Achsen x, y, z der Winkel ϑ zwischen ϑ und $\vartheta+d\vartheta$, f zwischen f und $f+df$ und φ zwischen φ und $\varphi+d\varphi$ liegen, ist $\frac{\sin\vartheta\, d\vartheta\, df\, d\varphi}{4\pi}$.

Die Transformationsgleichung für die beiden Achsensysteme lautet beispielsweise für die Momente bezüglich der z'-Achse:

$$\begin{aligned} M_z' = \eta[\cos(xx')X + \cos(xy')Y + \cos(xz')Z] - \\ -\xi[\cos(xy')X + \cos(yy')Y + \cos(zy')Z] + \\ +\cos(zx')M_x + \cos(zy')M_y + \cos(zz')M_z, \end{aligned} \qquad (A)^1$$

worin η, ξ die Koordinaten des Schwerpunktes des herausgehobenen Moleküls im x', y', z'-System bedeuten.

Da nun

$$\left.\begin{aligned} \cos(xx') &= -\cos\varphi\cos f\cos\vartheta - \sin\varphi\sin f \\ \cos(xy') &= -\cos\varphi\sin f\cos\vartheta + \sin\varphi\cos f \\ \cos(xz') &= \cos\varphi\sin\vartheta \\ \cos(xy') &= -\sin\varphi\cos f\cos\vartheta + \cos\varphi\sin f \\ \cos(yy') &= -\sin\varphi\sin f\cos\vartheta - \cos\varphi\cos f \\ \cos(zy') &= \sin\varphi\sin\vartheta \\ \cos(zx') &= \cos f\sin\vartheta \\ \cos(zy') &= \sin f\sin\vartheta \\ \cos(zz') &= \cos\vartheta \end{aligned}\right\} \quad (B)^1$$

[1] Kirchhoff, Vorlesungen über mathem. Physik, Mechanik, fünfte Vorlesung.

so ist der Zeitmittelwert von M_z'

$$\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} M_z' d\tau = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta\, df\, d\varphi\, d\tau}{4} \left\{\begin{array}{l} -\eta X[\cos\varphi\cos f\cos\vartheta - \sin\varphi\sin f] - \\ -\eta Y[\cos\varphi\sin f\cos\vartheta + \sin\varphi\cos f] + \\ +\eta Z[\cos\varphi\sin\vartheta] + \\ +\xi X[\sin\varphi\cos f\cos\vartheta + \cos\varphi\sin f] + \\ +\xi Y[\sin\varphi\sin f\cos\vartheta - \cos\varphi\cos f] - \\ -\xi Z[\sin\varphi\sin\vartheta] + \\ +M_x[\cos f\sin\vartheta] + \\ +M_y[\sin f\sin\vartheta] + \\ +M_z[\cos\vartheta] \end{array}\right\} \qquad (C)$$

Führt man die Integrationen in *(C)* aus, so ergibt sich

$$\frac{1}{\tau}\int M_z' d\tau = \frac{1}{\tau}\int M_z d\tau.$$

Ist aber $\overline{M_z} = 0$ für jedes einzelne Molekül, das heißt sind die Moleküle Rotationskörperchen, so ist auch M_z' für jedes einzelne Molekül gleich 0 und weil im x', y', z'-System für jedes Molekül ϑ_z' als konstant angesehen werden kann, auch $\Sigma \overline{M_z'}\vartheta_z' = 0$, was zu beweisen war.

In (13) verschwindet also, wenn die Moleküle Rotationskörperchen sind, das dritte Integral und wir erhalten nach analoger Ordnung wie früher:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{2}p\int_\omega z\,\operatorname{arctg}\frac{x}{z}\cos(nx)\,d\omega &= \frac{1}{2}p\int_v \frac{z^2}{z^2+x^2}\,dv \\ -\frac{1}{2}p\int_\omega -z\,\operatorname{arctg}\frac{z}{y}\cos(ny)\,d\omega &= \frac{1}{2}p\int_v \frac{z^2}{z^2+y^2} \\ -\frac{1}{2}p\int_\omega \left(y\,\operatorname{arctg}\frac{z}{y}-x\,\operatorname{arctg}\frac{x}{z}\right)\cos(nz)\,d\omega &= \\ = \frac{1}{2}p\int_v \left(\frac{y^2}{y^2+z^2}+\frac{x^2}{z^2+x^2}\right)dv & \end{aligned}\right\} \quad (14a)$$

Durch Addition der Gleichungen in (14a) ergibt sich

$$V_r = pv. \qquad (15a)$$

Sind die Moleküle Kugeln, so wird, wie leicht zu ersehen,

$$V_r = 0. \qquad (15b)$$

Da das Virial der äußeren Kräfte für die fortschreitende Bewegung gleich $\frac{3p}{2}$ ist, so ergibt sich mit Hilfe der bekannten, von Kirchhoff (Vorlesungen über theoretische Physik, Wärme, p. 169) für $\varkappa$ aufgestellten Formel

$$\varkappa = 1+\frac{2}{3}\,\frac{V_f}{V_f+V_r}, \qquad (16)$$

in welcher V_f die Energie der fortschreitenden, V_r die der rotierenden Bewegung ist, unter Voraussetzung der Gültigkeit von (15)

$$\varkappa = 1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = 1{\cdot}33,$$

unter Voraussetzung der Gültigkeit der Gleichung (15a)

$$\varkappa = 1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1{\cdot}5}{2{\cdot}5} = 1{\cdot}4$$

und wenn die Moleküle Kugeln sind,

$$\varkappa = 1{\cdot}66,$$

da dann $V_r = 0$ ist.

Aus dem Vorhergehenden ersehen wir, daß es nicht notwendig ist, um zu den bekannten Werten von $\varkappa$ für einatomige und zweiatomige Gase zu kommen, auf die Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Rotationsgeschwindigkeit eines Moleküls einzugehen, sondern daß diese Werte direkt aus dem erweiterten Virialbegriffe fließen.

Über einige physikalische Eigenschaften der Kolloide

von

Dr. **N. Stücker.**

(Mit 1 Tafel und 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 25. April 1907.)

So sehr sich in den letzten Jahren unsere Kenntnis über das chemische Verhalten der Kolloide erweitert hat, so ist dies mit derjenigen ihrer physikalischen Eigenschaften nicht in demselben Grade der Fall.

Auf Veranlassung von Herrn Prof. Dr. E. Wiedemann habe ich zunächst in Erlangen einige elektrische und optische Eigenschaften kolloidaler Metalle, soweit ich darüber in der Literatur keine Angaben fand, untersucht; und zwar stellte ich meine Beobachtungen an Silber und Gold (letzteres in der roten und blauen Modifikation) sowohl in festem als auch in gelöstem Zustand an. Über die Darstellung der von mir benützten Metalle finden sich die erforderlichen Angaben in den Arbeiten von Herrn Prof. Dr. Paal,[1] welcher mir auch die Kolloide zu meinen Untersuchungen in liebenswürdigster Weise zur Verfügung stellte, wofür ich ihm auch an dieser Stelle meinen besten Dank ausspreche.

Zur Untersuchung der elektrischen und optischen Eigenschaften der kolloidalen Metalle mußten von denselben möglichst gleichförmige Schichten auf Glasplatten aufgetragen werden. Um dies zu erreichen, verfuhr ich folgendermaßen: Ich löste die Metalle in warmem Wasser, welchem einige Tropfen Ammoniak

---

[1] »Über kolloidales Silber«, Ber. der Deutschen chem. Ges., *35*, 2224 (1902), und »Über kolloidales Gold«, ebenda, *35*, 2236 (1902).

zugesetzt waren, und goß die Lösung auf eine Glasplatte, auf welcher sie sodann vorsichtig zur Trockene eingedampft wurde. Leider war die Schicht, insbesondere beim Silber, oft ungleichmäßig, ein Umstand, der die Genauigkeit dieser Versuche beeinträchtigte. Die Dicke der Metallschicht wurde aus Wägungen gefunden.

Das elektrische Leitungsvermögen der Kolloide.

Um zu untersuchen, ob die festen, auf Glas niedergeschlagenen Kolloide ein elektrisches Leitungsvermögen besitzen,

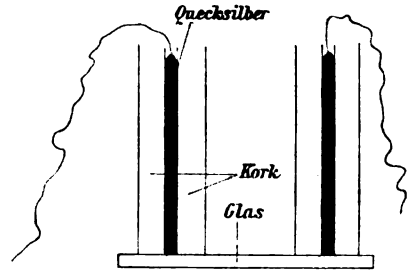


Fig. 1.

verwendete ich eine dicke Glasplatte von 3 *cm* Breite und 8 *cm* Länge, die anhaftende Metallschicht hatte eine Dicke von 0·0008 *mm*. An den beiden Enden derselben (siehe die Figur) waren zwei durchbohrte Korke befestigt, in welche Quecksilber gegossen wurde. Die ganze Vorrichtung wurde sodann in einen elektrischen Stromkreis von 220 Volt Spannungsdifferenz eingeschaltet; da sich unter diesen Umständen selbst bei einem empfindlichen Galvanometer kein Ausschlag zeigte, so war die Leitfähigkeit eine sehr kleine. Dies kann davon herrühren, daß die einzelnen kolloidalen Metallteilchen durch das Eiweiß voneinander isoliert sind. Nehmen wir als Grenze für einen eben bemerkbaren Ausschlag 1 *mm* an, so lag demnach die Leitungsfähigkeit der Platte unter 6.10^{-7}, wenn die Empfindlichkeit des Galvanometers $2 \cdot 8.10^{-5}$ betrug. Spätere Versuche in Graz ergaben, daß die Leitfähigkeit von der Größenordnung 10^{-11} war.

Das optische Verhalten der Kolloide.

Da von den optischen Eigenschaften dieser Substanzen die diffuse Reflexion und die hiebei auftretenden Polarisationserscheinungen bereits früher eingehend untersucht worden sind (die Arbeit von Vannino habe ich erst lange nach Abschluß der meinigen zu Gesicht bekommen), so habe ich die elliptische Polarisation an der Oberfläche fester Kolloide sowie die Absorption in festen und gelösten Kolloiden ermittelt.

A. Die elliptische Polarisation.

Die Messungen über elliptische Polarisation führte ich mit dem Babinet'schen Kompensator aus, und zwar, da es sich hier nur um Orientierungsversuche handelt, für rotes, gelbes und grünes Licht, wobei eine Lithium-, Natrium- und Thaliumflamme als Lichtquellen dienten. Dabei wurden die Werte für den Haupteinfallswinkel Φ und das Hauptazimut A ermittelt. Mit Hife der bekannten Formeln[1] berechnete ich hieraus den Brechungsexponenten, das Reflexionsvermögen und den Extinktionskoeffizienten.

Für das Absorptionsvermögen ergibt sich:

$$\varkappa = \frac{\operatorname{tg} 2A}{1 + \frac{\sin^2\Phi}{n^2(1+\varkappa^2)}}$$

oder näherungsweise, indem wir den Nenner gleich 1 setzen,

$$\varkappa = \operatorname{tg} 2A.$$

Für den Brechungsexponenten und das Reflexionsvermögen erhalten wir:

$$n = \frac{\sin\Phi \operatorname{tg}\Phi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2A}}.$$

$$R = \frac{1+n^2(1+\operatorname{tg}^2 2A)-2n}{1+n^2(1+\operatorname{tg}^2 2A)+2n}.$$

[1] Kohlrausch, Lehrbuch der praktischen Physik, p. 298.

Außerdem sei der Extinktionskoeffizient $g = n\varkappa$. Experimentell ist g durch folgende Formel gegeben:

$$g = \frac{\lambda}{4\pi d \log e} \log \frac{J}{J'},$$

worin J die Intensität des eintretenden, J' die des austretenden Lichtes, λ die Wellenlänge im Vakuum und d die Dicke der absorbierenden Schicht bedeuten; λ ist in Mikron, d in Zentimetern gemessen.[1]

B. Der Extinktionskoeffizient.

Die Messungen führte ich mit dem Spektrophotometer von Glan aus; bei der Untersuchung wurde genau nach der in dem Buche von Wiedemann-Ebert angegebenen Methode verfahren. Die beiden Spalte wurden durch eine Nernstlampe gleichmäßig beleuchtet und mittels eines Stativs die beiden Schichten vor den Spalthälften befestigt. Für die Versuche mit Flüssigkeiten verwendete ich einen Glastrog mit einem sogenannten Schulz'schen Körper. Hiebei zog ich diejenige Schichtdicke d in Rechnung, welche dem Metall eigen wäre, wenn es sich in festem Zustande befände. Es seien p Gramm des Metalles in v Kubikzentimetern Wasser gelöst, s sei das spezifische Gewicht des Metalles und δ die Dicke der Lösung, so ist

$$d = \delta \frac{p}{sv}.$$

Die Messungen an festen Kolloiden sind weit weniger zuverlässig als die an flüssigen, da es kaum möglich war, stets gleiche Oberflächen herzustellen; auch haben sich bei der Dickenbestimmung mancherlei Schwierigkeiten ergeben.

Um eine Kontrolle über die Versuchsresultate zu erhalten, habe ich von jedem Metall zwei Reihen von Beobachtungen mit verschieden konzentrierten Lösungen und verschieden

[1] Zunächst wurden die von Prof. E. Wiedemann untersuchten Kupfer- und Messingspiegel nochmals geprüft, die Konstanten der elliptischen Polarisation ermittelt und mit den früher gefundenen Werten gut übereinstimmend gefunden.

dicken Schichten ausgeführt; dieselben ergaben gute Übereinstimmung (vergl. Tabelle 2). Die so gewonnenen Resultate sind in den folgenden Tabellen zusammengestellt, und zwar für die Versuche mit Silber, rotem und blauem Golde, wobei ein jedes in festem und gelöstem Zustande untersucht wurde.[1] Die weiteren Tabellen geben eine Übersicht über die Werte von Φ, A, n, R und g (letzteres beobachtet und berechnet). In Tabelle 3 befinden sich sämtliche Daten einer Beobachtungsreihe für rotes gelöstes Gold, in Tabelle 4 endlich die Mittelwerte von g für alle untersuchten Metalle. Die Kurven auf der Tafel enthalten eine graphische Darstellung der für die Extinktionskoeffizienten gefundenen Werte.

Diskussion der Versuchsdaten.

A. Die elliptische Polarisation.

Die optischen Konstanten, welche bei den meisten Metallen nur wenig voneinander abweichen, haben gerade bei den Edelmetallen sehr verschiedene Werte; so z. B. ist der Brechungsexponent sehr klein, während das Reflexionsvermögen den Betrag von 90% erreicht. Diese Eigenschaften treffen wir jedoch bei diesen Metallen in der kolloidalen Modifikation nicht an. Ihre Haupteinfallswinkel sind nahezu gleich denen der Metalle in gewöhnlichem Zustande, ihre Hauptazimute hingegen bedeutend kleiner; dies hat nun wieder ein Zunehmen des Brechungsindex sowie ein Abnehmen des Reflexionsvermögens zur Folge. Das Reflexionsvermögen erreicht für rotes Gold im gelben Lichte sein Maximum, beim Silber nimmt es mit abnehmender Wellenlänge überhaupt zu. Die beiden Modifikationen des Goldes weichen in ihren Werten nicht wesentlich voneinander ab. Beim blauen Golde konnte ich wegen der schlechten Beschaffenheit meiner Spiegel nur für gelbes Licht einigermaßen verläßliche Werte erhalten.

---

[1] Da von vielen, besonders älteren Forschern nicht der Extinktionskoeffizient, sondern die Absorptionskonstante $a = \frac{1}{d} \log \frac{J}{J'}$ angegeben ist, so teile ich auch die Werte für diese Größe mit.

Tabelle 1.

Elliptische Polarisation.

Metall		Licht	Beobachter	Φ	A	n	R	$g(=n\varkappa)$	
								berechnet	beobachtet
Silber	gewöhnlich	gelb	Drude	75°42'	43°35'	0·18	95·3	—	3·67
	kolloidal	rot	Verfasser	65°	18°	1·57	21	1·23	0·63
		gelb	»	68°	20°	1·76	28	1·48	0·90
		grün	»	71°	22·5°	1·94	38	1·94	1·33
	gewöhnlich	gelb	Quincke	75°	43·6	0·18	95	2·9	—
		»	Jamin	—	—	—	—	2·8	—
		»	Hag. und Rub.	—	—	0·31	92·6	—	4·12
		»	Wernike	—	—	—	—	—	3·26
Gold	kolloidal, rote Modifikation	rot	Verfasser	68°	27·5°	1·32	41	1·87	1·37
		gelb	»	70°	27·5°	1·48	44	2·01	1·67
		grün	»	67°	25·5°	1·36	35	1·68	1·19
	kolloidal, blaue Modifikation	gelb	»	70°	23°	1·33	27	1·85	1·42
	gewöhnlich	»	Quincke	73°	41·6°	0·38	90	2·5	—
		»	Drude	72°18'	41°39'	0·37	85·1	2·82	—
		»	Hag. und Rub.	—	—	0·66	84·4	—	2·82

Tabelle 2.

Übersicht über die Werte für a und g bei verschiedener Konzentration, beziehungsweise Schichtdicke.

a) **Silber (fest).**

Zwei Beobachtungsreihen.

λ in μ gemessen	a			g		
	I	II	Mittel	I	II	Mittel
0·708	4·7545	4·8074	4·781	0·563	0·571	0·57
674	5·4418	5·5774	5·510	0·614	0·629	0·62
647	6·3326	6·4983	6·415	0·684	0·702	0·69
619	7·4599	7·4946	7·477	0·766	0·778	0·77
595	8·5398	8·7368	8·638	0·851	0·870	0·86
580	10·1030	10·0609	10·082	0·981	0·977	0·98
562	11·8043	11·7832	11·794	1·110	1·108	1·11
531	15·1761	15·4989	15·337	1·349	1·377	1·36
503	21·9655	22·0656	22·016	1·849	1·858	1·85
486	—	—	—	—	—	2·35
470	—	—	—	—	—	4·45

b) **Silber (gelöst).**

Zwei Beobachtungsreihen.

λ in μ gemessen	a			g		
	I	II	Mittel	I	II	Mittel
0·708	—	1·0544	1·054	—	0·137	0·137
674	1·1444	1·1311	1·139	0·142	0·140	0·141
647	1·2504	1·2569	1·254	0·148	0·149	0·149
619	1·5031	1·5144	1·509	0·171	0·172	0·171
595	2·1468	2·1659	2·156	0·234	0·236	0·235
580	2·7647	2·7254	2·745	0·294	0·290	0·292
562	3·8005	3·8327	3·817	0·392	0·396	0·394
531	6·0690	5·9710	6·013	0·591	0·582	0·587

Tabelle 3.

Beobachtete Daten und aus denselben berechnete Werte von a und g für rotes Gold in gelöstem Zustande.[1]

λ (in μ)	φ	a	g
0·708	41°42'	2·0746	0·270
674	39°5'	3·7382	0·462
647	38°16'	4·2633	0·505
619	37°18'	4·8897	0·555
595	34°19'	6·6388	0·725
580	31°49'	8·5790	0·913
568	27°28'	11·7581	1·226
555	20°16'	17·9040	2·000
531	11°26'	28·7243	2·799
	Maximum:		
508	10°20'	30·5863	2·908
503	16°15'	22·1560	1·999
486	20°17'	17·8888	1·596
470	24°54'	13·7927	1·190
446	27°1'	11·5604	0·946
419	30°12'	9·7274	0·748
402	32°40'	7·9878	0·589

[1] Verhältnis des Goldgehaltes zum Gewicht der Lösung = 1 : 6000. δ (Dicke des Schulz'schen Körpers) = 0·464.

Tabelle 4.

Übersicht über die Werte von g.

λ (in μ)	Silber		Gold (rote Modifikation)		Gold (blaue Modifikation)	
	gelöst	fest	gelöst	fest	gelöst	fest
0·758	—	—	—	—	—	0·92
708	0·14	0·57	0·26	0·62	1·05	1·08
674	0·14	0·62	0·44	1·20	1·26	1·16
647	0·15	0·69	0·49	2·40	1·48	—
619	0·17	0·77	0·55	2·04	1·29	1·22
595	0·24	0·86	0·73	1·72	1·16	1·39
580	0·29	0·98	0·92	1·59	1·06	1·47
568	0·39	1·11	1·23	1·45	0·89	1·35
555			2·00			
531	0·59	1·36	2·81	1·15	0·64	1·04
503	—	1·85	2·00	0·78	0·41	0·84
486	—	2·35	1·57	0·51	0·10	0·78
470	—	4·45	1·19	0·38	0·04	0·71
446	—	—	0·93	—	0·13	0·60
419	—	—	0·74	—	0·29	0·33
397	—	—	0·58 [1]	—	0·58	0·48

[1] $\lambda = 0{\cdot}402\ \mu$.

B. Die Extinktionskoeffizienten.

Im folgenden sollen die Extinktionskoeffizienten an der Hand der nach ihnen konstruierten Kurven sowie die auftretenden Farben der festen Körper und Lösungen näher besprochen werden:

1. Silber. Bei demselben verlaufen die Kurven für den gelösten und festen Zustand ziemlich ähnlich. Beide steigen vom Rot bis gegen die *C*-Linie fast unmerklich, sodann wächst der Extinktionskoeffizient mit abnehmender Wellenlänge unverhältnismäßig stark, die Beobachtungen reichen nur bis zur *F*-Linie, da die allzugroße Absorption die Versuche im Violett unmöglich machte.

2. Gold, rote Modifikation. Im Gegensatze zu Silber zeigen hier die Kurven für den gelösten und festen Zustand große Verschiedenheiten. Die Kurve für den ersteren steigt im Rot stärker, bleibt im Orange mehr konstant, steigt sodann von der *D*-Linie bis jenseits der *E*-Linie, wo sich das Maximum befindet, um das Vierfache ihrer Höhe, um bei der *F*-Linie wieder auf die gleiche Höhe wie bei der *D*-Linie herabzusinken. Die Kurve für das feste Gold hingegen steigt rasch zu einem Maximum im Orange und fällt dann allmählich gegen das Violett hin. Die Verschiedenheit dieser beiden Kurven ist durch die Farbe der Modifikation bedingt: Im durchgehenden Lichte ist das erstere rubinrot, das letztere blau, im reflektierten aber olivengrün, beziehungsweise goldgelb. Da das rote Gold beim Eindampfen einen Farbenumschlag in Blau aufweist, so müßte eine solche Schicht durch Zuführen von Feuchtigkeit wieder rot werden. Dies war nun in der Tat bei einigen Metallspiegeln der Fall, die durch Anhauchen sofort rot wurden und, nachdem die gebildeten Wassertröpfchen verdampft waren, wieder ihre ursprüngliche blaue Farbe zeigten. Bei einigen Spiegeln trat jedoch der erwähnte Farbenumschlag nur von Blau in Rot ein, welche dann eine violette Farbe beibehielten, während andere, besonders solche, die schon auf sehr hohe Temperaturen erhitzt worden waren, ihre Farbe überhaupt nicht veränderten. Endlich erhielt ich beim Eindampfen der Goldlösung einmal einen Spiegel von grüner Farbe im durchscheinenden Lichte

welcher hierin an das gewöhnliche Metall erinnert; mit diesem gemeinsam hatte er auch die Eigenschaft, sich in Wasser oder Ammoniak nicht mehr aufzulösen. Wegen der Ungleichmäßigkeit dieses Spiegels konnte ich jedoch nur eine ungefähre Angabe des Extinktionskoeffizienten geben.

3. Gold, blaue Modifikation. Die Kurve für das gelöste Gold zeigt ein ausgeprägtes Maximum im Orange und ein auffallend tiefes Minimum im Blau, während sie gegen das Violett hin wieder rasch steigt. Die Kurve für das feste Gold ist die konstanteste aller besprochenen; sie steigt ganz langsam bis ins Gelb und sinkt wieder allmählich gegen das Ende des sichtbaren Spektrums. Eigentümlich ist die

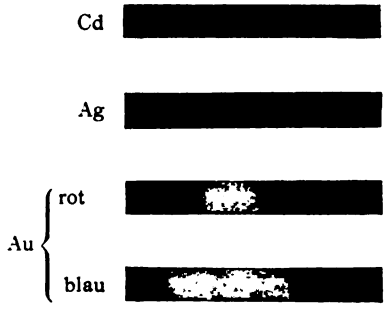


Fig. 2.

Erscheinung, daß beim roten festen und beim blauen gelösten Golde das Maximum im Orange liegt, beim blauen festen Golde aber im Gelb, obwohl alle drei Modifikationen im durchgehenden Lichte dieselbe Farbe, nämlich die blaue, zeigen. Im reflektierten Lichte ist das blaue gelöste Gold dunkelbraun, das feste goldgelb mit einem Stich ins Braun.

Die im vorhergehenden besprochenen Erscheinungen über die Absorption werden bestätigt durch die photographischen Aufnahmen ihrer Spektren, welchen ich das Funkenspektrum des Cadmiums als Vergleichsspektrum beigefügt habe. Das Silber, welches die roten, nicht aber die grünen Strahlen hindurchläßt, zeigt fast gar keine hellen Stellen, da die roten Strahlen die Platte nicht angreifen und im Grün die Absorption sehr groß ist; erst im Blau findet ein Durchgang des Lichtes

Oberflächenfarben fester Kolloide.

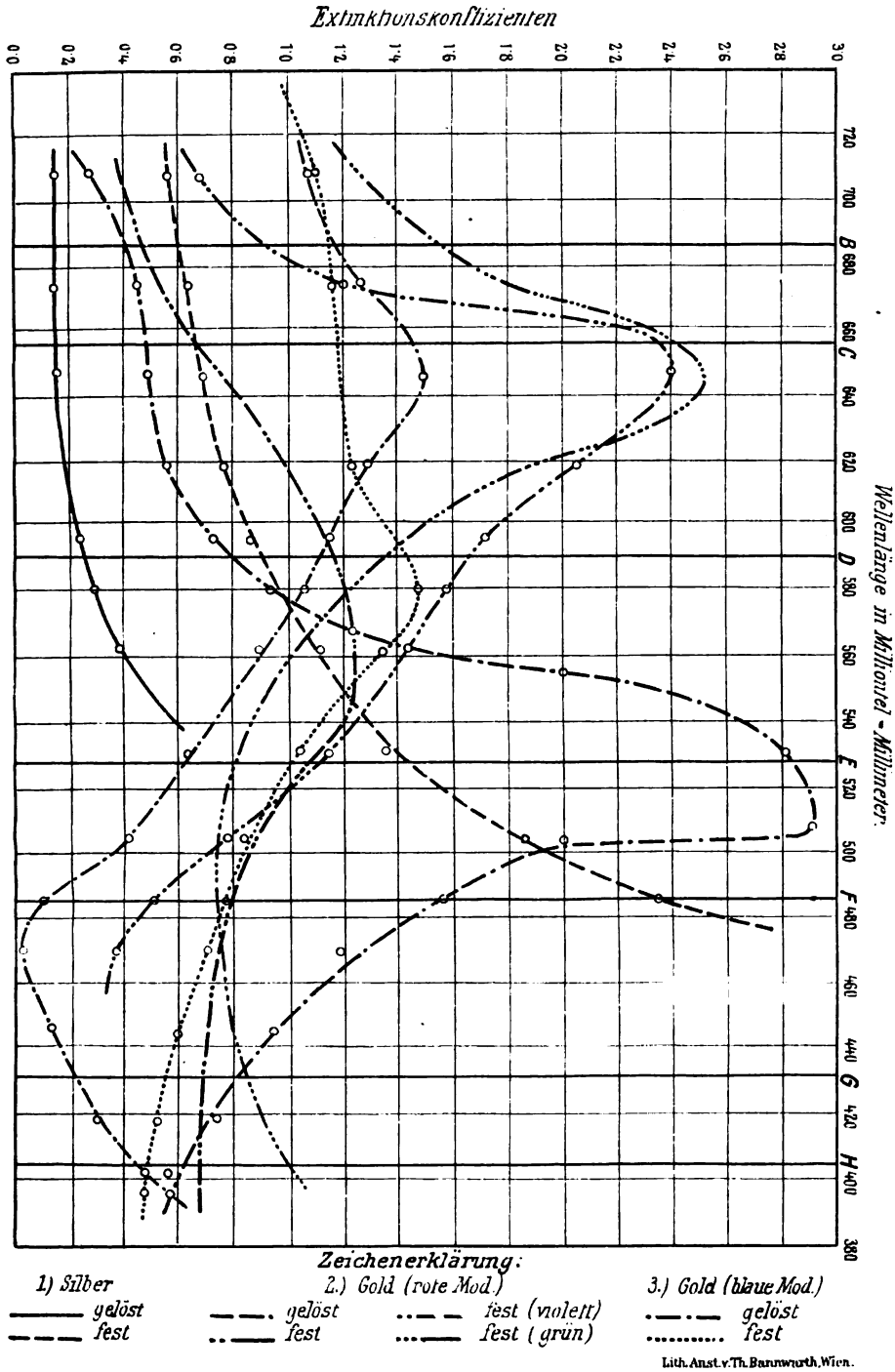
Licht	Umgebende Flüssigkeit	Mit oder ohne dichroskopische Lupe betrachtet	Polarisationsrichtung in Bezug auf die Einfallsebene	Silber		Gold (rote Modifikation)		Gold (blaue Modifikation)	
				Einfallswinkel					
				klein	groß	klein	groß	klein	groß
durchgehend	—	—	—	rotbraun		blau [1]		blau	
reflektiert	—	— dichroskop. Lupe	— parallel / senkrecht	silberweiß / grau / indigo	silberweiß / grauviolett / graugrün	goldgelb / gelb / gelb	goldgelb / grün / rosa	goldgelb / goldgelb / lichtbraun	goldgelb / gelbgrün / grau
	Benzin	— dichroskop. Lupe	— parallel / senkrecht	blaugrau / blaßviolett / indigo	blau / grau / blaßblau	gelb / gelb / gelb	grün / blaugrün / blaugrün	goldgelb / goldgelb / lichtbraun	rosa / blaugrün / grau
	Toluol	— dichroskop. Lupe	— parallel / senkrecht	blau / blau / grau	blau / violett / graugrün	gelb / braun / gelb	grün / gelb / blaugrün	goldgelb / goldgelb / lichtbraun	rosa / blaugrün / grau
	Schwefelkohlenstoff	— dichroskop. Lupe	— parallel / senkrecht	blau / blaßblau / indigo	blau / grauviolett / dunkelgrün	gelbgrün / gelb / gelb	gelbgrün / blaugrün / gelbgrün	goldgelb / goldgelb / lichtbraun	rosa / blaugrün / schwarz
	Terpentinöl	— dichroskop. Lupe	— parallel / senkrecht	indigo / blaßblau / grau	indigo / grau / schwarz	gelbgrün / gelbgrün / gelbgrün	gelbgrün / gelb / grün	goldgelb / goldgelb / lichtbraun	rosa / blaugrün / blau

[1] Mit Abstufungen ins Violett und Karmin sowie ins Grün.

statt. Das Gold in roter Modifikation besitzt für die roten und gelben Strahlen eine große Durchlässigkeit; die starke Absorption im Grün zeigt sich auch hier wieder sehr deutlich. Die blaue Modifikation läßt in dem Spektralgebiet vom Orange bis zum Blau überall fast gleich viel Licht hindurch, was mit der verhältnismäßig geringen Absorptionsverschiedenheit für die verschiedenen Wellenlängen zusammenhängt. Die Fig. 2 zeigt uns die eben besprochenen Erscheinungen.

Auf p. 782 gebe ich eine Übersicht über die Oberflächenfarben der festen Kolloide, wenn dieselben von verschiedenen Flüssigkeiten umgeben sind, und zwar sowohl mit als auch ohne dichroskopische Lupe betrachtet; man sieht deutlich die bei verschiedenen Einfallswinkeln auftretenden Farbenunterschiede.

Zum Schlusse erlaube ich mir, meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. E. Wiedemann sowie Herrn Prof. Dr. Reiger, welche mich bei meinen Versuchen in Erlangen mit ihrem Rate unterstützten, meinen aufrichtigsten Dank auszusprechen. Leider konnte ich die Arbeit in dem Erlanger Institute nicht zum Abschluß bringen; daher danke ich auch verbindlichst Herrn Hofrat Dr. L. Pfaundler, welcher mir zur Anstellung der endgültigen Messungen bereitwilligst sein Laboratorium zur Verfügung stellte.


Extinktionskonstizienten
0·0
0·2
0·4
0·6
0·8
1·0
1·2
1·4
1·6
1·8
2·0
2·2
2·4
2·6
2·8
3·0
720
700
B 680
660
C 640
620
600
D 590
560
540
E 520
500
F 480
460
440
G 420
H 400
380
Wellenlänge in Millionstel-Millimeter.
Zeichenerklärung:
1) Silber
gelöst
fest
2.) Gold (rote Mod.)
gelöst
fest
fest (violett)
fest (grün)
3.) Gold (blaue Mod.)
gelöst
fest
Lith. Anst. v. Th. Bannwarth, Wien.

Über die Legendre'schen Symbole für quadratische Reste in einem imaginären quadratischen Zahlkörper mit der Klassenanzahl 1

von

E. Dintzl.

(Vorgelegt in der Sitzung am 2. Mai 1907.)

1.

Sowie für kubische und biquadratische Reste im Gebiete der aus den dritten und vierten Einheitswurzeln gebildeten Zahlen lassen sich auch für quadratische Reste in einem beliebigen imaginären quadratischen Zahlkörper, sofern nur seine Klassenanzahl 1 ist, Legendre'sche Symbole definieren und durch elliptische Funktionen darstellen.[1] Scheibner leitete das allgemeine quadratische Reziprozitätsgesetz für diese Symbole mit Hilfe der Jacobi'schen Funktion tg am u her. Er beschränkte sich hiebei jedoch auf sogenannte normale binomische Zahlen, das sind ganze komplexe Zahlen von der Form $a+b\tau$, wo τ die Basis des betreffenden Körpers bedeutet und $a \equiv 1 \pmod 2$, $b \equiv 0 \pmod 2$ ist. Für den besonderen Fall des kubischen Kreisteilungskörpers leitet auch

---

[1] Eisenstein, Applications de l'algèbre à l'arithmétique transcendante. Crelle's Journal, Bd. 29; v. Dantscher, Bemerkungen zum analytischen Beweise des kubischen Reziprozitätsgesetzes, Math. Annalen, Bd. XII; Scheibner, Zur Theorie des Legendre-Jacobi'schen Symbols $\left(\frac{n}{m}\right)$, Abhandlung II im XXVII. Bande der Abhandl. der math.-phys. Klasse der königl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften; Mertens, Über die Darstellung der Legendreschen Symbole der biquadratischen kubischen und bikubischen Reste durch Thetareihen. Diese Sitzungsberichte, Bd. CXV, Abt. IIa, Okt. 1906.

Mertens das quadratische Reziprozitätsgesetz mittels der aus den Thetareihen gebildeten Funktion $\frac{\vartheta_1^3(x)}{\vartheta_0(x)\vartheta_2(x)\vartheta_3(x)}$ ab.

Im folgenden werden aus der Transformation der Weierstraß'schen $\wp$- und σ-Funktionen[1] Darstellungen der Legendreschen Symbole für quadratische Reste zunächst unter Zugrundelegung eines beliebigen quadratischen Zahlkörpers mit der Klassenanzahl 1, sodann für die speziellen Körper $k(\sqrt{-1})$, $k(\sqrt{-3})$ und insbesondere für $k(\sqrt{-2})$ hergeleitet.

2.

Es bedeute D eine ganze rationale negative Zahl, die durch kein Quadrat außer 1 teilbar ist. Die quadratische Gleichung

$$x^2 - D = 0$$

bestimmt dann einen imaginären quadratischen Zahlkörper $k(\sqrt{D})$. Als Basis dieses Körpers können die beiden Zahlen:

$$1, \tau = \frac{\sigma - 1 + \sqrt{D}}{\sigma}$$

gelten, wo $\sigma = 2$ oder 1 ist, je nachdem $D \equiv 1 \pmod 4$ ist oder nicht.

Das Periodenverhältnis der hier zur Anwendung kommenden elliptischen Funktionen sei, wenn 2ω und $2\omega'$ die beiden Perioden bezeichnen:

$$\frac{\omega'}{\omega} = \tau = \frac{\sigma - 1 + \sqrt{D}}{\sigma}.$$

Bedeuten ferner $\mathfrak{p} = a + b\tau$ eine ungerade komplexe Primzahl des Körpers und

$$\mathfrak{p}' = a + b\tau', \quad p = \mathfrak{p}\mathfrak{p}' = a^2 + \frac{2(\sigma-1)}{\sigma} ab - \frac{D - (\sigma-1)^2}{\sigma^2} \cdot b^2$$

$$\left(\tau' = \frac{\sigma - 1 - \sqrt{D}}{\sigma}\right),$$

[1] Die Bezeichnungen sind der von Schwarz herausgegebenen Sammlung von »Formeln und Lehrsätzen zum Gebrauche der elliptischen Funktionen nach Vorlesungen von Weierstraß« entnommen.

deren Konjugierte, beziehungsweise Norm, so lassen sich stets zwei ganze rationale Zahlen c und d so bestimmen, daß:

$$2\tilde{\omega} = a.2\omega+b.2\omega', \quad 2\tilde{\omega}' = c.2\omega+d.2\omega' \qquad (ad-bc = 1)$$

ein primitives Periodenpaar bilden. Das neue Periodenverhältnis:

$$\frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}} = \frac{c+d\tau}{a+b\tau} = \frac{l+\tau}{p}$$

$$\left(l = ac + \frac{2(\sigma-1)}{\sigma}bc - \frac{D-(\sigma-1)^2}{\sigma^2}bd\right)$$

genügt sowie das ursprüngliche der Bedingung, daß der imaginäre Bestandteil positiv ist.

Aus den allgemeinen Eigenschaften der Funktion:

$$\sigma(u;\omega,\omega') = u.\Pi'\left(1-\frac{u}{w}\right)e^{\frac{u}{w}+\frac{1}{2}\cdot\frac{u^2}{w^2}}$$

$$\left\{\begin{array}{c} a,b = 0,\pm 1,\pm 2,\ldots\pm\infty \\ w = a.2\omega+b.2\omega' \\ \text{ausgenommen } w = 0 \end{array}\right\}$$

folgt daher:

$$\sigma(\mathfrak{p}u;\omega,\omega') = \sigma(\mathfrak{p}u;\tilde{\omega},\tilde{\omega}') = \mathfrak{p}.\sigma\left(u;\frac{\tilde{\omega}}{\mathfrak{p}},\frac{\tilde{\omega}'}{\mathfrak{p}}\right)$$

$$= \mathfrak{p}.\sigma\left(u;\omega,\frac{l\omega+\omega'}{p}\right).$$

Da auch $2\omega = 2\bar{\omega}$, $l.2\omega+2\omega' = 2\bar{\omega}'$ ein primitives Periodenpaar bilden, so liefert die allgemeine Transformation p^{ter} Ordnung folgende Produktdarstellung:

$$\sigma(\mathfrak{p}u;\omega,\omega') =$$

$$= \mathfrak{p}.e^{\mathfrak{G}u^2}.\sigma(u).\Pi_h \frac{\sigma\left(\frac{h.2\bar{\omega}'}{p}-u;\bar{\omega},\bar{\omega}'\right).\sigma\left(\frac{h.2\bar{\omega}'}{p}+u;\bar{\omega},\bar{\omega}'\right)}{\sigma^2\left(\frac{h.2\bar{\omega}'}{p},\bar{\omega},\bar{\omega}'\right)}$$

$$\mathfrak{G} = \Sigma_h \wp\left(\frac{h.2\bar{\omega}'}{p},\bar{\omega},\bar{\omega}'\right) \qquad h = 1,2,\ldots\frac{p-1}{2}$$

oder, da $\frac{\bar{\omega}'}{p} = \frac{\tilde{\omega}'}{\mathfrak{p}} = \frac{c+d.\tau}{\mathfrak{p}}$ ist und $(\bar{\omega}, \bar{\omega}')$ durch (ω, ω') ersetzt werden können,

$$\sigma(\mathfrak{p}u;\, \omega, \omega') = C.e^{\mathfrak{G}u^2}.\sigma(u).\Pi_h \sigma\left(u + \frac{h(c+d\tau)}{\mathfrak{p}} \cdot 2\omega;\, \omega, \omega'\right)$$

$$C = \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}.\mathfrak{p}}{\Pi_h \sigma^2\left(\frac{h.2\tilde{\omega}'}{\mathfrak{p}}\right)} \qquad h = \pm 1, \pm 2, \ldots \pm \frac{p-1}{2}.$$

Wenn h ein anderes Restesystem mod $\mathfrak{p}$ durchläuft, so daß sich stets je zwei Reste bloß durch das Zeichen voneinander unterscheiden, so ändert sich in der obigen Formel nur der Wert der Konstanten C. Insbesondere kann man $h(c+d\tau)$ durch $h\tau$ ersetzen und erhält:

$$\sigma(\mathfrak{p}u) = C.e^{\mathfrak{G}u^2}\sigma(u).\Pi_h \sigma\left(u + \frac{h.2\omega'}{\mathfrak{p}},\, \omega, \omega'\right). \qquad (1)^1$$

Vermöge der Gleichung:

$$\wp(u) - \wp(v) = \frac{\sigma(v-u).\sigma(v+u)}{\sigma^2(u)\sigma^2(v)}$$

kann man (1) auch derart umformen:

$$\sigma(\mathfrak{p}u;\, \omega, \omega') = \mathfrak{p}.e^{\mathfrak{G}u^2}.\sigma^p(u).\Pi_h \left\{\wp(u) - \wp\left(\frac{h.2\omega'}{p}\right)\right\}.$$

Daher hat die Funktion:

$$f(u) = e^{-\mathfrak{G}u^2}\frac{\sigma(\mathfrak{p}u)}{\sigma(u)^p}$$

die Perioden $2\omega, 2\omega'$. Daraus kann man Ausdrücke zur Berechnung von $\mathfrak{G}$ ableiten; so folgt z. B. aus $f(u+2\omega) = f(u)$:

$$\mathfrak{G}\omega^2 = \frac{1}{2}(a\eta + b\eta')(a\omega + b\omega') - \frac{1}{2}p\eta\omega, \qquad (2)$$

---

[1] Die Herleitung dieser Formel ist dem von Mertens zur Darstellung von $\vartheta_1(\mathfrak{p}u)$ angewandten Verfahren nachgebildet. Scheibner gewinnt den Ausdruck durch Umformung der Produktformel für $\sigma(u)$.

wo

$$\eta = \frac{\sigma'(\omega)}{\sigma(\omega)}, \quad \eta' = \frac{\sigma'(\omega')}{\sigma(\omega')}$$

bedeuten.

In den aus den vierten und dritten Einheitswurzeln gebildeten Körpern $k(\sqrt{-1})$ und $k(\sqrt{-3})$, wo $\tau = i$ und $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $\omega' = \tau\omega$, $\eta' = \tau'\eta$ ist,[1] folgt mit Hilfe der Legendreschen Relation $\eta'\omega - \eta\omega' = \frac{1}{2}\pi i$ insbesondere:

$$\mathfrak{G} = 0.$$

Für eine ungerade reelle Primzahl q des betreffenden Körpers $k(\sqrt{D})$ gilt eine ähnliche Gleichung wie (1). Denn aus

$$\sigma(qu, \omega, \omega') = q.\sigma\left(u; \frac{\omega}{q}, \frac{\omega'}{q}\right)$$

erhält man durch zweimalige Transformation q^{ter} Ordnung:

$$\sigma(qu; \omega, \omega') = C.\sigma(u)\Pi_{h,k}\sigma\left(u + \frac{h.2\omega + k.2\omega'}{q}; \omega, \omega'\right)$$

$$h, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm \frac{q-1}{2}; \text{ ausgenommen } h = k = 0.$$

Um auch für $\sigma_1(\mathfrak{p}u; \omega, \omega')$, $\sigma_2(\mathfrak{p}u; \omega, \omega')$, $\sigma_3(\mathfrak{p}u; \omega, \omega')$ analoge Ausdrücke wie für $\sigma(\mathfrak{p}u)$ abzuleiten, ersetze man in (1) u der Reihe nach durch $u+\omega$, $u+\omega'$ und $u+\omega''$ ($\omega'' = \omega+\omega'$). Da $\mathfrak{p}$ eine ungerade komplexe Primzahl bedeutet, so lassen sich die Größen $\mathfrak{p}\omega$, $\mathfrak{p}\omega'$ und $\mathfrak{p}\omega''$ stets auf die Form bringen:

$$\mathfrak{p}\omega = \alpha.2\omega + \beta.2\omega' + \omega_\lambda, \quad \mathfrak{p}\omega' = \alpha'.2\omega + \beta'.2\omega' + \omega_\mu,$$
$$\mathfrak{p}\omega'' = \alpha''.2\omega + \beta''.2\omega' + \omega_\nu,$$

wo α und β ganze rationale Zahlen sind und ω_λ, ω_μ, ω_ν abgesehen von der Reihenfolge mit ω, ω', ω'' übereinstimmen. Bezeichnet man die den ω entsprechenden Werte von $\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}$ mit

[1] Siehe u. a. Burkhardt, Elliptische Funktionen, 2. Teil, § 89 und § 90.

$\eta_\lambda, \eta_\mu, \eta_\nu$, so erhält man aus (2) folgende Ausdrücke, welche für die weitere Rechnung bequemer sind als (2):

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{G}\omega^2 &= 2\left(\alpha\eta+\beta\eta'+\frac{1}{2}\eta_\lambda\right)\left(\alpha\omega+\beta\omega'+\frac{1}{2}\omega_\lambda\right)-\frac{1}{2}p\eta\omega\\
\mathfrak{G}\omega'^2 &= 2\left(\alpha'\eta+\beta'\eta'+\frac{1}{2}\eta_\mu\right)\left(\alpha'\omega+\beta'\omega'+\frac{1}{2}\omega_\mu\right)-\frac{1}{2}p\eta'\omega'\\
\mathfrak{G}\omega''^2 &= 2\left(\alpha''\eta+\beta''\eta'+\frac{1}{2}\eta_\nu\right)\left(\alpha''\omega+\beta''\omega'+\frac{1}{2}\omega_\nu\right)-\frac{1}{2}p\eta''\omega''
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Setzt man in (1) zunächst statt u: $u+\omega$, so erhält man, da

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma(u+\omega_\lambda;\,\omega,\,\omega') = \sigma(\omega_\lambda).e^{\eta_\lambda u}.\sigma_\lambda(u;\,\omega,\,\omega')\\
&\text{und}\\
&\sigma(u+p.2\omega+q.2\omega') =\\
&\qquad = (-1)^{p+q+pq}.e^{2(p\eta+q\eta')(u+p\omega+q\omega')}.\sigma(u)
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

ist:

$$\sigma_\lambda(\mathfrak{p}u) = (-1)^{\alpha+\beta+\alpha\beta}.e^{\mathfrak{G}\omega^2-2(\alpha\eta+\beta\eta')(\alpha\omega+\beta\omega'+\omega_\lambda)}.$$
$$.\sigma(\omega)^{p-1}.\frac{\sigma(\omega)}{\sigma(\omega_\lambda)}.C.e^{\mathfrak{G}u^2}.\sigma_1(u).\Pi_h\sigma_1\left(u+\frac{h.2\omega'}{p}\right). \quad (5)$$

Ersetzt man $\mathfrak{G}\omega^2$ durch seinen Wert aus (3) und berücksichtigt, daß:

$$\sigma(\omega) = e^{\frac{1}{2}\eta\omega}.c_1, \quad c_1 = \frac{1}{\sqrt[4]{e_1-e_3}.\sqrt[4]{e_1-e_2}}$$
$$(e_1 = \wp(\omega),\ e_2 = \wp(\omega''),\ e_3 = \wp(\omega'))$$

ist, so geht (5) über in:

$$\sigma_\lambda(\mathfrak{p}u) = (-1)^{\alpha+\beta+\alpha\beta}.e^{\mathfrak{A}}.c_1^{p-1}.\frac{\sigma(\omega)}{\sigma(\omega_\lambda)}.C.e^{\mathfrak{G}u^2}.\sigma_1(u).$$
$$.\Pi_h\sigma_1\left(u+\frac{h.2\omega'}{p}\right) \quad (6)$$

$$\mathfrak{A} = \alpha(\eta_\lambda\omega-\eta.\omega_\lambda)+\beta(\eta_\lambda\omega'-\eta'\omega_\lambda)+\frac{1}{2}(\eta_\lambda\omega_\lambda-\eta\omega)$$

Ebenso erhält man, wenn man in (1) statt u: $u+\omega'$, beziehungsweise $u+\omega''$ setzt:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\mu(\mathfrak{p}u) &= (-1)^{\alpha'+\beta'+\alpha'\beta'}\cdot e^{\mathfrak{A}'}\cdot c'^{p-1}\cdot\frac{\sigma(\omega')}{\sigma(\omega_\mu)}\cdot C\cdot e^{\mathfrak{G}u^2}\cdot\\ &\qquad\cdot\sigma_3(u)\Pi_h\sigma_3\left(u+\frac{h\cdot 2\omega'}{\mathfrak{p}}\right)\\ \mathfrak{A}' &= \alpha'(\eta_\mu\omega-\eta\omega_\mu)+\beta'(\eta_\mu\omega'-\eta'\omega_\mu)+\\ &\qquad+\frac{1}{2}(\eta_\mu\omega_\mu-\eta'\omega')+\frac{p-1}{2}\cdot i\pi\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

$$\sigma(\omega') = ie^{\frac{1}{2}\eta'\omega'}\cdot c',\qquad c' = \frac{1}{\sqrt[4]{e_2-e_3}\cdot\sqrt[4]{e_1-e_3}}$$

und

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\nu(\mathfrak{p}u) &= (-1)^{\alpha''+\beta''+\alpha''\cdot\beta''}\cdot e^{\mathfrak{A}''}\cdot c''^{p-1}\cdot\frac{\sigma(\omega'')}{\sigma(\omega_\nu)}\cdot C\cdot e^{\mathfrak{G}u^2}\cdot\\ &\qquad\cdot\sigma_2(u)\cdot\Pi_h\sigma_2\left(u+\frac{h\cdot 2\omega'}{\mathfrak{p}}\right)\\ \mathfrak{A}'' &= \alpha''(\eta_\nu\omega-\eta\omega_\nu)+\beta''(\eta_\nu\omega'-\eta'\omega_\nu)+\\ &\qquad+\frac{1}{2}(\eta_\nu\omega_\nu-\eta''\omega'')+\frac{p-1}{4}\cdot i\pi\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

$$\sigma(\omega'') = \sqrt{i}e^{\frac{1}{2}\eta''\omega''}\cdot c'',\qquad c'' = \frac{1}{\sqrt[4]{e_2-e_3}\ \sqrt[4]{e_1-e_3}}$$

Da die Funktion $\wp'(u)$ der Bedingung genügt:

$$\wp'(u) = -2\cdot\frac{\sigma_1(u)\,\sigma_2(u)\cdot\sigma_3(u)}{\sigma^3(u)},$$

so folgt aus der Verbindung der Gleichungen (1), (6), (7) und (8):

$$\wp'(\mathfrak{p}u) = (-1)^\varepsilon\cdot e^A\cdot\left(\frac{1}{2}cc'c''\right)^{p-1}\cdot\wp'(u)\cdot\Pi_h\wp'\left(u+\frac{h\cdot 2\omega'}{\mathfrak{p}}\right)\cdots$$

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{i=3}\alpha^{(i)}+\beta^{(i)}+\alpha^{(i)}\beta^{(i)},\qquad A = \mathfrak{A}+\mathfrak{A}'+\mathfrak{A}''.$$

Da $\eta_i\omega_k-\eta_k\omega_i$ entweder 0, $+\frac{\pi i}{2}$ oder $-\frac{\pi i}{2}$ ist, so ist e^A eine Potenz von i: i^ρ. Endlich läßt sich das Produkt

$cc'c'' = (\sqrt[4]{e_1-e_2}\,\sqrt[4]{e_1-e_3}\,\sqrt[4]{e_2-e_3})^2$ durch $\sqrt[4]{G}$ ersetzen, wo $G = \frac{1}{16}(g_2^3-27g_3^2)$ und g_2, g_3 die Invarianten von $\wp(u)$ sind; daher:

$$\wp'(\mathfrak{p}u) = (-1)^{\mathfrak{s}}.i^{\mathfrak{p}}.\left(\frac{1}{2}\sqrt[4]{G}\right)^{p-1}.\wp'(u).\Pi_h\wp'\left(u+\frac{h.2\omega'}{\mathfrak{p}}\right). \quad (9)$$

3.

Es seien $\mathfrak{p} = a+b\tau$ und $\mathfrak{q} = a'+b'\tau$ zwei ungerade komplexe Primzahlen des Körpers $k(\sqrt{D})$, dessen Klassenanzahl 1 ist; p und q bedeuten die Normen dieser beiden Primzahlen. Ist nun:

$$m_1, m_2, \ldots m_{\frac{q-1}{2}}$$

ein halbes Restesystem mod $\mathfrak{q}$, so durchläuft auch:

$$\mathfrak{p}m_1, \mathfrak{p}m_2, \ldots \mathfrak{p}m_{\frac{q-1}{2}}$$

abgesehen vom Vorzeichen dasselbe Restesystem mod $\mathfrak{q}$. Daher ist:

$$\mathfrak{p}^{\frac{1}{2}(q-1)}.\Pi m_i \equiv \eta.\Pi m_i \pmod{\mathfrak{q}}$$

und das Legendre'sche Symbol für quadratische Reste in diesem Körper ist durch:

$$\eta = \left(\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{q}}, 2\right)$$

definiert.

Zur Darstellung dieses Zeichens mittels elliptischer Funktionen sei im folgenden die ungerade Funktion $\wp'(u)$ benützt. Mit Hilfe derselben läßt sich das Legendre'sche Symbol in der Form ausdrücken:

$$\left(\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{q}}, 2\right) = \Pi\frac{\wp'\left(\mathfrak{p}.\frac{m_i.2\omega'}{\mathfrak{q}}\right)}{\wp'\left(\frac{m_i.2\omega'}{\mathfrak{q}}\right)}$$

oder nach (9)

$$\left(\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{q}}, 2\right) = (-1)^{\frac{q-1}{2}\cdot\varepsilon} \cdot i^{\frac{q-1}{2}\cdot\rho} \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt[4]{G}\right)^{\frac{1}{2}(p-1)(q-1)} \cdot \Pi \wp'\left(\frac{m_i \cdot 2\omega'}{\mathfrak{q}} \pm \frac{n_k \cdot 2\omega'}{\mathfrak{p}}\right),$$

wo m_i und n_k halbe Restesysteme mod $\mathfrak{q}$ und mod $\mathfrak{p}$ durchlaufen. Ebenso ist:

$$\left(\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{p}}, 2\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\varepsilon'} \cdot i^{\frac{p-1}{2}\cdot\rho'} \left(\frac{1}{2}\sqrt[4]{G}\right)^{\frac{1}{2}(p-1)(q-1)} \cdot \Pi \wp'\left(\pm\frac{m_i 2\omega'}{\mathfrak{q}} + \frac{n_k 2\omega'}{\mathfrak{p}}\right),$$

wo ε' und ρ' sich aus der Formel für $\wp'(\mathfrak{q}u)$ analog wie ε und ρ aus $\wp'(\mathfrak{p}u)$ ergeben. Daraus folgt

$$\left(\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{q}}, 2\right)\left(\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{p}}, 2\right) = (-1)^{\frac{q-1}{2}\cdot\varepsilon + \frac{p-1}{2}\cdot\varepsilon' + \frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} i^{\frac{q-1}{2}\rho + \frac{p-1}{2}\rho'}. \quad (10)$$

Diese Formel läßt noch weitere Vereinfachungen zu, wenn man besondere Zahlkörper untersucht, z. B. $k(\sqrt{-1})$ und $k(\sqrt{-3})$, das sind die Körper der aus den vierten und dritten Einheitswurzeln gebildeten Zahlen. In diesen beiden Fällen läßt sich jede ungerade komplexe Primzahl durch Multiplikation mit einer Einheit des betreffenden Körpers auf die Form bringen $\mathfrak{p} = a + b\tau$, wo $a \equiv 1 \pmod 2$, $b \equiv 0 \pmod 2$ ist. Daher stimmen die Größen $\omega_\lambda, \omega_\mu, \omega_\nu$ auch der Reihenfolge nach mit $\omega, \omega', \omega''$ zusammen und die Größen $\alpha, \beta, \mathfrak{A}$ erhalten folgende Werte:

$$\alpha = \frac{a-1}{2}, \quad \beta = \frac{b}{2}; \quad \alpha' = \frac{b}{2}\cdot\frac{D-(\sigma-1)^2}{\sigma^2},$$

$$\beta' = \frac{a-1}{2} + \frac{b}{2}\cdot\frac{2(\sigma-1)}{\sigma}; \quad \alpha'' = \alpha+\alpha', \quad \beta'' = \beta+\beta'$$

$$\mathfrak{A} = -\beta \cdot \frac{\pi i}{2}, \quad \mathfrak{A}' = \alpha' \cdot \frac{\pi i}{2} + \frac{p-1}{2}\pi i,$$

$$\mathfrak{A}'' = (\alpha''-\beta'') \cdot \frac{\pi i}{2} + \frac{p-1}{4}\pi i$$

$$\varepsilon + \frac{\rho}{2} \equiv \frac{a-1}{2} + \frac{b}{2}\left(\frac{2(\sigma-1)}{\sigma} + \frac{D-(\sigma-1)^2}{\sigma^2} + 1\right) \pmod 2$$

Ebenso erhält man:

$$\varepsilon' + \frac{\rho'}{2} \equiv \frac{a'-1}{2} + \frac{b'}{2}\left(\frac{2(\sigma-1)}{\sigma} + \frac{D-(\sigma-1)^2}{\sigma^2} + 1\right) \pmod 2$$

und wegen der Kongruenzen:

$$\frac{p-1}{2} \equiv \frac{b}{2} \cdot \frac{2(\sigma-1)}{\sigma} \pmod 2,$$

$$\frac{q-1}{2} \equiv \frac{b'}{2} \cdot \frac{2(\sigma-1)}{\sigma} \pmod 2$$

folgt:

$$\left(\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{q}}, 2\right) = (-1)^{\frac{a-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2} + \frac{a'-1}{2}\cdot\frac{p-1}{2} + \frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} \cdot \left(\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{p}}, 2\right).$$ [1]

Insbesondere ist für $D = -1$: $\sigma = 1$, $p \equiv 1$, $q \equiv 1 \pmod 4$:

$$\left(\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{q}}, 2\right) = \left(\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{p}}, 2\right).$$

4.

Im Körper $k(\sqrt{-2})$ ist jede ungerade komplexe Primzahl von der Form:

$$\mathfrak{p} = a + b\tau \qquad (a \equiv 1 \pmod 2, \quad \tau = \sqrt{-2});$$

die Norm derselben ist eine reelle Primzahl von der Form $8n+1$ oder $8n+3$.

---

[1] Mertens, l. c., p. 14, und Scheibner, l. c., p. 708.

Zur Darstellung des Legendre'schen Zeichens eignet sich in diesem Falle am besten die Funktion:[1]

$$\varphi(u) = \frac{\sigma_3(u)}{\sigma(u)} = \sqrt{\wp(u) - e_3}.$$

Dieselbe ist eine ungerade elliptische Funktion mit den Perioden: 4ω, $2\omega'$. Es ist ferner:

$$\mathfrak{p}\omega' = \alpha' . 2\omega + \beta' . 2\omega' + \omega', \quad \alpha' = -b, \quad \beta' = \frac{a-1}{2};$$

daher folgt aus (1) und (7), wenn man überdies $h . 2\omega'$ durch $h . 4\omega'$ ersetzt und berücksichtigt, daß $\sigma_\mu(\mathfrak{p}u)$ mit $\sigma_3(\mathfrak{p}u)$ zusammenfällt:

$$\varphi(\mathfrak{p}u) = (-1)^{\frac{1}{2}(a-1)(b-1)} . i^{-b} . c'^{p-1} . \varphi(u) . \Pi\varphi\left(u + \frac{h . 4\omega'}{\mathfrak{p}}\right). \quad (11)$$

Das Legendre'sche Symbol für quadratische Reste läßt sich dann auf die Form bringen:

$$\left(\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{q}}, 2\right) = \Pi \frac{\varphi\left(\mathfrak{p} . \frac{m_i . 4\omega'}{\mathfrak{q}}\right)}{\varphi\left(\frac{m_i . 4\omega'}{\mathfrak{q}}\right)},$$

---

[1] Aus der Transformation der $\wp(u)$-Funktion lassen sich für diesen besonderen Fall in einfacher Weise Relationen zwischen den Größen $e_1 = \wp(\omega)$, $e_2 = \wp(\omega'')$, $e_3 = \wp(\omega')$ und den Invarianten g_2 und g_3 herstellen. Wenn man nämlich in der Gleichung:

$$\wp(i\sqrt{2}u;\ \omega, \omega') = -\frac{1}{2}\wp\left(u; -\frac{\omega'}{2}, \omega\right) = -\frac{1}{2}\left\{\wp(u) + \frac{3e_3^2 - \frac{1}{4}g_2}{\wp(u) - e_3}\right\}$$

beiderseits die Koeffizienten von u^0 und u^2 berechnet, so erhält man:

$$\frac{2}{5}g_2 = 3e_3^2, \quad \frac{6}{7}g_3 = -3e_3^3.$$

Daraus folgt insbesondere der Wert für die absolute Invariante:

$$j(\tau) = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2} = \frac{125}{27}.$$

wo $\mathfrak{p} = a+b\sqrt{-2}$ und $\mathfrak{q} = a'+b'\sqrt{-2}$ zwei ungerade komplexe Primzahlen bedeuten und m_i ein halbes Restesystem mod $\mathfrak{q}$ durchläuft.

Aus (11) folgt:

$$\left(\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{q}}, 2\right) = (-1)^{\frac{1}{4}(a-1)(b-1)(q-1)} \cdot i^{-b\cdot\frac{q-1}{2}} \cdot c'^{\frac{1}{2}(p-1)(q-1)} \cdot \Pi\varphi\left(\frac{m_i \cdot 4\omega'}{\mathfrak{q}} \pm \frac{n_k \cdot 4\omega'}{\mathfrak{p}}\right)$$

(m_i...halbes Restesystem mod $\mathfrak{q}$, n_k...halbes Restesystem mod $\mathfrak{p}$).

Ebenso ist:

$$\left(\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{p}}, 2\right) = (-1)^{\frac{1}{4}(a'-1)(b'-1)(p-1)} \cdot i^{-b'\cdot\frac{p-1}{2}} \cdot c'^{\frac{1}{2}(p-1)(q-1)} \cdot \Pi\varphi\left(\pm\frac{m_i \cdot 4\omega'}{\mathfrak{q}} + \frac{n_i \cdot 4\omega'}{\mathfrak{p}}\right).$$

Wegen:

$$\frac{p-1}{2} \equiv b^2 \pmod 4, \quad \frac{q-1}{2} \equiv b'^2 \pmod 4,$$

$$\frac{1}{4}(a-1)(b-1)(q-1) + \frac{1}{4}(a'-1)(b'-1)(p-1) \equiv$$

$$\equiv \frac{a-1}{2}(b-1)b' + \frac{a'-1}{2}(b'-1)b \pmod 2$$

und da man jede Primzahl $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ durch Multiplikation mit einer Einheit ± 1 derart umformen kann, daß $a \equiv 1$, $a' \equiv 1 \pmod 4$ ist, erhält man:

$$\left(\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{q}}, 2\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2} + \frac{1}{2}\left(b\cdot\frac{q-1}{2} + b'\cdot\frac{p-1}{2}\right)} \cdot \left(\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{p}}, 2\right).$$

5.

Um den auf die Primzahl $i\sqrt{2}$ des Körpers $k(\sqrt{-2})$ sich beziehenden Ergänzungssatz zu erhalten, gehe man von den folgenden Transformationsgleichungen aus:

$$\sigma(i\sqrt{2}u;\,\omega,\omega') = i\sqrt{2}\,\sigma\left(u;-\frac{\omega'}{2},\omega\right) =$$

$$= \frac{i\sqrt{2}}{\sigma(\omega')}\cdot e^{\frac{1}{2}e_3u^2-\eta'u}\,.\sigma(u).\sigma(u+\omega') =$$

$$= i\sqrt{2}.e^{\frac{1}{2}e_3u^2}\,\sigma(u)\sigma_3(u). \quad (12)$$

Ersetzt man darin u durch $u+2\omega$ und vergleicht die neue Gleichung mit (12), so bekommt man die Relation:

$$e_3\omega = \eta'.i\sqrt{2}-2\eta \quad \text{oder} \quad -\frac{1}{2}e_3\omega\omega' = \eta'\omega+\eta\omega'. \quad (13)$$

Ferner folgt aus (12) für $u=\omega$ und zufolge (13):

$$\sigma(\omega')^2 = i\sqrt{2}.e^{\frac{1}{2}\eta'\omega'-\eta\omega-\eta'\omega}\,.\sigma(\omega)\sigma(\omega''). \quad (14)$$

Aus (12) gehen, wenn man u durch $u+\omega$, $u-\frac{\omega'}{2}$ und $u+\omega-\frac{\omega'}{2}$ ersetzt, folgende Gleichungen hervor:

$$\sigma_3(i\sqrt{2}u) = e^{\frac{1}{2}e_3u^2}\,.\sigma_1(u).\sigma_2(u)$$

oder

$$\sigma_3^2(i\sqrt{2}u) = e^{e_3u}\cdot\frac{\sigma(\omega+u)\sigma(\omega-u)\sigma(\omega''+u)\sigma(\omega''-u)}{\sigma^2(\omega)\sigma^2(\omega'')},$$

ferner:

$$\sigma_1(i\sqrt{2}u) = -\frac{i\sqrt{2}}{\sigma(\omega)\sigma(\omega')}\cdot e^{\frac{1}{4}\eta'\omega'+\frac{1}{2}\eta\omega}\,.$$

$$.e^{\frac{1}{2}e_3u^2}\,.\sigma\left(\frac{\omega'}{2}+u\right)\sigma\left(\frac{\omega'}{2}-u\right)$$

$$\sigma_2(i\sqrt{2}u) = \frac{i\sqrt{2}}{\sigma(\omega')\sigma(\omega'')}\cdot e^{\frac{3}{4}\eta'\omega'-\frac{1}{2}\eta\omega}\,.$$

$$.e^{\frac{1}{2}e_3u^2}\,.\sigma\left(\omega+\frac{\omega'}{2}+u\right)\sigma\left(\omega+\frac{\omega'}{2}-u\right).$$

Aus der Vereinigung dieser Gleichungen folgt für die Funktion $\varphi(u) = \frac{\sigma_3(u)}{\sigma(u)}$:

$$\frac{\varphi(i\sqrt{2}u)}{\varphi(u)} = \frac{1}{i\sqrt{2}} \cdot \frac{\sigma_1(u)\sigma_2(u)}{\sigma_3^2(u)}$$

$$= -e^{\frac{1}{2}\eta'\omega' + \eta\omega + \eta'\omega} \cdot \frac{\sigma\left(\frac{\omega'}{2} + \frac{u}{i\sqrt{2}}\right)\sigma\left(\frac{\omega'}{2} - \frac{u}{i\sqrt{2}}\right)\sigma\left(\omega + \frac{\omega'}{2} + \frac{u}{i\sqrt{2}}\right)\sigma\left(\omega + \frac{\omega'}{2} - \frac{u}{i\sqrt{2}}\right)}{\sigma\left(\omega + \frac{u}{i\sqrt{2}}\right)\sigma\left(\omega - \frac{u}{i\sqrt{2}}\right)\sigma\left(\omega'' + \frac{u}{i\sqrt{2}}\right)\sigma\left(\omega'' - \frac{u}{i\sqrt{2}}\right)}.$$

Das Symbol $\left(\frac{i\sqrt{2}}{\mathfrak{p}}, 2\right)$ läßt sich daher in folgender Weise darstellen:

$$\left(\frac{i\sqrt{2}}{\mathfrak{p}}, 2\right) = \Pi \frac{\varphi\left(i\sqrt{2} \cdot \frac{m_i \cdot 4\omega'}{\mathfrak{p}}\right)}{\varphi\left(\frac{m_i \cdot 4\omega'}{\mathfrak{p}}\right)} =$$

$$= (-1)^{\frac{p-1}{2}} \cdot e^{\frac{p-1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\eta'\omega' + \eta\omega + \eta'\omega\right)} \cdot \Pi \frac{\sigma\left(\frac{\omega'}{2} \pm \frac{m_i \cdot 4\omega}{\mathfrak{p}}\right)\sigma\left(\omega + \frac{\omega'}{2} \pm \frac{m_i \cdot 4\omega}{\mathfrak{p}}\right)}{\sigma\left(\omega \pm \frac{m_i \cdot 4\omega}{\mathfrak{p}}\right)\sigma\left(\omega'' \pm \frac{m_i \cdot 4\omega}{\mathfrak{p}}\right)},$$

wo m_i ein halbes Restesystem mod $\mathfrak{p}$ durchläuft. Zufolge (1) ist:

$$\left(\frac{i\sqrt{2}}{\mathfrak{p}}, 2\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \cdot e^{\frac{p-1}{2}\left(\frac{1}{2}\eta'\omega'+\eta\omega+\eta'\omega\right)+\mathfrak{G}\omega\omega'} \cdot \frac{\sigma\left(\mathfrak{p}\frac{\omega'}{2}\right)\sigma\left(\mathfrak{p}\omega+\mathfrak{p}\frac{\omega'}{2}\right).\sigma(\omega)\,\sigma(\omega'')}{\sigma\left(\frac{\omega'}{2}\right)\sigma\left(\omega+\frac{\omega'}{2}\right)\sigma(\mathfrak{p}\omega).\sigma(\mathfrak{p}\omega'')}.$$

Da nun $\mathfrak{p} = a+b\tau$ ($a \equiv 1 \pmod 4$, $b = \varepsilon \pmod 2$) ist, daher

$$\mathfrak{p}\omega = \frac{a-1}{2}\cdot 2\omega + \frac{b-\varepsilon}{2}\cdot 2\omega'+\omega+\varepsilon\omega'$$

$$\mathfrak{p}\omega'' = \left[\frac{a-1}{2} - b+\varepsilon\right].2\omega + \left[\frac{a-1}{2} + \frac{b+\varepsilon}{2}\right].2\omega'+(1-2\varepsilon)\omega+(1-\varepsilon)\omega'$$

$$\mathfrak{p}\frac{\omega'}{2} = -\frac{b+\varepsilon}{2}\cdot 2\omega + \frac{a-1}{4}\cdot 2\omega'+\varepsilon\omega+\frac{\omega'}{2}$$

$$\mathfrak{p}\omega+\mathfrak{p}\cdot\frac{\omega'}{2} = \left[\frac{a-1}{2} - \frac{b-\varepsilon}{2}\right]2\omega + \left[\frac{a-1}{4} + \frac{b+\varepsilon}{2}\right]2\omega'+(1-\varepsilon)\omega+(1-2\varepsilon)\frac{\omega'}{2}$$

gesetzt werden kann, so folgt mittels (2) und (4):

$$\left(\frac{i\sqrt{2}}{\mathfrak{p}}, 2\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}+\varepsilon\cdot\left(\frac{a-1}{4}+\frac{b+\varepsilon}{2}\right)+(\eta'\omega-\eta\omega')\left\{\frac{a^2-1}{4}+3\varepsilon\cdot\frac{a-1}{2}-(b-\varepsilon)+\frac{1}{2}(b+\varepsilon)^2\right\}} \cdot$$

$$\cdot\frac{\sigma\left(\varepsilon\omega+\frac{\omega'}{2}\right).\sigma\left((1-\varepsilon)\omega+(1-2\varepsilon)\frac{\omega'}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega'}{2}\right).\sigma\left(\omega+\frac{\omega'}{2}\right)}\cdot\frac{\sigma(\omega).\sigma(\omega'')}{\sigma(\omega+\varepsilon\omega').\sigma((1-2\varepsilon)\omega+(1-\varepsilon)\omega')}.$$

Da aber sowohl für $\varepsilon = 0$ als auch für $\varepsilon = 1$ jeder dieser beiden, aus den σ gebildeten Quotienten den Wert 1 hat und $\eta'\omega-\eta\omega' = \frac{\pi i}{2}$, $\frac{p-1}{2} \equiv \varepsilon \pmod 2$ ist, so wird:

$$\left(\frac{i\sqrt{2}}{\mathfrak{p}}, 2\right) = (-1)^{\frac{a^2-1}{8}+\varepsilon\cdot\frac{b+\varepsilon}{2}}.$$

Nr. X der Berichte der Phonogramm-Archivs-Kommission der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien.

Zweiter Bericht über meine phonographischen Aufnahmen in Neu-Guinea (Britisch-Neu-Guinea vom 7. Oktober 1905 bis zum 1. Februar 1906)

von

Dr. Rudolf Pöch.

(Mit 1 Tafel und 3 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 10. Mai 1907.)

Den zweiten Archiv-Phonographen, der mir von dem Phonogramm-Archiv der kaiserl. Akademie der Wissenschaften zur Verfügung gestellt war, fand ich bei meiner Ankunft in Sydney am 21. Juni 1905 schon vor. Es war einer der neuen leichten Apparate aus Magnalium, ferner waren zwei Kistchen mit zusammen 72 Wachsplatten zur Aufnahme und eine größere Anzahl von Membranen beigegeben worden.

Ich hatte zwischen den Besuch des deutschen und des britischen Schutzgebietes von Neu-Guinea diese Reise nach Australien eingeschaltet, um meine Ausrüstung für das zweite Jahr zu ergänzen und zu verbessern und dann auch, um zum Vergleiche mit den Papuas australische Ureinwohner zu sehen.

Da mir wenig Zeit dafür zur Verfügung stand, entschied ich mich für die Eingeborenen von Neu-Süd-Wales und verzichtete darauf, das nördliche Queensland oder Westaustralien aufzusuchen, wo die Ureinwohner allerdings noch viel zahlreicher sind. Der Kurator des »Australian Museum« in Sydney, R. Etheridge jun., lenkte meine Aufmerksamkeit auf den Clarence-Distrikt; er sagte mir, ich würde dort noch einige reinrassige Ureinwohner von Neu-Süd-Wales vorfinden, ein

gutes Material zu physisch-anthropologischen Untersuchungen, aber von einem Studium der Sitten und Gebräuche könnte unter diesen letzten Resten versprengter Stämme, die schon stark von europäischer Kultur beeinflußt sind, keine Rede mehr sein. So nahm ich mir von vornherein vor, mich im Clarence-Distrikt ganz auf die physische Anthropologie zu beschränken und ließ bei meiner Abreise von Sydney am 16. Juli den Phonographen auch zurück. Wie sehr ich damit recht getan hatte, sah ich gleich bei meinem ersten Aufenthalte in Copmanhurst am Clarence-River. In einem kleinen Lager fand ich dort drei Eingeborene vor, von denen jeder eine andere Muttersprache hatte, also Vertreter von drei verschiedenen, wohl zum größten Teile, vielleicht sogar bis auf diesen letzten Mann, verschwundenen Stämmen. Ich hätte also ohne jegliche Kontrolle, ohne jemand anderen Sprachkundigen und ohne Dolmetsch, ganz auf das Belieben und Verstehen eines einzelnen Eingeborenen angewiesen, Aufnahmen zu machen gehabt, die wohl von zweifelhaftem wissenschaftlichen Werte gewesen wären, so daß es besser war, daß sie ganz unterblieben sind. Ähnliche Sprachverhältnisse waren in den freien Lagern von Grafton und in einem entfernter gelegenen »Aboriginal Home«, wo es außerdem viele Mischlinge gab. Dagegen konnte ich die physisch-anthropologischen Untersuchungen mit über einem Dutzend genauer Messungen und photographischer Aufnahmen befriedigend abschließen.

Am 10. September verließ ich das Festland von Australien ganz und erreichte nach einer Bereisung der britischen Salomons-Inseln am 7. Oktober Samarai an der Ostspitze von Britisch-Neu-Guinea. Mein Ziel war die neugegründete Regierungsstation Cape Nelson in der North-Eastern Division. Die erste Gelegenheit zu phonographischen Aufnahmen boten große Tanzfeste, welche bald nach meiner Ankunft dort stattfanden. Der Regierungsbeamte, Resident Magistrate G. O. Manning, hatte Boten an viele Stämme seines Distriktes ausgesandt und sie zu Tänzen eingeladen. Es war das zweite Mal, da die Station erst seit 4 Jahren besteht. Die Leute kamen ganz in ihrem ursprünglichen Schmuck und die Tänze und Gesänge spielten sich ebenfalls in der vollständig ursprüng-

lichen Weise ab. Außer einem Missionar und zwei Regierungsbeamten gibt es in dem ganzen Bezirke, der so groß wie Niederösterreich ist, keine Europäer. Viele Leute waren Tagereisen weit längs der Küste oder aus dem Innern herbeigekommen. Solche Reisen und gemeinsame große Tänze sind eine papuanische Sitte, die Regierung (und zwar die englische wie auch die deutsche) hat sie klug adoptiert und erhöht dadurch ihr Ansehen und Vertrauen unter den Eingeborenen.

Die Aufnahmen auf den Platten Nr. 505 bis 530 stammen fast alle von Gesängen, die unmittelbar zu diesen Tänzen gehören. Tanz und Gesang sind fast immer vereint, nur bei den sehr lebhaften Tänzen vom Mambari River, die in der Kompliziertheit der Leistungen an unsere Ballettaufführungen erinnern, unterbleibt der Gesang. Liedern, die ohne Tanz gesungen werden, habe ich in dieser Gegend nicht begegnet.

Die Platten Nr. 505 bis 508 betreffen Leute aus dem Westen, die Onjób und Oián, und einzelne Leute, die in der Nähe des Mambari wohnen. Die letzteren befanden sich als Polizeisoldaten auf der Regierungsstation, die anderen waren schon früher gekommen, so daß ich diese Aufnahmen noch in voller Ruhe machen und gleichzeitig auch die günstigsten Bedingungen dazu herausfinden konnte. Da bei den Tänzen von allen Tänzern zugleich im Chor gesungen wird, habe ich die Aufnahmen auch immer als Chorgesang gemacht in der Weise, daß ich eine größere Reihe von Leuten um den Trichter treten ließ. Bei der Gruppierung nahm ich auf die lauten und guten Stimmen besondere Rücksicht, bei einigen Gesängen gibt es einen »Führer«, eine Art Vorsänger (z. B. Platten Nr. 529 und 530), der natürlich in den Vordergrund kommen muß. Die Gesänge und Tänze werden immer von Trommelschlag begleitet mit den Handtrommeln (Abbildung 1, Beschreibung siehe unten). Diese mußten, so gut es ging, auch noch in dem Bereiche des Trichters gehalten werden. Die Leute aus dem Westen benützen ein Tritonshorn zur Begleitung außer den Handtrommeln. Ein kleiner Knabe bläst es, der Ton wiederholt sich immer in denselben Intervallen, der Knabe geht dabei um die Tanzenden in weitem Kreise herum. Diese Töne mit auf die Platte zu bekommen, bot einige Schwierigkeiten, da der Junge

immer, wie er es beim Tanz zu tun pflegt, in größerer Entfernung von den Singenden bleiben wollte. So kommt das Tritonshorn bei den Mambari-Leuten auf Platte Nr. 507 noch wenig zur Geltung, besser gelang es bei den Okena auf Platte Nr. 521. Wie bei den ersten Aufnahmen bei den Monumbo in Deutsch-Neu-Guinea[1] machte ich auch hier bei den Stämmen um Cape Nelson in Britisch-Neu-Guinea die Erfahrung, daß es zu wirklich guten Aufnahmen unerläßlich ist, das Verständnis und Interesse der Leute selbst an diesen Aufnahmen wachzurufen und dann zu benützen. Zu diesem Zwecke hatte ich in Potsdamhafen (Monumbo) einen kleinen Edison-Phonographen mit, der auch für Aufnahmen eingerichtet war; diese Walzen brauchten nicht geschont zu werden und ich reproduzierte sie beliebig oft zur Unterhaltung der Monumbo-Leute. Dort wußten dann die Leute selbst genau, worauf es bei einer guten Aufnahme ankommt. Im zweiten Jahre hatte ich von Sydney diesen Apparat leider nicht mehr mitgenommen, da mein Gepäck durch einen Kinematographen ohnehin vergrößert war und ich, um mobil zu bleiben, auf manches weniger Notwendige verzichten mußte.

Ich half mir nun in Britisch-Neu-Guinea in der Weise, daß ich die Platten zweimal abhorchen und dabei die Papuas die Hörschläuche benützen ließ. Zwischendurch mußte ich wieder abhorchen und in der Eile war es oft nicht möglich, die Oliven der Hörschläuche früher zu reinigen, was ja seinen Nachteil hat bei den meist recht schmutzigen Ohröffnungen der Papuas. Doch gehört das zu der Kategorie jener Unannehmlichkeiten, die ein im Felde draußen arbeitender Ethnograph vollständig übersehen lernen muß, will er sich nicht in seinen Arbeiten fortwährend behindert fühlen.

Als die große Menge der Gäste versammelt war, begannen die Tänze und Gesänge jeden Tag gegen 10 Uhr morgens. Stamm für Stamm fand sich auf dem Tanzplatze ein und bald war das ganze große Grasfeld vor dem Wohnhause des Regierungsbeamten voll von tanzenden Gruppen. Die meisten

---

[1] Nr. V der Berichte der Phonogramm-Archivs-Kommission der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien.

waren mit ihren schönen Kopfputzen aus Paradiesvogelfedern, Nashornvogelschnäbeln und Kasuarfedern geschmückt, es war ein äußerst buntes und lebendiges Bild, die verschiedenen, gleichzeitig vorgebrachten Gesänge und der Trommelschlag erfüllten die Luft.

In den heißesten Stunden trat Ermüdung ein, am späten Nachmittag war aber wieder alles in vollster Lebendigkeit und gegen 11 Uhr nachts mußte den Leuten von dem Beamten das Zeichen zur Ruhe gegeben werden. Obzwar es vielfach miteinander wenig bekannte Stämme waren, kam die ganze Zeit keine Streitigkeit vor.

Tagsüber machte ich kinematographische Aufnahmen. Sie erfüllen nicht nur den Zweck, die Tanzfiguren genau wiederzugeben, sondern sie halten überhaupt Lebensäußerungen einer Kultur fest, die vor der vordringenden europäischen Zivilisation rasch verschwunden sein wird.

Zu den phonographischen Aufnahmen wählte ich den dunklen und kühlen Abend. Ich machte alle Aufnahmen im Freien, denn im Hause oder auch unter der gedeckten Veranda, ja in der bloßen Nachbarschaft einer Hauswand wurde die Aufnahme durch den Widerhall beeinträchtigt. Außerdem, daß ich die helle Zeit für den Kinematographen brauchte, wäre die Manipulation mit dem Phonographen im prallen Sonnenlichte auf dem Grasfelde eine unnötige Erschwerung gewesen. Ich glaube auch, daß sich die Leute in dem Dunkel der Nacht leichter dem Hineinsingen und dem Abhorchen hingegeben haben. Es hatte nur den einen Nachteil, daß ich bei der mangelhaften Beleuchtung einer Windlaterne viermal die Platten schief auflegte, wodurch in diesen vier Fällen die Aufnahmen leider unbrauchbar wurden.

Schon bei den ersten vier Aufnahmen, die, wie schon erwähnt, noch in aller Ruhe vor dem Erscheinen der großen Menge der Gäste gemacht werden konnten, hatte es sich gezeigt, daß der Papiermachétrichter des Archiv-Phonographen für die Aufnahme eines Chorgesanges von etwa einem halben Dutzend Leuten nicht ausreicht. Es wurde ein Ansatz improvisiert, wodurch die Öffnung des Trichters mehr als doppelt vergrößert erschien. Die Verlängerung der Trichterwand war

aus mehrfach übereinandergelegten Packpapierlagen hergestellt, die in Ermanglung eines anderen Klebemittels mit Arrow root zusammengekleistert wurden. Die Abbildung auf der Tafel ist eine photographische Aufnahme einer Gruppe von Baifa-Leuten in dem Augenblicke, da sie in den Trichter hineinsingen. Im Vordergrunde .steht der Archiv-Phonograph auf einem Stuhl, auf dem Boden liegen die Kassetten mit den Wachsplatten und die Hörschläuche. Der Apparat wird beaufsichtigt von dem Motu-Manne Támotu, dem Diener des Regierungsbeamten. Da derselbe schon für verschiedene Dienstleistungen für den Europäer abgerichtet war, wurde er mir für schwierigere Dinge stets zur Verfügung gestellt. Er hat auch den Stuhl gezimmert, auf welchem der Archiv-Phonograph steht. Die Baifa-Leute, welche im Bogen singend und ihre Handtrommeln schlagend den Trichter des Apparates, der schon den oben besprochenen Ansatz trägt, umstehen, waren die weitest gereisten Gäste. Sie waren vom oberen Laufe des Musa-River mehrere Tage weit herbeigekommen. Der eine von ihnen, ganz am rechten Ende, trägt einen Zopf. Obzwar aus verschiedenen Dorfschaften stammend und auch nicht einheitlich geschmückt, hatten diese Baifa-Leute ihre Tänze besonders gut einstudiert, sie sollen auch unterwegs noch geübt haben und tanzten auch immer mit besonderer Genauigkeit.

Bei den Aufnahmen konnte ich wiederholt beobachten, wie die Leute während des Singens tanzen mußten. Sie konnten nicht stille halten und machten wenigstens stampfende oder wiegende Bewegungen mit den Beinen. Ebenso wurde natürlich stets die Trommel geschlagen.

Als ich die Texte der Gesänge aufnahm und dann die Bedeutung zu ermitteln suchte, konnte ich meist die bei den Monumbo zuerst gemachte Wahrnehmung bestätigen, daß die Texte der Lieder den Leuten heute in der Regel unverständlich sind, daß sie also wahrscheinlich alten, toten Sprachen angehören. Doch gilt diese Regel hier durchaus nicht so allgemein, wie es bei den Monumbo der Fall war. Der Text des Gesanges auf Platte Nr. 509 (Maissin), den ich auch von den Kworafi gehört habe, besteht aus zwei Worten, »Karínanda Genémbo«, die verständlich sind. In der Kworafi-Sprache heißt

kari eine rote Blüte, nanda ist ein Possessivsuffix, genémbo heißt Mensch.

Bei einigen Gesängen wurde übrigens von einem Niederschreiben des Textes abgesehen, wenn ich bemerkte, daß die Leute dadurch ermüdeten und die Lust verloren. Denn schließlich schienen mir diese Chorgesänge vor allem zu späteren musikalischen Untersuchungen wichtig. In Bezug auf den Text konnten kaum mehr neue Dinge zum Vorschein kommen.

Die Gesänge um Cape Nelson an der Nordostküste von Britisch-Neu-Guinea erscheinen dem europäischen Ohre zweifellos viel melodischer als die der Monumbo, welche den Hauptbestandteil der ersten Serie der Phonogrammaufnahmen bilden. Sie sind überhaupt die angenehmsten Melodien, welche ich auf meiner Reise in Neu-Guinea und den umliegenden Inseln zu hören bekam.

Oft hat es die ersten zwei oder drei Takte, mit denen ein Lied beginnt, den Anschein, als ob sich ein kompliziertes Motiv entwickeln wollte. Da bricht die Melodie aber plötzlich ab und das Lied besteht aus einer endlosen monotonen Wiederholung eines solchen Motivansatzes. Als besonders melodiös empfand ich während der Tänze das Lied »wóse wóse dáraiyo« (Platte Nr. 511) der Maissin, musikalisch interessanter ist Platte Nr. 510.

Eine ähnliche Wiederholung wie die Melodien zeigen auch die Texte. Sie bestehen meist nur aus wenigen Worten, die immer und immer in derselben Weise wiederkehren, bisweilen sogar nur aus einem einzigen Worte, wie das Lied »Alinámburo« der Baifa-Leute auf Platte Nr. 523 und 524.

Merkwürdige musikalische Leistungen sind die Gesänge Nr. 512 der Maissin- und Nr. 530 der Yassi-Yassi-Leute. Beides sind Gesänge nach einem erfolgreichen Kriegszug. Der Melodie folgen einige gellende Aufschreie »eh-eh«, die Zahl derselben soll der Zahl der erbeuteten Feinde entsprechen.

Angenehm zu hören waren auch die Gesänge der Mokúro, namentlich die Aufnahmen auf Platte Nr. 514 bis 517. Bei Nr. 514 kommt auch die Handtrommel am besten zur Geltung.

Einige Lieder der Yassi-Yassi-Leute (Dorf Irewowóna) haben die Eigentümlichkeit, daß sie gegen Schluß immer leiser

und leiser werden, um schließlich ganz zu verklingen, so als ob die Sänger immer weiter und weiter fortziehen würden.

Etwa zwei Wochen nach Beendigung der Tänze war ich mit dem Regierungsbeamten in dessen Kutter nach dem Osten gefahren. Wir lagen auf der Reede von Yassi-Yassi und hörten die Leute aus dem nahen Dorfe Irewowona singen. Es waren wieder dieselben Melodien mit dem allmählichen Verhallen des Gesanges. In der Stille der Nacht kamen die Lieder gut zur Geltung und wir beide waren darüber einig, daß sich auch ein europäisches Ohr trotz der Monotonie dieser Gesänge nicht ihrer beabsichtigten Wirkung entziehen konnte.

Fig. 1. Handtrommel von der Nordostküste von Britisch-Neu-Guinea. ($^1/_8$ nat. Größe.)

Noch bei ihrer Anwesenheit auf Cape Nelson hatten die Leute von Irewowona (Yassi-Yassi) uns zwei eigentümliche Gesänge zum besten gegeben, die auf Platte Nr. 529 und 530 festgehalten sind. Es sind Gesänge nach einem Kriegszuge, wie schon früher erwähnt, mit dem Schrei eh-eh (wie Nr. 512 der Maissin). Außerdem ruft aber ein Vorsänger ein Rezitativ hinein. Die Worte dazu bedeuten nach der Angabe, die mir gemacht wurde, daß der Fischadler angerufen wird. Man sagt ihm gewissermaßen Dank für den glücklich beendeten Kriegszug. Ich fand an dieser Küste vielfach Spuren eines Totemkultes, so daß diese Beziehung der Yassi-Yassi-Leute zu dem Seeadler als ihrem schützenden Tiere ohne weiteres verständlich wird.

Mit Platte Nr. 531 schließen die phonographischen Aufnahmen, die anläßlich dieser Tänze in Cape Nelson gemacht worden waren. Zum Schlusse soll das Musikinstrument beschrieben werden, welches bei diesen Tänzen und Gesängen zur Begleitung und zum Takthalten dient. Es ist eine Handtrommel (siehe Fig. 1) von sanduhrförmiger Gestalt, ein Musikinstrument, das verschieden variiert eine sehr weite Verbreitung

auf Neu-Guinea hat. Die Sanduhrform hat keine direkte Beziehung zu dem ursprünglichen Holzstück, aus dem die Trommel gemacht ist. Ich habe die Herstellung im Dorfe Uiáku bei den Maissin gesehen: Ein rein zylindrisches Holzstück wird aufrecht auf den Boden gestellt, rings herum mit Prügeln, die in den Boden getrieben werden, fixiert, dann wird das Loch gebohrt und die Außenfläche zugeschnitten. Die Trommeln an der Nordostküste in der Gegend von Cape Nelson und in der Callingwood-Bai haben keinen Henkel, sondern werden einfach mit der Hand um die Einschnürung in der Mitte umfaßt und gehalten. Überspannt ist die Trommel mit einem Stück Fell einer großen Waraneidechse. Die Haut wird naß über die Trommelöffnung gezogen und an das Holz mit Baumharz festgeklebt. (An der Nordküste in Deutsch-Neu-Guinea wird ein Ring über das Fell gezogen und dieses in der Art befestigt wie der Stoff auf einer Sticktrommel.) In der Gegend von Cape Nelson werden auf das Waranfell oben einige Halbkugeln aus Wachs aufgeklebt. Ich sah öfters, wie vor dem Tanze eine solche Halbkugel dazugeklebt oder eine weggenommen wurde, um das Instrument zu »stimmen«. Geschlagen wird die Trommel mit dem flachgehaltenen zweiten, dritten und vierten Finger der rechten Hand.

Nach Beendigung der Tänze schloß ich mich dem Regierungsbeamten auf einer Inspektionsreise in die Collingwood- und Goodenough-Bai an. Im Zusammenhange damit stehen die Aufnahmen auf Platte Nr. 533 bis 535. Wir benützten zur Fahrt den Segelkutter »Murua«, der zur North-Eastern Division der Kolonie gehört. Ein besonderer Kapitän war zur Zeit nicht engagiert, sondern der Beamte selbst befehligte die Mannschaft, die durchwegs aus Papuas bestand, Steuermann war Lagióa, der vom Ostkap von Neu-Guinea herstammte. Wir hatten die Übergangszeit zwischen Südost- und Nordwestmonsum gewählt, denn nur zu jener Zeit kann man die betreffende Strecke hin- und zurücksegeln, während man im eigentlichen Monsum zu sehr von der herrschenden Windrichtung beherrscht ist. Die Übergangszeit hat dafür die Unannehmlichkeit häufiger Windstillen. Wenn die »Murua« nun

Fig. 2. Flöte, »higo«, vom Ostkap von Neu-Guinea. ($^1/_4$ nat. Größe.)

stundenlang auf dem bleiernen Meeresspiegel dalag, mit Segeln, die schlaff herabhingen, ließ Lagióa bisweilen eine Beschwörungsformel vernehmen, um den Südostwind herbeizurufen. Sie ist auf Platte Nr. 533 und 534 festgehalten. Dem Winde wird genau der Weg vorgesagt, den er aus dem Südosten zu uns einzuschlagen hat, alle die Inseln werden genannt, die er entlang streifen muß. Der eigentliche Lockruf besteht in einem hinausgeschmetterten »ga-ga-ga«. Lagióa hatte immer Erfolg mit seiner Beschwörung, denn er rief seine Zauberformel niemals früher, ehe er nicht im Südosten am Horizont jenen schmalen dunklen Streifen bemerkte, der das Kräuseln der Wellen bedeutet und ein Herannahen der Brise verkündet. Vor der anderen papuanischen Mannschaft aber war Lagióa's Ruf als mächtiger Windzauberer zweifellos.

Von demselben Manne rühren auch die Aufnahmen auf den Platten Nr. 535 und 537 her, wo sein Flötenspiel festgehalten ist. Die Flöte (Fig. 2) ist ein 53 *cm* langes, sehr festes Rohr, oben ist eine Öffnung zum Hineinblasen, ihr gegenüber eine kleine Gegenöffnung, dann gibt es unten zwei seitliche Öffnungen. Bei der Aufnahme mußte die untere Öffnung der Flöte in den Aufnahmstrichter hineingehalten werden, einmal wurde das übersehen, Lagióa hielt die Flötenöffnung unter den Trichter, diese Aufnahme wurde zu leise und unbrauchbar. Der Name des Instrumentes ist in der Suáu-Sprache »higo«. Lagióa wußte damit, namentlich des Abends, melancholische Melodien zu blasen. Nach unserer Rückkehr nach Cape Nelson verkaufte er mir die Flöte. Später aber wurde er sehr traurig und sagte, er sei jetzt ganz ohne Flöte, weil das Rohr, aus dem

sie gemacht war, nur in seiner Gegend (d. i. beim Ostkap) wächst.

In der Gegend von Cape Nelson war ich nicht mehr in ganz derselben glücklichen Lage in Bezug auf die Sprache wie bei den Monumbo, wo mir ein Pater F. Vormann, ein Missionar, zur Seite gestanden war, der sich durch vier Jahre intensiv mit dem Studium der Monumbo-Sprache und der Abfassung einer Grammatik beschäftigt hatte. Die Regierungsbeamten in Britisch-Neu-Guinea sprechen mit den Eingeborenen in der Regel in der Motu-Sprache, der Sprache von Port Moresby, und diese Sprache soll allgemeine Verkehrssprache für die Kolonie werden. Außerdem hatte der Resident Magistrate von Cape Nelson seit kurzer Zeit begonnen, die Kworafi-Sprache zu studieren. Auch ich hatte ein Vokabular aufgenommen und einige Phrasen ermittelt. Die Platte Nr. 540 zeigt einige Proben dieser Sprache. Außer Zahlwörtern, einigen Verwandtschaftsnamen u. s. w. habe ich versucht, an einigen Wörtern einen Laut zu zeigen, der guttural ist und zwischen r und ch steht. Platte Nr. 538 bringt einige Worte aus der benachbarten Winiápi-Sprache.

Von Cape Nelson fuhr ich, einer Einladung des Gouverneurs Kapitän F. R. Barton folgend, nach Port Moresby und verblieb dort einige Wochen. Trotz der relativ kurzen Zeit konnte ich wieder 36 Aufnahmen machen, womit dann mein ganzer Vorrat an Platten erschöpft war.

Sehr glücklich war der Umstand, daß gerade zur Zeit meiner Anwesenheit die Lakatoi der Motu-Leute aus dem Westen zurückkehrten. Die Lakatoi sind große Segelfloße, welche die Motu-Leute bauen. Sie sind aus vielen, oft mehr als einem Dutzend mächtigen Einbäumen zusammengebunden. Jedes Floß trägt zwei Mattensegel mit einem eigentümlichen eliptischen Ausschnitte am oberen Ende. Am Ende der Trockenzeit, wenn die Nahrung schon knapp wird, segeln die Boote, noch vom Südostmonsum getrieben, nach dem Westen. Ihre Ladung sind Töpfe, eine Industrie, welche von den Motu-Frauen in großer Vollkommenheit geübt wird. Das Ziel sind die Flußniederungen im Golf von Papua. Diese Gegenden sind sagoreich, man kennt aber dort nicht die Töpferei. Der Sago wird

Fig. 3. Die Lakatoi-Trommel, »sede«, der Motu-Leute. ($^1/_8$ nat. Größe.)

von den Motu-Leuten gegen die Töpfe eingetauscht und die mitgebrachte Nahrung behebt die Hungersnot, die jährlich um diese Zeit droht. Alle drei Dörfer in der Nähe Port Moresbys, Hanuabada, Eliwara und Tanubada, hatten dieses Jahr ein Boot ausgesendet und ich sah alle drei zurückkehren.

Die Motu-Leute haben viele Lieder, welche sich auf die Lakatoi beziehen, und auch solche, die nur während der Fahrt gesungen werden. Sie sind auf den Platten Nr. 469, 498 bis 500 und 502 enthalten. Nr. 469 ist ohne Instrumentalbegleitung aufgenommen, bei allen übrigen wurde die sogenannte Sede geschlagen (Fig. 3). Das ist ein großes Bambusrohr mit einer Art Zunge wie eine Maultrommel. Gerade auf diese Zunge wird mit einem Klöppel geschlagen. Der Ton ist laut, weil das ganze mächtige Bambusrohr als Resonanzkasten dient. Sehr sonderbar ist die Ausnehmung des Bambusrohres unten, wodurch es in der Gestalt entschieden etwas an die im Golf üblichen, mit Waranfell überzogenen Holztrommeln erinnert.

Der erste Lakatoi-Gesang Nr. 469 wurde von einem Koitápu-Manne gesungen; die übrigen durchwegs, oder wenigstens vorwiegend, von Motu-Leuten. Die Lakatoi sind Motu-Erfindung, daher die Lieder auch von ihnen herrührend und in ihrer Sprache. Bei den Fahrten tun aber auch die Koitapu mit, es leben überhaupt in vielen Dörfern Koitapu und Motu so eng nebeneinander, daß nur der Eingeweihte an kleinen Merkmalen des Hauses, des Giebels u. s. w. merkt, wo die Koitapu-Abteilung im Dorf aufhört und die Motu-Abteilung anfängt. Die Koitapu sind ursprüngliche Inlandbevölkerung, die Motu sind zur

See eingewandert und haben ihre Häuser vorwiegend in den Lagunen erbaut, schließlich haben sich beide Stämme in einer so eigentümlichen engen Weise vereinigt. Und doch sind beide Sprachen ganz verschieden. Es gibt in jedem dieser Dörfer Leute, welche die Sprache der anderen Gruppe der Dorfangehörigen gar nicht sprechen oder verstehen. Ahuia, der Sänger auf Platte Nr. 469, ist z. B. ein sehr intelligenter und angesehener Koitapu-Mann, der auch in der Motu-Abteilung seines Dorfes viel gilt. Er spricht die Motu-Sprache vollkommen, aber bei diesen Lakatoi-Liedern, die offenbar alte Motu-Tradition sind, erklärte er sich für inkompetent und brachte mir immer lieber Motu-Leute herbei; es sind die letzten Gesänge. Dazu wurden drei Sede geschlagen. Interessant war noch das folgende Detail bei der Aufnahme: bei Nr. 498 hatte ich die Leute, wie ich es von früher gewohnt war, mit den Sede in der Hand um den Trichter herumgestellt. Die Aufnahme kam nicht so gut heraus, wie es sein sollte, und schließlich erklärten die Leute, sie können es nicht gut machen, weil man bei Lakatoi-Liedern immer sitzt! Sie werden eben während der Fahrten auf dem Segelfloß gesungen. Nr. 502, wo ich ihnen gern diese Freiheit gönnte, ist viel besser ausgefallen. Bei allen diesen Gesängen ist ein unangenehm heiserer Ton in der Stimme der Sänger auffallend. Das rauhe Singen ist in diesen Fällen affektiert und gehört zu der vorgeschriebenen Technik. Platte Nr. 500 enthält einen Gesang, der sich mit dem Mythus über Edai, den Erfinder der Lakatoi, beschäftigt.

Außerdem spielt in der Erzählung auch eine Wassergottheit eine Rolle, die den Edai zu sich herabzieht und ihm die Geheimnisse des Baues der Lakatoi anvertraut. Eigentümlich ist, daß dieser Mythus, der in recht poetischer Weise beginnt, schließlich mit einer ganz prosaischen, höchst genau in alle Einzelheiten eingehenden Anleitung zum Baue der Lakatoi endet. Der Mythus wurde auf die Platte Nr. 504 gesprochen. Auf Platte Nr. 485 wurde noch von einem Motu-Manne einiges über die diesjährige Ankunft des Lakatoi erzählt und in sehr gewissenhafter Weise alles erwähnt, was das Lakatoi mitgebracht hat.

In der Trockenzeit, bevor die Lakatoi ausziehen, werden die Angelegenheiten des Dorfes in Sitzungen geordnet, an denen angesehene Leute teilnehmen. Der Ort, wo das stattfindet, ist eine Plattform auf Pfählen, die »Dubu«, welche nicht in der Lagune, sondern am festen Lande erbaut ist. Platte Nr. 501 bringt ein Lied, das zur Zeit der Dubu-Sitzungen gesungen wird. Es ist begleitet von einer Holztrommel, die mit Eidechsenfell überzogen ist, ganz ähnlich wie die Trommeln der Nordostküste. Nr. 503 bringt das Ausrufen zu einer solchen Sitzung. Der Ausrufer spricht den Mann, welcher zur Beratung erscheinen soll, an; er zählt dann alle Dinge auf, welche man ihm im voraus für seine Mühe schenkt, durchwegs Lebensmittel. Das sind also gewissermaßen die »Diäten« dieser primitiven Parlamentarier. Das Ausrufen endet mit dem »ku-í« oder »u-í«, dem in Australien und auch in vielen GegendenNeu-Guineas üblichen Ruf (einen ganz ähnlich klingenden Ruf hörte ich bei den Kai auf dem Sattelberg in Deutsch-Neu-Guinea).

Die anderen Aufnahmen bringen verschiedene Gesänge und auch Sprachproben in verschiedenen Sprachen der Südküste.

Die Lieder aller Stämme dieser Küste sind sehr wenig melodiös und stehen damit in grellem Kontrast zu den Liedern der Nordostküste.

Nr. 471 und 472 sind die Gesänge zweier Motu-Mädchen, Nr. 477 bis 481 sind Lieder von Motu-Männern. Nr. 478 ist ein Liebeslied, Nr. 479 und 480 sind Klagelieder, das erste drückt die Trauer eines Mannes um die Frau aus, die er verloren hat. Der Sänger von Platte Nr. 481 wurde mir als ein besonders guter bezeichnet; alle anderen traten sofort vor ihm zurück, als er kam. Die Platte zeigt aber deutlich, daß er eine viel schlechtere Stimme hatte als die Vorhergehenden, dagegen zeigte er sich in den Texten besonders beschlagen und wußte viel mehr Gesänge. Das sind also die Eigenschaften, nach denen ein Sänger unter diesen Leuten beurteilt wird. Zu den Gesängen wurden mir häufig Übersetzungen gegeben. Die Übersetzung besorgte ich entweder selbst mit Hilfe des Pidgin-English oder mit Unterstützung eines Beamten, die ja alle der

Motu-Sprache mächtig sind. Dagegen wurde mir zu der Aufnahme auf Platte Nr. 496 gesagt, daß der Sänger Ráhu, ein junger Motu-Mann, das Lied nicht verstehe, dagegen wohl ältere Leute. Nr. 497 ist ein Gesang der Motu-Leute beim Fange des Dugong. Der Dugong, Seekuh (Halicore), ist an der Südküste Neu-Guineas nicht selten.

Noch monotoner als die Motu-Gesänge sind die Lieder der Hula und besonders der Maiwa, beides ebenfalls Stämme der Südküste. Nr. 484 und 490 sind zwei Maiwa-Lieder, die aber von einem Koitapu-Jüngling gesungen wurden. Auch die Hula(Hura)gesänge Nr. 482 und 486 wurden von einem Koitapu gesungen. Nr. 494 ist ein Gesang der Koitapu-Leute, gesungen von einem Koitapu. Trotzdem erklärt er, daß ihm die Worte vollständig unverständlich seien.

Ein Winiapi-Mann, Bauru, der von der Nordostküste als Soldat mit nach Port Moresby gekommen war, lieferte die Aufnahmen Nr. 487 bis 489. Seine für diese Gegend typischen Lieder (auf Platte Nr. 487 und 489) lassen hier, mitten unter denen der Südküste, den Gegensatz im Charakter besonders hervortreten. Während dieser Aufnahmen wurde Bauru von Heimweh befallen und begann laut zu weinen, aber noch nicht beim Hineinsprechen, sondern erst dann, als er das Lied selbst abhörte. Befragt, warum er weine, drückte er sein Heimweh sehr merkwürdig in der Weise aus, daß er sagte, er sehne sich nach den Tarofrüchten seiner Heimat, die in dem trockenen Port Moresby nicht wachsen. Die mittlere Platte Nr. 488 hat Bauru besprochen; er erzählt, wie er von Cape Nelson nach Port Moresby gekommen ist, redet aber, seiner momentanen Stimmung entsprechend, viel zu leise. Auf Platte Nr. 492 ist nochmals ein Gesang der beiden Motu-Mädchen, auf Platte Nr. 493 schwatzen und lachen sie in ganz ungezwungener Weise. Hiezu möchte ich bemerken, daß das papuanische Lachen für mich niemals den eigentümlichen Beiklang des »Nigger-Lachens« hatte.

Nr. 491 ist eine Aufnahme in der Koitapu-Sprache. Der Sprecher Kabúa zählt auch. Die Motu-Leute haben ein ausgebildetes Zahlensystem, das wahrscheinlich aus Polynesien herstammt. Kabua's Zählen ist wertlos. Er hat es in der Schule

gelernt und geübt und schnarrt es in unkenntlicher Weise herunter, so wie Schulknaben das überall mit gut auswendig gelernten Lektionen zu tun pflegen.

Die Platten Nr. 475 und 476 bringen Aufnahmen mit einer Maultrommel, »Susap« genannt. Es ist aber nicht die einheimische Maultrommel, sondern ein in Europa gemachtes, eingeführtes Instrument und »Susap« ist aus dem englischen »jews-harp«, Judenharfe, verdorben. Dieses aus einer Messing-»Harfe« und einem eisernen Mundstück hergestellte Instrument ist auch in Europa als Belustigung für Kinder bekannt. Die Ware trug immer den Vermerk: »Made in Austria«. Wo sie eingeführt wird, verdrängt sie rasch die einheimischen Maultrommeln aus Bambus, weil der Ton der eisernen viel heller und lauter klingend ist. Es werden auf den »Susap« zunächst genau dieselben Melodien vorgeführt wie auf den alten einheimischen Maultrommeln. Auf der Rückreise hörte ich Malayen auf denselben Instrumenten europäische Melodien wiedergeben. Das Instrument wird mit dem zweiten und vierten Finger der rechten Hand an die halbgeöffnete Zahnreihe gepreßt, außerdem mit den Lippen festgehalten, der dritte Finger versetzt die Zunge durch Zupfen in Schwingungen, die Tonhöhe wird durch die willkürliche Vergrößerung und Verkleinerung der Mundhöhle erzeugt.

So hatte ich in Port Moresby auch die zweite Serie der Wachsplatten beschrieben und verpackte sie ebenso wie den Phonographen zum Transport nach Wien. Ich fuhr nach Thursday-Island und verschiffte von dort all mein großes Gepäck nach Europa.

Ich hatte die Absicht, von Thursday-Island direkt über Java heimzukehren. Meinen ursprünglichen Plan, auch Holländisch-Neu-Guinea zu besuchen, hatte ich aufgeben müssen, da die Verbindungen von Thursday-Island dahin nicht mehr bestanden. Es war ein außerordentlicher Glücksfall, daß der holländische Regierungsdampfer »Valk« gerade zur Zeit meiner Anwesenheit dienstlich nach Thursday-Island kam. Das war schon seit fast zwei Jahren nicht mehr geschehen. Ich wurde in liebenswürdiger Weise nach Merauke mitgenommen.

Da diese Reise unerwartet kam, traf sie mich auch in vielem unvorbereitet; dazu gehört auch der Umstand, daß ich mir für diesen Aufenthalt leider keine phonographischen Platten mehr reserviert hatte. So konnte ich bei dem letzten und interessantesten Volksstamme der Papuas, den ich kennen lernte, den Tugéri oder Kaja-Kaja von Merauke, leider keine phonographischen Aufnahmen mehr machen. Und doch wären sie gerade hier besonders dankbar und wertvoll geworden. Die Kaja-Kaja sind ein noch sehr wenig erforschter Volksstamm, in vielen Dingen primitiver und auch abweichend von dem, was ich bisher kennen gelernt hatte. Der Assistent Resident von Holländisch-Süd-Neu-Guinea Hellwig hatte mir den angestellten Dolmetsch zur Verfügung beigegeben. Es war ein Papua aus Fak-Fak, der aber durch Jahre unter den Kaja-Kaja wie ein Stammesgenosse gelebt hatte und deren Sprache vollständig beherrschte, außerdem auch malayisch sprach. Da ich auch malayisch gelernt hatte, konnte ich hier sehr rasch ein reiches Vokabular aufnehmen. Zwei Eigentümlichkeiten der Sprache seien hier kurz erwähnt: zur Bekräftigung kann allen Worten ein kurzes »kö« angehängt werden, das hängt z. B. auch an dem Worte »Merauke«. Dann begegnete ich der eigentümlichen Gewohnheit, bei wichtigen Dingen absichtlich tiefer zu sprechen, als die natürliche Stimme ist. Die Kaja-Kaja kennen auch Maskentänze und haben Lieder dazu.

Von Merauke konnte ich mit einem holländischen Dampfer nach Java gelangen und fuhr von dort mit dem Norddeutschen Lloyd nach Hause.

Gleichzeitig mit mir kamen die Plattensendung von Samarai und die zweite Hälfte der Platten mit dem Phonographen von Thursday-Island in Europa an.

.en

ɔigen
ɛinen
Luft-
ıd an
inige
: und
inen,
ɛbnis
hend
r als

ıden;
ung
van-
rauf,
ɜt an
ɛtter-
Ent-
Zeit

Grundzüge einer Theorie der synoptischen Luftdruckveränderungen

(II. Mitteilung)

von

Dr. **Felix M. Exner.**

(Mit 3 Tafeln und 3 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 6. Juni 1907.)

Im vorigen Jahre wurde eine Arbeit unter dem obigen Titel veröffentlicht,[1] in welcher der Versuch gemacht ist, einen mathematischen Ausdruck für die zeitliche Änderung des Luftdrucks an einem Orte der Erdoberfläche aufzustellen und an den Tatsachen zu prüfen. Die vorliegende Arbeit enthält einige neuere Rechnungen in engem Anschlusse an die frühere und mag daher unter demselben Titel als II. Mitteilung erscheinen, obwohl die darin enthaltenen Anschauungen nur ein Ergebnis der Rechnung sind und an der Erfahrung nicht ausreichend geprüft werden konnten, weswegen ich dieselben lieber als Hypothesen bezeichnet hätte.

Man mag solche Hypothesen vielleicht überflüssig finden; sie sind entstanden aus dem Bedürfnis, eine Anschauung von den Vorgängen der täglichen Luftdruckschwankungen zu erhalten und machen keinen Anspruch darauf, als etwas anderes genommen zu werden; insbesondere ist an eine Verwendung dieser Rechnungen für die tägliche Wetterprognose noch nicht gedacht worden. Ob sie für deren Entwicklung einmal brauchbar werden können, mag die Zeit lehren.

---

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. CXV, Abt. IIa (1906).

Um die Voraussetzungen der Rechnungen genau festlegen zu können, bin ich gezwungen, auf die oben genannte Arbeit zurückzugreifen und einiges daraus zu wiederholen, besonders da die vorliegende von jener den Ausgang nahm.

Vergegenwärtigen wir uns den Erdball mit seiner Gashülle, so ist die Höhe der letzteren so klein gegenüber dem Radius der Erde, daß wir den Eindruck haben, die Erdoberfläche sei von einer dünnen Schichte, der Atmosphäre, überzogen; finden in dieser Bewegungen relativ zur Erde statt, so werden sie hauptsächlich parallel zur Erdoberfläche gerichtet sein; die vertikalen Strömungen werden viel geringer sein. Diese Vorstellung von unserer Atmosphäre als einer dünnen Schichte, welche die große Erde umgibt, ist in der ersten oben genannten Mitteilung benützt und auch in dieser zweiten beibehalten worden. Zwar wissen wir, daß der vertikale Luftaustausch eine große Rolle spielt, am auffälligsten vielleicht in der Zirkulation der Atmosphäre vom Äquator zu höheren Breiten, doch konnte derselbe in der vorhergehenden Arbeit nicht berücksichtigt werden und wurde auch in dieser zwar nicht ausgeschlossen, aber beiseite gelassen.

Da die Ausdehnung der Lufthülle nach dem Weltraum zu eine unbegrenzte ist, war es, um mit bestimmten Luftmengen und Lufttemperaturen zu rechnen, notwendig, die Atmosphäre in zwei Schichten, eine untere und eine obere, geteilt zu denken. Die untere erstreckt sich bis zu einer gewissen Höhe oder einer bestimmten Niveaufläche des Luftdrucks, die obere von dieser hinaus ins Unbegrenzte.

In der ersten Mitteilung ging ich nun von der Annahme aus, daß sich die untere Luftschichte in all ihren Höhenlagen gleichmäßig bewege, so daß die Bewegung am Erdboden die gleiche Richtung und Größe habe wie in allen Schichten über demselben bis hinauf zur Grenze jener unteren Atmosphärenschichte. Die Geschwindigkeit dieser Bewegung sollte nach der bekannten Guldberg-Mohn'schen Formel vom Luftdruckgradienten an der Erdoberfläche abhängen; da noch die Reibung an letzterer vernachlässigt wurde, so bewegte sich die Luft parallel zu den Isobaren. Die Bewegung wurde als adiabatisch angenommen. Aus gleichzeitigen Druck- und Temperatur-

schwankungen in Nordamerika wurde eine durchschnittliche Höhe der in Betracht kommenden unteren Atmosphärenschichte berechnet, für welche die Annahme der gleichmäßigen Strömung in allen Höhenlagen im allgemeinen ausreichend und erlaubt war. Die obere Atmosphärenschichte sollte an den unperiodischen Druckschwankungen, wie sie die Wetterkarten zeigen, nicht mehr beteiligt sein.

Es ergab sich aus diesen Bedingungen eine Gleichung für die zeitliche Luftdruckänderung an einem Orte der Erdoberfläche, und zwar wurde dieselbe als Funktion der horizontalen Druck- und Temperaturgradienten daselbst gefunden. Sie war der Größe nach verkehrt proportional der Fläche, welche zwei benachbarte Isobaren mit zwei benachbarten Isothermen der Mitteltemperatur an jenem Orte einschlossen; dem Vorzeichen nach stieg der Druck, wenn die Luft aus kälteren in wärmere Gebiete strömte, und fiel im umgekehrten Falle.

Da die an der Erdoberfläche beobachtete Temperatur für die Mitteltemperatur der Luftsäule bis zur Grenze der unteren Schichte nicht maßgebend ist, man diese Mitteltemperatur aber aus dem Luftdruck und der Höhe jener Schichte berechnen kann, so wurden statt der oben genannten Temperaturgradienten jene der Höhe eingeführt. Wurde hiezu die Höhe der unteren Luftschichte als zeitlich konstant, aber von Ort zu Ort variabel angenommen, so konnte die zeitliche Druckänderung als Funktion der horizontalen Gradienten des Druckes und dieser Höhe berechnet werden. Unter einfachen Voraussetzungen über die Verteilung der Höhe konnte die gefundene Differentialgleichung auch integriert werden, wodurch der Druck als Funktion von Ort und Zeit hervorging.

Jene Höhen bildeten eine Niveaufläche, in welcher ein bestimmter Druck herrschte; da, wo die Mitteltemperatur der Luftschichte geringer war, also z. B. im Winter über einem Kontinent wie Nordamerika, mußte jener Druck tiefer liegen als über wärmeren Orten, wie z. B. den Ozeanen im Westen und Osten. Die genannten Höhen waren also über dem Kontinente kleiner, über dem Meere größer. Aus den beobachteten Lufttemperaturen an der Erdoberfläche konnten sie für Nordamerika ungefähr berechnet werden. Zur Integration der

Differentialgleichung wurden die Linien gleicher Höhe als Sinuslinien angenommen; damit ergab sich eine Druckwelle, die von Westen nach Osten über den Kontinent hinwegzog, derart, daß am Kontinent aus einer zonalen Anfangsverteilung heraus der Luftdruck im Westen fiel, diese Depression in der Mitte am stärksten wurde und sich auf dem Wege zur Ostküste wieder abflachte, um nach der Zeit einer Schwingung wieder zonale Verteilung des Druckes zu erreichen.

Da es sich in jener Arbeit nur um ein Beispiel der Wirkung ungleicher Temperaturen handelte, konnte das geschilderte Resultat, die Entstehung einer derartigen Druckwelle, hingenommen werden.

Würden die tatsächlichen Verhältnisse den zuletzt dargelegten gleichen, so wäre aber in der mittleren Druckverteilung während einer solchen Periode im Winter der Druck in der Mitte des Kontinents tiefer als an den Ost- und Westküsten, was den Tatsachen nicht entspricht.

Es entstand daher die Aufgabe, die Annahmen für die Rechnungen der obigen Arbeit so zu modifizieren, daß sie auch für die mittlere Druckverteilung über Land und Meer mit der Erfahrung besser übereinstimmende Resultate ergeben als bisher. Dies war der Ausgangspunkt für die vorliegende Arbeit. In dieser wurde nun die Annahme von adiabatischer Bewegung der Luft fallen gelassen, da es schien, als wäre gerade diese Voraussetzung die Ursache für die oben genannte Abweichung der Rechnungsresultate von der Erfahrung gewesen.

Die folgenden Rechnungen sind daher allgemeiner als jene der ersten Mitteilung; im übrigen war ich genötigt, ähnliche Vereinfachungen zu machen wie im früheren Fall; die Berechtigung hiezu hatte sich schon teilweise aus der Prüfung jener Theorie an den Tatsachen ergeben, worauf hier noch besonders verwiesen sei.

Für die Luft setzen wir zunächst das Gasgesetz sowie die barometrische Höhenformel und die Gleichung für die zugeführte Wärme aus der mechanischen Wärmetheorie an. Ferner werden wir den Ausdruck für die Geschwindigkeit des Windes in seiner Abhängigkeit vom Druckgradienten und unter Berücksichtigung der Erdrotation benützen und aus all diesen Gleichungen einen Ausdruck für die zeitliche Änderung des Luftdrucks an einem Orte der Erdoberfläche bilden, wozu wir im folgenden noch speziell angeführte Voraussetzungen in die Rechnung einführen werden.

Es bezeichne:

φ die geographische Breite (positiv auf der nördlichen Hemisphäre),

λ die geographische Länge (gegen Osten wachsend),

t die Zeit (in Sekunden),

p den Luftdruck an der Erdoberfläche,

p_H denselben in einer Höhe H,

T die Mitteltemperatur der Luftsäule H,

g die Schwerebeschleunigung,

A das Wärmeäquivalent der Arbeit,

R die Gaskonstante trockener Luft,

$\frac{dQ}{dt}$ die in der Zeiteinheit zugeführte Wärme,

c_p die spezifische Wärme der Luft bei konstantem Druck.

Die Gleichung für die zugeführte Wärme lautet:

$$\frac{dQ}{dt} = c_p \frac{dT}{dt} - AR \frac{T}{p} \frac{dp}{dt} \qquad (1)$$

Hier bedeutet eigentlich T die Temperatur am Boden, wenn p der Druck am Boden ist. Zur Vereinfachung werde aber angenommen, daß die Gleichung für die ganze Luftschichte in ihrer Gesamtheit bei dem oben angegebenen Sinne von p und T gelte und $\frac{dQ}{dt}$ die der Gesamtmasse einer Luftsäule von der Höhe H zugeführte Wärme sei, eine Vernachlässigung, die schon im ersten Teile dieser Arbeit gemacht und deren Fehler daselbst unwesentlich gefunden wurde. (Erste Annahme.)

Nach der barometrischen Höhenformel ist:

$$p = p_H e^{\frac{gH}{RT}} \tag{2}$$

Als zweite Annahme führen wir jetzt ein, daß H konstant nach Ort und Zeit, p_H aber mit der Zeit konstant, örtlich variabel sei, d. h. wir betrachten eine Luftsäule von der Höhe H und nehmen an, daß über einem Orte in dieser Höhe stets derselbe Druck p_H vorhanden, derselbe aber an verschiedenen Orten verschieden sein könne. Diese Voraussetzung ist nur formell von der in der ersten Mitteilung gemachten unterschieden, welche Konstanz des p_H und örtliche Verschiedenheit des H enthielt. Es ist notwendig, für eine derartige Rechnung eine solche Annahme zu machen, um ein abgegrenztes Luftvolumen zu haben.

Aus Gleichung (2) ergibt sich dann:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{p}{p_H}\frac{dp_H}{dt} - \frac{pgH}{RT^2}\frac{dT}{dt}$$

und

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{RT^2}{gH}\left(\frac{1}{p}\frac{dp}{dt} - \frac{1}{p_H}\frac{dp_H}{dt}\right)$$

Der letzte Ausdruck in die Wärmegleichung (1) eingesetzt stellt eine Beziehung der Wärmezufuhr zu den Druckänderungen in der Höhe H und an der Erdoberfläche dar, und zwar:

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{RT}{p}\frac{dp}{dt}\left(\frac{c_p T}{gH} + A\right) + \frac{c_p RT^2}{gH}\frac{1}{p_H}\frac{dp_H}{dt} \tag{3}$$

Die Größe H bedeutet also die Höhe einer Luftsäule, über welche hinaus sich (wegen Konstanz des p_H) die sogenannten aperiodischen Luftdruckveränderungen, welche uns durch die synoptischen Wetterkarten angezeigt werden, nicht weiter in die Höhe erstrecken. Eine derartige Annahme ist eigentlich selbstverständlich, da mit der Entfernung von der Erde diese Gebilde natürlicherweise schließlich verschwimmen müssen.

Als dritte Annahme führen wir ein, daß die Luftsäule sich in allen Schichten bis zur Höhe H gleichmäßig bewege;

diese Bewegung wird einen Durchschnittswert repräsentieren, indem in Wirklichkeit die Bewegung an der Erdoberfläche meist infolge der Reibung eine einströmende, zum tiefen Druck gerichtete, in größerer Höhe oft eine ausströmende (bezüglich der Isobaren an der Erdoberfläche) sein wird. Durch die dritte Annahme wird schon von selbst gefordert, daß die betrachtete Höhe H nicht zu groß sein darf, da die Annahme sonst zu wenig genau sein wird.

Aus den Rechnungen der ersten Mitteilung ist schon eine bestimmte Größenordnung von H für Nordamerika mit Hilfe von Beobachtungsdaten wahrscheinlich gemacht worden. Wir behalten diesen Wert auch hier bei und setzen $H = 5000\ m$. (Vierte Annahme.)

Es wurde auch versucht, die Wärmegleichung, wie dies exakt wäre, nur auf eine dünne Luftschichte anzuwenden, die Ungleichförmigkeit der Bewegung in verschiedenen Höhenlagen zu berücksichtigen u. s. w. Doch wäre es da notwendig, die von Ort zu Ort ungleiche Temperaturabnahme nach oben in die Rechnung einzuführen, was nicht möglich ist und bei den übrigen Vereinfachungen auch wohl die Arbeit nicht lohnen würde.

Als fünfte Annahme soll die Bewegung der Luft parallel zu den Isobaren an der Erdoberfläche vor sich gehen, was im Hinblick auf das bei der dritten Annahme Gesagte und auf die geringe Höhe von 5 *km* im Durchschnitt keine wesentlichen Fehler mit sich bringen dürfte. Es wird also von der vertikalen Bewegung abgesehen und die Reibung an der Erdoberfläche vernächlässigt.

Man erhält dann aus den Bewegungsgleichungen für die rotierende Erde mit Weglassung der horizontalen Beschleunigungen (sechste Annahme), die durchschnittlich keine große Rolle spielen werden, die Winkelgeschwindigkeit der Luftsäule von der Höhe H durch folgende Gleichungen:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{RT}{2\omega r^2 p \sin\varphi\cos\varphi} \cdot \frac{\partial p}{\partial \lambda}, \quad \frac{d\lambda}{dt} = -\frac{RT}{2\omega r^2 p \sin\varphi\cos\varphi} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \tag{4}$$

Hier ist ω die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation und r der Erdradius. Aus der Annahme, daß die Geschwindigkeit stets

senkrecht auf dem Gradienten steht, folgt, daß alle späteren Überlegungen auf den Äquator und die Nähe desselben nicht angewendet werden dürfen, da dort für jeden endlichen Gradienten die Geschwindigkeit unendlich würde. Es wurde auch die Zentrifugalkraft in diesen Bewegungsgleichungen vernachlässigt, einfach darum, weil sich mit Beibehaltung derselben nicht rechnen ließ. Bekanntlich spielt sie im allgemeinen gegen die ablenkende Kraft der Erdrotation eine geringe Rolle, doch ist sie nach Ferrel in der Nähe der Kalmengürtel von großem Einfluß, so daß wir bei ihrer Weglassung auch über diese Gegend keine richtigen Aufschlüsse zu erhalten erwarten dürfen.

Zur Wärmegleichung (3) zurückkehrend, wollen wir nun die totalen Differentialquotienten $\frac{dp}{dt}$ und $\frac{dp_H}{dt}$ in die partiellen zerlegen und erhalten:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial \varphi}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial p}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{dt}$$

und

$$\frac{dp_H}{dt} = \frac{\partial p_H}{\partial t} + \frac{\partial p_H}{\partial \varphi}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial p_H}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{dt}$$

Über p_H wurde schon die Annahme gemacht, daß es mit der Zeit unveränderlich sei. Da die Temperatur der Luft vom Äquator gegen die Pole abnimmt, so wird der Luftdruck p_H in der Höhe H über dem Äquator größer sein als über höheren Breiten, wenn nicht der Druck am Boden umgekehrt vom Äquator zum Pol zunimmt, was nicht der Fall ist. Es wird also ein positives Gefälle $\frac{\partial p_H}{\partial \varphi}$ vom Äquator zum Pole vorhanden sein. Wir wollen annehmen, daß auch der Einfluß der Länder und Meere auf die Mitteltemperatur der Luftsäulen über ihnen nicht höher als bis zur Höhe H reicht; dann wird in dieser Höhe der Druck p_H über jedem Breitenkreise einen konstanten Wert haben. Wir können demnach für die Verteilung von p_H über der Erdoberfläche als siebente Annahme die einfache Gleichung schreiben:

$$p_H = \varepsilon + \gamma \cos 2\varphi.$$

Es wird dann am Äquator $p_H = \varepsilon + \gamma$, am Pol $\varepsilon - \gamma$ sein, und für die Differentialgleichung (3) ergibt sich:

$$\frac{\partial p_H}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial p_H}{\partial \varphi} = -2\gamma \sin 2\varphi, \quad \frac{\partial p_H}{\partial \lambda} = 0;$$

γ ist eine noch zu bestimmende Konstante.

In der ersten Mitteilung wurde die Atmosphäre nicht durch die Höhe H, sondern durch die Niveaufläche p_H in zwei Schichten getrennt gedacht. Der Unterschied ist nicht von Bedeutung; doch wurde damals das variable H nicht nur als abhängig von der Breite angesehen, wie hier jetzt p_H, sondern auch von der geographischen Länge. Durch diese Annahme konnte damals der Einfluß des Kontinents in Rechnung gezogen werden, führte aber, wie oben mitgeteilt, zu irrigen Resultaten bei Berechnung der mittleren Druckverteilung über Nordamerika. Um diesen Fehler zu vermeiden, wurde in dieser Arbeit p_H von λ als unabhängig angenommen und die Zu- und Abfuhr von Wärme freigestellt.

Setzt man nun in die obigen Gleichungen für $\frac{dp}{dt}$ und $\frac{dp_H}{dt}$ die Komponenten der Geschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt}$ und $\frac{d\lambda}{dt}$ nach den Gleichungen (4) ein und benützt noch die siebente Annahme, so wird, da

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial p}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{dt} = 0$$

ist, auch

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} \text{ und } \frac{dp_H}{dt} = -\frac{2\gamma RT}{\omega r^2 p} \cdot \frac{\partial p}{\partial \lambda}$$

Die Wärmegleichung (3) lautet daher jetzt:

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{RT}{p}\left(\frac{c_p T}{gH} + A\right)\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{2\gamma c_p R^2 T^2}{\omega r^2 g H p p_H}\frac{\partial p}{\partial \lambda}$$

oder

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{2\gamma c_p RT^2}{\omega r^2 p_H (c_p T + AgH)} \cdot \frac{\partial p}{\partial \lambda} - \frac{pgH}{RT(c_p T + AgH)} \cdot \frac{dQ}{dt} \qquad (5)$$

Diese Gleichung (5) tritt nun an Stelle jener Differentialgleichung in der ersten Mitteilung, welche die Gradienten von Druck und Mitteltemperatur enthielt. Wird keine Wärme zu- noch abgeführt, ist also $\frac{dQ}{dt} = 0$, so bedeutet sie einfach, daß bei positivem $\frac{\partial p}{\partial \lambda}$, also auf der Nordhemisphäre bei südlichen Winden, der Luftdruck an einem Orte um ein Bestimmtes fällt, bei nördlichen Winden steigt, proportional dem Gradienten oder der Windstärke. Bei einer Depression mit südlichen Winden im Osten, nördlichen im Westen wird folglich der Druck im Osten fallen, im Westen steigen, so daß es den Anschein gewinnt, als bewege sich die ganze Depression von Westen nach Osten; die gleiche Überlegung, auf ein Hochdruckgebiet angewendet, ergibt auch dessen Wanderung nach Osten. Die Geschwindigkeit der Bewegung wird durch den Faktor von $\frac{\partial p}{\partial \lambda}$ bestimmt, wie später noch gezeigt werden soll.

Ist die Bedingung adiabatischer Bewegung nicht mehr erfüllt, also $\frac{dQ}{dt} \gtrless O$, so wird z. B. für den Fall, daß $\frac{\partial p}{\partial \lambda} = O$, bei Zufuhr von Wärme der Druck an einem Orte mit der Zeit fallen, bei Entziehung von Wärme steigen. Ist $\frac{\partial p}{\partial \lambda} \gtrless O$, so hängt es ganz von dem Größenverhältnis der beiden Glieder der rechten Seite von (5) ab, ob der Druck steigt, gleich bleibt oder fällt. Aus der vorwiegenden Bewegung der kleineren Luftdruckgebilde von Westen nach Osten in den höheren Breiten läßt sich schließen, daß das Glied mit $\frac{\partial p}{\partial \lambda}$ daselbst im allgemeinen den Ausschlag gibt und durch die Wärmezufuhr meist nur Modifikationen in der allgemeinen West-Ostbewegung der Druckgebilde hervorgebracht werden.

Es wird also alles darauf ankommen, die der Luftsäule zugeführte oder entzogene Wärme zu kennen, um die Änderung des Luftdruckes vorausbestimmen zu können.

Denken wir uns, es sei zu irgend einer Zeit auf einem Gebiete der Erdoberfläche der Luftdruck am Boden überall der gleiche, es werde der dort lagernden Luft aber, z. B. durch eine besonders warme Erdoberfläche, Wärme zugeführt, dann wird nach Gleichung (5) der Druck daselbst fallen. Über die Ursache dieses Fallens gibt unsere Rechnung keine weitere Aufklärung, doch stimmt das Resultat mit der Erfahrung. Ist die Wärmezufuhr auf einen runden begrenzten Bezirk beschränkt, so wird nach Gleichung (5) ein Gebiet tiefen Druckes daselbst entstehen, eine Depression.

Nach der ursprünglichen Wärmegleichung (1) ist einfach mit Wärmezufuhr Temperaturerhöhung und Druckerniedrigung verbunden. In Wirklichkeit wird bei Erwärmung der Luftsäule diese sich ausdehnen, nicht nur nach den Seiten, sondern auch nach oben; es wird gerade das vertikale Aufsteigen der Luft und das seitliche Abfließen in der Höhe die eigentliche Ursache der Druckerniedrigung sein. Vertikale Bewegung haben wir hier aber nicht berücksichtigt, auch ausgeschlossen, daß über der Höhe H noch Veränderungen, wie seitliches Ausfließen der Luft über einem besonders warmen Orte, vor sich gehen. Wir haben in unserer Rechnung auch die Kontinuität der Luftmassen nicht berücksichtigt. Aber gerade die letztere Tatsache enthält die Möglichkeit, trotzdem mit unseren einfachen Gleichungen im wesentlichen richtige Druckänderungen abzuleiten; denn der Vorgang ist mit ihnen so dargestellt, als wenn die Luft, durch deren Abfließen der Druck sinkt, einfach verschwinden würde. Diese rohe Darstellungsweise scheint aber für unseren Zweck doch zu genügen und ist auch nicht so auffallend, wie auf den ersten Anblik erscheinen mag, wenn wir uns wieder wie früher die Atmosphäre als eine sehr dünne Luftschichte im Gegensatz zum Erdradius vorstellen.

Zugleich erklärt diese Vorstellung auch, wie es möglich ist, die Entstehung von Gebieten hohen oder tiefen Druckes ohne Berücksichtigung der vertikalen Bewegung abzuleiten, nachdem doch M. Margules[1] bewiesen hat, daß die Stürme

[1] Über die Energie der Stürme. Jahrbücher der k. k. Zentralanstalt für Meteorologie, Jahrgang 1903, Anhang.

und mit ihnen die Luftdruckgradienten nur durch vertikale Bewegungen entstehen können und ihre Energie aus der Arbeit der Schwerkraft schöpfen. Wir machen nämlich hier von der Zu- oder Abfuhr der Wärme, die nach Margules die Luftschichten aus dem Gleichgewicht bringt und sich als potentielle Energie der Lage in ihnen aufspeichert, gleichsam einen Sprung bis zur entstehenden Druckänderung und übergehen dabei die vertikalen Verlagerungen der Luftschichten; wir haben dieselben in unserer Rechnung nicht berücksichtigt, aber wir haben sie auch nicht, etwa durch Verwendung der Kontinuitätsgleichung, ausgeschlossen.

Diese schematische Darstellung der Luftbewegung in einer Schichte scheint somit nicht nur für das Studium von Luftdruckveränderungen und von Verschiebungen der Luftdruckgebilde geeignet zu sein, sondern auch für jenes der Entstehung und Auflösung dieser Gebilde durch Wärmezu- und -abfuhr an einzelnen Orten der Erdoberfläche.

Die Größe $\frac{dQ}{dt}$ wird man sich im wesentlichen zusammengesetzt denken können aus der Wärme, welche die Luftsäule von der Höhe H durch Konvektion von der Erdoberfläche, über der sie lagert, erhält, ferner aus dem Anteil Sonnenstrahlung, den sie absorbiert und aus der Ausstrahlung der Atmosphäre gegen den Weltraum, wobei wohl die Konvektion die Hauptrolle spielen wird. Nebstbei mag noch manches andere in Betracht kommen, was sich ohne genaue Kenntnis der Einzelsituation nicht feststellen läßt. Wie man sieht, ist jenes $\frac{dQ}{dt}$, welchem nach unserer Gleichung ein so bedeutender Einfluß zukommt, eine bisher so gut wie unbekannte Größe; aus der Theorie der atmosphärischen Zirkulation ist bekannt, daß die Luft in niederen Breiten Wärme zugeführt erhält, hiebei aufsteigt und gegen nördliche Breiten abfließt, um als Passat wieder zurückzukehren, daß also diese zugeführte Wärme die Hauptursache der großen Strömungen ist; über die Größenordnung derselben hat man meines Wissens keine genaue

Vorstellung. Nachdem nun in dieser Arbeit die Reibung an der Erdoberfläche vernachlässigt wurde, mithin die Ausdrücke (4) für die Geschwindigkeit der Luftbewegungen auf die Nähe des Äquators nicht anwendbar sind, so konnte hier jene hauptsächliche Äußerung der Wärmezufuhr am Äquator, durch welche die großen Zirkulationen zwischen niederen und höheren Breiten eingeleitet werden, keine Behandlung finden. Wir sind gezwungen, uns auf höhere Breiten zu beschränken.

Auch in diesen wird die ungleiche Wärmezufuhr unter verschiedenen Breitegraden eine Rolle spielen, aber bei der vorwiegend westöstlichen Luftströmung, wie sie auch an der Erdoberfläche am deutlichsten auf der Südhalbkugel zum Ausdruck kommt, wohl eine viel geringere als in niederen Breiten. Vielmehr dürfte in höheren Breiten für die Wärmezufuhr und -entziehung die Verteilung der Kontinente und Meere von größtem Einfluß sein. Erstere sind im Winter kalt, letztere warm. Eine von Westen nach Osten strömende Luftmasse wird daher über den Kontinenten Abkühlung, über den Meeren Erwärmung erfahren. Auf diesen Einfluß wurde hier das Hauptgewicht gelegt.

Einige Anhaltspunkte, welche für die Beurteilung dieser Erwärmungen und Abkühlungen vorliegen, sind: die mittlere Temperatur- und Druckverteilung, die in den höheren Breiten der Nordhemisphäre im Winter Wärme und tiefen Druck auf den Ozeanen, Kälte und hohen Druck auf den Kontinenten zeigt, dann die Bevorzugung der Meere durch die Depressionen, ferner die langsame Erwärmung einer großen Luftmasse bei einem Kälteeinbruch, bei dem die Luft aus kalten in wärmere Gebiete strömt; gerade der letzte Fall würde sich vielleicht am unmittelbarsten zu einem direkten Studium unserer Frage eignen.

Leider sind unsere Kenntnisse der Wärmezufuhr, die eine Luftsäule über einem Orte erfährt, völlig unzureichend, um unsere Differentialgleichung (5) auf einen bestimmten Fall direkt anzuwenden und so zu prüfen, ob die gemachten Annahmen 1 bis 7 brauchbare Resultate liefern. Insbesondere die Größenordnung der Faktoren in jener Gleichung wäre zu

prüfen, das Vorzeichen der beiden Glieder der rechten Seite dürfte viel eher als richtig erkannt werden.

Wie gesagt, ist dies leider nicht möglich, da wir von der Größe $\frac{dQ}{dt}$ fast nichts wissen; wenn dieser Umstand nun auf das Studium der Wärmezufuhren deutlich hinweist, so wollen wir doch unterdessen den Versuch machen, die Gleichung (5) in schematischer Weise auszuwerten, indem wir von deren direkter Verwendung absehen, eine einfache Voraussetzung für den Verlauf von $\frac{dQ}{dt}$ einführen und die Gleichung integrieren. Mittels des Resultates wollen wir dann erst die Größe von $\frac{dQ}{dt}$ selbst bestimmen und die Ergebnisse der Integration, soweit dies möglich ist, mit der Erfahrung vergleichen.

Wir betrachten zu diesem Zwecke die Zu- und Abfuhr von Wärme als alleinig bedingt von dem Einfluß der Erdoberfläche, indem wir, ohne uns auf weitere Details einzulassen, voraussetzen, daß die letztere der darüber lagernden Luft Wärme zu- oder abführt; von Strahlungsvorgängen sehen wir ganz ab, also auch von einer etwaigen täglichen Periode von $\frac{dQ}{dt}$. Ferner denken wir uns zur Vereinfachung die Erde als ein Wärme- beziehungsweise Kältereservoir, dessen Inhalt durch die an die Luft abgegebene oder von ihr aufgenommene Wärme nicht geändert wird. Unter diesen Voraussetzungen könnten wir z. B. die Annahme machen, die Wärmezufuhr $\frac{dQ}{dt}$ sei der Differenz der mittleren Erdbodentemperatur (z. B. im Winter) und der Temperatur der Luft über derselben proportional. Die Temperatur der Luft würde sich dann mit der Zeit so herstellen, daß keine Schwankungen mehr einträten; die Gleichung 5 würde nämlich eine gedämpfte Schwingung darstellen. Tatsächlich werden aber die Druck- und Temperaturschwankungen in unseren Breiten immerfort erneuert. Wir gehen daher zu der einfacheren Voraussetzung über, daß jeder Ort der Erdoberfläche (natürlich zu einer bestimmten Jahreszeit)

der Luft darüber eine bestimmte, konstante Wärmemenge zuführe oder entziehe. Es soll also $\frac{dQ}{dt}$ von der Zeit (innerhalb einer Jahreszeit) unabhängig und nur eine Funktion der geographischen Koordinaten sein.

Mit dieser einfachen Annahme ist aber noch eine Schwierigkeit verbunden; es würde nämlich, wenn unter einer hohen Breite fortwährend dieselbe Wärme entzogen, unter einer niederen Breite fortwährend zugeführt würde, der Luftdruck im Norden fortwährend steigen, im Süden fallen. Wir müssen daher, wenn das Wärmereservoir der Erde unerschöpflich sein soll, voraussetzen, daß über jedem ganzen Breitenkreise die Summe der zu- und abgeführten Wärmen Null ist, eine Voraussetzung, die vielleicht für höhere Breiten nur wenig von den Tatsachen abweicht. Die geographische Verteilung der Wärmezufuhr wird dann nur von der Lage der Meere und Länder bestimmt. Selbstverständlich ist hier stets von jener Wärme die Rede, welche eine bestimmte Luftsäule erhält; die Wärmeänderungen an einem Orte der Erde werden natürlich auch von den verschieden temperierten Winden beeinflußt und dieser Einfluß ist in der Differentialgleichung (5) schon in dem Gliede mit $\frac{\partial p}{\partial \lambda}$ enthalten.

Da nun die Gliederung von Land und Meer auf der Erdoberfläche sehr kompliziert ist, sei für die Rechnung die folgende Vereinfachung benützt: Wir nehmen einen Weltkörper an, auf dem die Land- und Wasserbedeckungen ganz symmetrisch verteilt sind. Es sei dies eine Kugel, deren Oberfläche aus je zwei Meeren und Kontinenten bestehe, die, durch Meridiane begrenzt, je ein Viertel der Erdoberfläche einnehmen und abwechselnd aneinandergereiht sind. Zwei Ebenen, die sich unter 90° schneiden und deren Schnittlinie zugleich die Achse des Weltkörpers sei, werden dann auf der Oberfläche die Kontinente und Meere voneinander trennen und die Küsten bilden. Im übrigen nehmen wir an, dieser Weltkörper rotiere wie die Erde und habe auch deren Größe. Wenn wir mit dieser Fiktion rechnen, so können die Resultate natürlich nur in Analogien auf unsere Erde übertragen werden; den einen Kontinent

denken wir uns an Stelle Nordamerikas, den anderen an Stelle Asiens (auf der Nordhälfte).

Wir wollen voraussetzen, daß zur kalten Jahreszeit die Kontinente in niederen Breiten relativ warm, in höheren kalt, die Meere umgekehrt temperiert seien, und daß ein bestimmter Breitenkreis die Gegensätze voneinander scheidet. Demgemäß ist die Wärmezufuhr in relativ warmen Gebieten positiv, in kalten negativ. Die folgende Rechnung bezieht sich nur auf den Winter.

Über den Verlauf von $\frac{dQ}{dt}$ machten wir schon oben die Annahme, daß dessen Integral über einen ganzen Breitenkreis Null sei, d. h. eine Luftsäule, die sich in einem Breitenkreise über die beiden Kontinente und Meere hinweg bewegt, nimmt auf den Meeren ebensoviel Wärme auf, als sie über den Kontinenten abgibt oder umgekehrt, je nach der Breitenlage. Die Luft kann dann doch im Mittel im Norden kälter, im Süden wärmer sein; sie ist im Mittel in einem stationären Zustande. Wie schon oben gesagt, soll für eine bestimmte Breite der thermische Gegensatz zwischen Meer und Kontinent verschwinden; südlich davon ist der Kontinent wärmer, nördlich davon das Meer. Für diese kritische Breite nehmen wir 30° an. Jener Gegensatz soll auch am Pol verschwinden. Für den fingierten Weltkörper mit je zwei Kontinenten und Ozeanen von gleicher Breite läßt sich die Wärmezufuhr dann am einfachsten als eine Sinus- oder Cosinusfunktion der geographischen Länge darstellen; auf einem ganzen Breitenkreise werden zwei ganze Wellen Platz finden.

Demnach setzen wir

$$\frac{dQ}{dt} = B \cos \varphi (\cos \varphi - \cos 30) \cos 2\lambda, \qquad (6)$$

wo B eine vorläufig unbekannte Konstante sei.

Für $\lambda = 0$ und $\varphi > 30°$ wird dann $\frac{dQ}{dt}$ ein Minimum auf dem Breitenkreise sein; es soll daher der Anfang der Längengradzählung in die Mitte des einen der Kontinente gelegt werden.

Für $\lambda = \frac{\pi}{2}$ ist $\frac{dQ}{dt}$ positiv und ein Maximum, wie dies für die Mitte jedes Meeres auch gefordert wird. Wenn $\varphi < 30°$, kehrt sich das Vorzeichen von $\frac{dQ}{dt}$ um. Das Maximum der Schwankung von $\frac{dQ}{dt}$ zwischen Meer und Kontinent liegt bei zirka 65° Breite.

Setzen wir nun den Ausdruck (6) in Gleichung (5) ein und schreiben

$$\frac{2\gamma c_p R T^2}{\omega r^2 p_H (c_p T + A g H)} = \alpha$$

und

$$\frac{p g H}{R T (c_p T + A g H)} \cdot B = \beta,$$

so ergibt sich

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\alpha \frac{\partial p}{\partial \lambda} - \beta \cos\varphi (\cos\varphi - \cos 30) \cos 2\lambda. \qquad (7)$$

Nun machen wir noch die Vereinfachung, daß α und β konstant genommen werden, was sie der Größenordnung nach auch sind; dann steht der Integration von Gleichung (7) nichts im Wege. Wir haben nur für den Druck eine bestimmte Anfangsverteilung vorauszusetzen, um ihn aus dieser Gleichung als Funktion von Ort und Zeit zu erhalten.

Erste Anfangsverteilung. Es sei zunächst der Druck zu Anfang (für $t = 0$) überall derselbe und habe den Wert a; dann ergibt sich durch Integration

$$p = a - \frac{\beta}{2\alpha} \cos\varphi (\cos\varphi - \cos 30)[\sin 2\lambda - \sin 2(\lambda - \alpha t)].$$

Wie man sich durch Differentiation leicht überzeugen kann, entspricht dieser Ausdruck der Differentialgleichung und der Anfangsbedingung.

Zweite Anfangsverteilung. Als zweites Beispiel sei der Druck für $t = 0$ gegeben durch

$$p_0 = a + b \cos 2\varphi,$$

er nehme also mit zunehmender Breite fortwährend ab, habe bei 45° Breite den Wert a, am Pole den Wert $a—b$; dieses Beispiel entspricht eher der rotierenden Bewegung um die Pole des Weltkörpers, wie sie uns besonders von der südlichen Halbkugel der Erde bekannt ist und auf der nördlichen in größerer Höhe vorkommen muß. Das Integral lautet:

$$p = a + b\cos 2\varphi - \frac{\beta}{2\alpha}\cos\varphi\,(\cos\varphi - \cos 30)\cdot$$
$$\cdot[\sin 2\lambda - \sin 2(\lambda - at)].$$

Die Form des Integrals ist also in beiden Beispielen dieselbe: Die Anfangsverteilung wird überlagert von einer konstanten Verteilung, die durch das Glied mit $\sin 2\lambda$ gegeben ist, und einer mit der Zeit fortschreitenden Welle $\sin 2(\lambda - at)$. Diese Welle bewegt sich nach wachsendem λ, also nach Osten. Ihre Schwingungsdauer ist $\frac{\pi}{\alpha}$, die Wellenlänge ist π, daher die Geschwindigkeit der Fortpflanzung α, ausgedrückt in Winkelmaß. Zur Reduktion auf Längenmaß ist dieselbe mit $r\cos\varphi$ zu multiplizieren, daher

$$v = \alpha r\cos\varphi$$

die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle in Metern pro Sekunde.

Die Größe α ist leicht zu berechnen. Da $H = 5000\,m$ sein soll, können wir die Mitteltemperatur finden, indem wir lineare Temperaturabnahme nach oben zu annehmen und dieselbe 5° pro $1000\,m$ setzen. Es handelt sich hier stets um Durchschnittswerte, da ja α nicht eigentlich konstant ist. Sei die mittlere Temperatur am Boden 273° absolut, so ergibt sich das mittlere T zu 260°. Um ferner γ zu finden, werde angenommen, daß die mittlere Jännertemperatur am Boden am Äquator 27° C., am Pol —30° C. betrage. Für den mittleren Luftdruck am Boden von durchwegs $760\,mm$ findet man hieraus den Druck in der Höhe von $5000\,m$ (gleichfalls unter Voraussetzung linearer Temperaturabnahme im obigen Ausmaße)

am Äquator zu 419 *mm*,
am Pole zu 364 *mm*,

somit

$$\varepsilon = 392, \quad \gamma = 28\ mm$$

und p_H im Durchschnitte zu 392 *mm*.

Setzt man noch

$$r = 6300\ km, \quad c_p = 0{\cdot}2375, \quad Ag = \frac{1}{424}, \quad \omega = 7.10^{-5},$$

so ergibt sich der Durchschnittswert

$$\alpha = 3{\cdot}3.10^{-6}\ (\text{sec}^{-1}).$$

Die Schwingungsdauer der oben berechneten Welle $\tau = \frac{\pi}{\alpha}$ beträgt folglich 11·02 oder rund 11 Tage. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $v = \alpha r \cos\varphi$ wird beispielsweise für die Breite von 50°:

$$v = 13{\cdot}4\ m/\text{sec.} = 48\ km \text{ pro Stunde.}$$

Die Größe β enthält neben bekannten Werten die Unbekannte B; um einen beiläufigen Wert hiefür zu erhalten, kann man folgendermaßen vorgehen:

Denken wir uns den Ausdruck für p nach der zweiten Anfangsverteilung über eine ganze Schwingungsdauer τ integriert, so wird offenbar das Glied mit $\sin 2(\lambda - \alpha t)$ zu Null und wir erhalten für den mittleren Druck während einer oder einer beliebigen ganzen Zahl von Schwingungsdauern

$$\bar{p} = a + b\cos 2\varphi - \frac{\beta}{2\alpha}\cos\varphi\,(\cos\varphi - \cos 30)\sin 2\lambda.$$

Dies ist die Gleichung für die mittlere Druckverteilung, welche aus unseren Voraussetzungen hervorgeht, am ehesten mit der wahren mittleren Druckverteilung im Jännermonate zu vergleichen. Hält man den Ausdruck (6) für die zugeführte Wärme dagegen, so ergibt sich neben der allgemeinen Druckabnahme gegen den Pol eine Phasenverschiebung von $-45°$ in der geographischen Länge des $\bar{p}$ gegen $\frac{dQ}{dt}$. In der Mitte der Kontinente, für $\lambda = 0$ und $\lambda = 180$, wird in Breiten über

30° auf einem bestimmten Breitenkreise die meiste Wärme entzogen; daselbst hat der Luftdruck einen mittleren Wert. Für $\lambda = 45$ wird auf demselben Breitenkreise $\frac{dQ}{dt} = 0$ sein, was einem mittleren Werte dieser Größe entspricht, während der Druck dort ein Maximum hat; $\lambda = 45$ (oder auch $\lambda = 225$) bezeichnet aber die Ostküsten der Kontinente. Analog hat der Druck einen Mittelwert in der Mitte der Meere, wo die zugeführte Wärme am größten ist, einen Minimalwert aber an den Westküsten der Kontinente, wo $\frac{dQ}{dt} = 0$ ist.

Betrachtet man eine mittlere Isobarenkarte der Erde für den Jänner auf der Nordhemisphäre, so findet man einige Ähnlichkeiten mit obigem Schema heraus. Freilich ist eine genaue Übereinstimmung schon wegen der ungleichen Lagerung von Wasser und Land auf der Nordhälfte unserer Erde gar nicht möglich. Nach obiger Rechnung soll der tiefste Druck an den Westküsten der Kontinente, der höchste an deren Ostküsten liegen. In Wirklichkeit betragen die Verschiebungen des tiefen Druckes von der Mittellinie der Meere, des hohen von jener der Kontinente weniger als 45° und im allgemeinen haben in den höheren Breiten die Kontinente im Winter hohen, die Meere tiefen Druck; immerhin ist eine Verschiebung der Isobaren gegen Osten zu bemerken, besonders am europäisch-asiatischen Kontinent und in dem flachen Verlaufe der Isobaren an der Nordwestküste Europas, dem steilen an der Ostküste Nordamerikas.

Denken wir uns aber aus der Druckverteilung $\bar{p}$ mittels der barometrischen Höhenformel die Mitteltemperaturen berechnet, so finden wir dort, wo auf einem Breitenkreise der Druck tief ist, die Mitteltemperatur hoch, dort wo er hoch ist, dieselbe tief. Wir erhalten also dann Isothermen, welche die höchste Temperatur an der Westküste der Kontinente, die tiefste an deren Ostküste bezeichnen, was mit dem tatsächlichen Verlaufe der Winterisothermen schon viel besser übereinstimmt. Freilich können weder die Isobaren noch die Isothermen so einfache Kurven sein, wie unsere Rechnung sie gibt.

Zur Berechnung der Größe β wollen wir nun in Anlehnung an die Jänner-Isobarenkarte der Erde annehmen, daß auf dem Breitenkreise von 60° die ganze Schwankung des Luftdruckes zwischen dem Minimum an der Westküste und dem Maximum an der Ostküste des Kontinents 20 *mm* betrage. Es wird also

$$-2 \cdot \frac{\beta}{2\alpha} \cos 60 (\cos 60 - \cos 30) = 20 \; mm$$

gesetzt. Daraus berechnet sich mit Verwendung des Wertes von α die Größe $\beta = 3 \cdot 7 \cdot 10^{-4}$ und daraus mit Benützung von $T = 260$, $p = 760$ im Durchschnitte die Größe $B = 5 \cdot 26 \cdot 10^{-5}$; sie ist ausgedrückt in Kilogrammkalorien pro Sekunde.

Um eine Vorstellung von der so errechneten Größenordnung der zugeführten Wärme zu bekommen, wollen wir annehmen, daß an dem Orte $\lambda = 0$ und $\varphi = 60°$ dieselbe Luftmasse einen Tag lang der Wärmeentziehung durch den Kontinent ausgesetzt wäre, wollen also in der Wärmegleichung, da sie hier nur für einen Ort verwendet wird, statt der totalen Differentialquotienten nach der Zeit die partiellen schreiben, $\frac{\partial p}{\partial t}$ durch $\frac{\partial T}{\partial t}$ ersetzen und, da $\frac{\partial p_H}{\partial t} = 0$, schreiben:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{c_p T + AgH}{T} \frac{\partial T}{\partial t} = B \cos 60 (\cos 60 - \cos 30).$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -3 \cdot 41 \cdot 10^{-5} \text{ Grade pro Sekunde}$$

oder

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -2 \cdot 9 \text{ Grade pro Tag.}$$

Um diesen Betrag wird also die Mitteltemperatur einer Luftsäule von 5000 *m* Höhe in 24 Stunden abnehmen infolge des abkühlenden Einflusses der Mitte des Kontinents in 60° Breite. Es wurde hier als Beispiel fast das Maximum jener Wirkung berechnet, da wir dasselbe oben bei zirka 65° Breite fanden. In der Mitte eines Meeres wird infolge der Symmetrie,

die unsere Gleichung ausdrückt, die Mitteltemperatur der Luft um den gleichen Betrag zunehmen. Der Luftdruck an der Erdoberfläche würde über dem Kontinent durch jene Abkühlung um etwa 5 *mm* zunehmen, wie eine kurze Rechnung lehrt. Da sich die Schätzung auf den Zeitraum von 24 Stunden bezieht, dürfte die Größenordnung keine unmögliche sein und folglich auch die Konstante B keinen unwahrscheinlichen Wert haben.

Auf diese Weise sind die Konstanten α und β der Differentialgleichung (7) für die schematischen Voraussetzungen unseres Weltkörpers bestimmt. Zu den Integralgleichungen für den Druck als Funktion der Zeit zurückkehrend, welche für die beiden Beispiele von Anfangsverteilungen gelten, läßt sich also sagen, daß die Wirkung von Land und Wasser darin besteht, daß der Druck nördlich vom 30. Breitengrade über Land steigt, über Wasser fällt, daß aber diese Druckzunahme, beziehungsweise -abnahme um einen Mittelwert oszilliert, d. h. der Druckunterschied zwischen Land und Wasser in einer gewissen Breite ist zu Anfang der Schwingungsdauer Null, wird dann nach $\frac{1}{4}\tau$ eine positive Größe, die dem Mittelwert entspricht, steigt weiter, bis er zur Zeit $\frac{\tau}{2}$ ein Maximum erreicht, sinkt dann wieder zum Mittelwert, den er nach $\frac{3}{4}\tau$ erreicht, und sinkt schließlich weiter bis Null, um dann eine neue Schwingung zu beginnen. Dieser Vorgang findet auch statt, wenn zu Anfang der Zeit der Druck überall derselbe war (erste Anfangsverteilung). Wir haben also hier eine Welle, die wir, da sie rein thermischen Ursprungs ist, als »thermische Welle« bezeichnen können.

Dritte Anfangsverteilung. Als ein drittes Beispiel von Anfangsverteilung wollen wir den Mittelwert der Druckverteilung $\bar{p}$ des zweiten Beispiels einführen, also setzen:

$$p_0 = a + b\cos 2\varphi - \frac{\beta}{2\alpha}\cos\varphi(\cos\varphi - \cos 30)\sin 2\lambda.$$

Führt man die Integration für diese Anfangsbedingung durch, so heben sich die Glieder, welche die Zeit enthalten, weg, und es bleibt der Druck $p = p_0$, die Anfangsverteilung bleibt erhalten, sie ist ein Gleichgewichtszustand. Jener Mittelwert $\bar{p}$, der den Isobaren im Monatsmittel entspricht, ist also ein Zustand, in welchem sich der Wechsel ungleich temperierter Luft und die Zu- oder Abfuhr von Wärme' das Gleichgewicht halten. Strömt z. B. an einem Orte kalte Luft an die Stelle von warmer, so steigt der Luftdruck trotzdem nicht, weil zugleich der kalten Luft gerade genug Wärme zugeführt wird, um die Temperaturerniedrigung wieder auszugleichen.

Wie schon anfangs erwähnt, wurde im ersten Teile dieser Arbeit für die Bedingung adiabatischer Bewegung die Regel abgeleitet, daß der Druck stets steigen oder fallen müsse, wo zwei Isobaren und zwei Isothermen miteinander eine Fläche einschließen, d. h. wo sich die beiden Kurvensysteme schneiden. Wenn diese Regel auch im allgemeinen für die täglichen Druckschwankungen das richtige Vorzeichen ergab, so stimmte sie doch nicht, wenn man sie auf die Monatsmittel von Druck- und Temperaturkarten anwandte. Denn da geben z. B. am Atlantischen Ozean die gegen die Westküste Europas ansteigenden Isothermen mit den daselbst nach Süden ausgebogenen Isobaren des isländischen Minimums ganz bedeutende Schnittflächen und doch ist keine Rede davon, daß sich jenes Minimum nach Osten bewegt, wie danach zu erwarten wäre.

Jene Isobaren und Isothermen repräsentieren eben nach dem nunmehr gefundenen Resultat infolge der Zufuhr von Wärme einen Gleichgewichtszustand, obwohl die Schnittflächen vorhanden sind.

Dasselbe gilt auch für die aus unserer Rechnung hervorgehenden mittleren Druck- und Temperaturkurven. Es wäre vielleicht umgekehrt möglich, gerade aus der Größe der Schnittflächen und der hienach zu erwartenden Druckänderung und der Tatsache des Gleichgewichtes einen Schluß auf die Zu- und Abfuhr der Wärme zu ziehen, wie sie an den einzelnen Punkten unserer Erde in den verschiedenen Monaten auftreten muß.

Genau genommen wird allerdings die Größe $\frac{dQ}{dt}$ auch zur Zeit eines gewissen Sonnenstandes nicht stets dieselbe sein, sondern von Bewölkung, Niederschlag, wohl auch den vorausgegangenen Witterungszuständen abhängen, sofern nicht die Sonnenstrahlung selbst bedeutenderen Schwankungen unterliegt. Ein Studium der Menge der zu- und abgeführten Wärme wäre also jedenfalls auch für die Kenntnis der Luftbewegungen sehr wichtig.

Wir erhielten aus den beiden ersten Anfangsverteilungen keine abgeschlossenen Zentren hohen oder tiefen Druckes, wie sie doch die Wetterkarten täglich zeigen. Es dürfte dies wahrscheinlich daher rühren, daß die Entstehung dieser Gebilde an ziemlich lokale Erwärmungs- und Abkühlungsgebiete gebunden ist, die auf unserer Erde durch die komplizierte Struktur der Festländer und Meere häufig gegeben sind. Ich erinnere nur an die Entstehung von Depressionen im Mittelmeer oder die Ausbildung solcher im Süden unserer Alpen aus Föhnsituationen. Es läßt sich aber untersuchen, wie einmal gegebene Maxima und Minima sich unter dem Einflusse der Wärmezufuhr durch die großen Meere und Kontinente verhalten, wobei natürlich die Wirkungen lokaler Wärmezufuhrsgebiete der oberwähnten Art unberücksichtigt bleiben. Wir haben eben eine sehr einfache Verteilung der Wärmezufuhr vorausgesetzt.

Vierte Anfangsverteilung. Wir wollen daher die Differentialgleichung (7) noch unter der Annahme einer Anfangsverteilung integrieren, welche Depressionen und Antizyklonen enthält. Eine solche möglichst einfache Anfangsverteilung ist z. B. gegeben durch:

$$p_0 = a + b \cos 2\varphi + c \sin 2\varphi \cos n\lambda.$$

Hier bedeuten die ersten Glieder rechts wie früher eine Abnahme des Druckes gegen den Pol; dazu kommt das dritte Glied, welches eine Reihe von Hoch- und Tiefdruckgebieten ausdrückt, die ihr Zentrum alle auf dem 45. Breitengrade haben; die Amplitude dieser Cosinuswelle ist $c . \sin 2\varphi$, wird also am Äquator und Pol zu Null. Die Zahl n ist vorläufig allgemein die

Zahl der Hochdruck- oder Niederdruckgebiete, die, in gleicher Anzahl vorhanden, abwechselnd auf dem ganzen Umfange des Weltkörpers, und zwar mit den Zentren auf dem 45. Breitengrad angeordnet sind. Die Verteilung wird noch allgemeiner, wenn man statt $\cos n\lambda$ schreibt: $\cos n(\lambda+\psi)$, wo ψ eine konstante Phasenverschiebung bedeutet.

Die Integration der Gleichung (7) unter dieser Anfangsbedingung gibt:

$$p = a+b\cos 2\varphi+c\sin 2\varphi\cos n(\lambda+\psi-\alpha t)- \\ -\frac{\beta\cos\varphi}{2\alpha}(\cos\varphi-\cos 30)[\sin 2\lambda-\sin 2(\lambda-\alpha t)]. \qquad (8)$$

Dieser Ausdruck für den Druck p enthält zwei Wellen, welche sich mit der Zeit nach Osten bewegen, eine Welle, die eine Fortbewegung der Anfangsverteilung bezeichnet und die schon oben gefundene thermische Welle, durch ganz denselben Ausdruck gegeben, der oben gefunden wurde. Die Schwingungsdauer der ersten beträgt $\tau_1 = \frac{2\pi}{n\alpha}$, die der zweiten (wie oben schon) $\tau_2 = \frac{\pi}{\alpha}$. Ist $n = 2$, d. h. sind auf dem ganzen Umfange des Weltkörpers zu Anfang nur zwei Depressionen und zwei Maxima vorhanden, so ist $\tau_1 = \tau_2$, die Schwingungsdauer der Gesamtwelle p also die gleiche. Hat n aber einen beliebigen anderen Wert (natürlich muß es eine ganze Zahl sein), so ist die Schwingungsdauer der Gesamtwelle offenbar das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von τ_1 und τ_2, kann daher zu anderer Größe anwachsen. In jedem Falle kann man sich den Ausdruck über diese gesamte Schwingungsdauer τ integriert denken und den Mittelwert des Luftdruckes für dieselbe bilden; derselbe ist dann gegeben durch:

$$\bar{p} = a+b\cos 2\varphi-\frac{\beta}{2\alpha}\cos\varphi(\cos\varphi-\cos 30)\sin 2\lambda.$$

Der mittlere Druck ist also genau derselbe, wie er bei der vorher gewählten einfacheren zweiten Anfangsverteilung war, die Hoch- und Tiefdruckgebiete, die superponiert wurden, haben

auf denselben keinen Einfluß, weswegen ein Vergleich desselben mit dem tatsächlich auf der Erde bestehenden berechtigter erscheint als bisher.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der ersten Welle ist wieder α, also dieselbe, wie die der zweiten »thermischen Welle«.

Um in obiger Gleichung (8) das c kennen zu lernen, wurde angenommen, daß in der Anfangsverteilung die Zentren der Maxima und Minima einen um 20 *mm* verschiedenen Druck (in 45° Breite) haben; daraus folgt $c = 10$ *mm*.

Es wäre nun am angenehmsten, die Gleichung (8) in der Art zu verwenden, daß man z. B. die Bahnen der Maxima und Minima berechnet. Hiezu wäre

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} = \frac{\partial p}{\partial \lambda} = 0$$

zu setzen, aus den beiden Gleichungen die Zeit zu eliminieren und so die Gleichung jener Bahn aufzustellen. Man kommt hiebei aber auf einen Ausdruck vierten Grades, weshalb dies unterlassen wurde.

Wenn nicht mathematische Schwierigkeiten da wären, könnten aus diesen beiden Gleichungen auch die Geschwindigkeiten der Maxima und Minima berechnet werden.

So aber mußte ich mich darauf beschränken, die Gleichung für p für einen Ort zu verschiedenen Zeiten und für verschiedene Orte zu einer Zeit auszuwerten, also das zu berechnen, was man sonst als Barographenkurven und Wetterkarten bezeichnet.

Hiezu muß eine Wahl über die Größe n getroffen werden.

(Erstes Beispiel.) Ist $n = 2$, so ergibt sich p als eine Welle von der Schwingungsdauer $\tau_2 = \frac{\pi}{\alpha}$, die schon oben zu 11 Tagen berechnet wurde. Die beiden Einzelwellen von Sinusform setzen sich zu einer neuen von der gleichen Form zusammen. Wir erhalten daher für den Druck an einem Ort eine einfache Sinuswelle mit der Zeit.

(Zweites Beispiel.) Für $n = 4$ bleibt die Schwingungsdauer der Gesamtwelle die gleiche, die Kurve ist keine Sinuswelle mehr, sondern eine ziemlich einfache Kurve mit zwei Maximis und Minimis. Je nach der angenommenen Phasenverschiebung ψ hat sie verschiedene Gestalt. Ein Beispiel für ihren Verlauf zeigt die Fig. 1, p. 847; dabei wurde gesetzt:

$$n = 4, \quad \psi = 15, \quad \varphi = 50, \quad \lambda = 0.$$

Von der für einen Ort konstanten Größe $a + b \cos 2\varphi$ ist abgesehen und nur die Schwankung des Luftdruckes dargestellt worden.

(Drittes Beispiel). Für $n = 3$ wird die Kurve schon viel komplizierter. Hier ist $\tau_1 = \frac{2\pi}{3\alpha}$, τ_2 wie früher $= \frac{\pi}{\alpha}$. Die gemeinsame Schwingungsdauer der ganzen Druckwelle als das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der beiden Teilwellen ist somit $\tau = \frac{2\pi}{\alpha}$; in diese Zeit fallen drei ganze Wellen der ersten, zwei ganze der letzten Art. Die Schwingungsdauer beträgt also in diesem Falle 22 Tage. Ein Beispiel für diese Schwankung ist in Fig. 2 dargestellt; hier wurde gesetzt:

$$n = 3, \quad \psi = 0, \quad \varphi = 50, \quad \lambda = 0.$$

An demselben Orte der Erde wie beim obigen Beispiel, unter 50° Breite in der Mitte des einen Kontinents, zieht daher eine Luftdruckwelle von der angegebenen Gestalt hinweg. In dem einen Falle wiederholt sich die Kurve nach 11 Tagen, in dem anderen nach 22 Tagen.

(Viertes Beispiel.) Da n eine ganze Zahl bleibt, so ist die Schwingungsdauer für jede andere Annahme von n immer $\frac{2\pi}{\alpha} = 22$ Tage, solange für die Anfangsverteilung die Form $\cos n(\lambda + \psi - \alpha t)$ gewählt wird. So erhält man für 5 Zyklonen und Antizyklonen in der Anfangslage eine Barographenkurve, wie sie die Fig. 3 darstellt; hiebei wurde gesetzt:

$$n = 5, \quad \psi = 20, \quad \varphi = 50, \quad \lambda = 0.$$

Zeichnet man aus den täglichen Wetterberichten für ein Wintermonat den Gang des Luftdruckes einer Station im Innern Nordamerikas auf, so erhält man leicht ähnliche Kurven, wie die von Fig. 3, wobei allerdings der große Unterschied besteht, daß sich dieselben in Wirklichkeit nach einem bestimmten Zeitraume nicht wiederholen, wie dies hier der Fall sein sollte. Es ist aber klar, daß man für etwas kompliziertere Annahmen über die Wärmezu- und -abfuhr sowie über die Anfangsverteilung, wie sie hier gemacht wurden, leicht sehr unregelmäßige Barographenkurven mit langer Schwingungsdauer der Gesamtwelle erhalten würde; wenn sich dann während des Ablaufes einer Periode die Jahreszeit ändert und mit ihr die Zu- und Abfuhr von Wärme $\frac{dQ}{dt}$, so kann auch die Periode sich nicht wiederholen und die Kurve wird unperiodisch und vollkommen unregelmäßig. Der Zweck dieser Kurvendarstellung konnte also nur der sein, die äußere Ähnlichkeit zwischen den Resultaten der Rechnung und der Beobachtung zu zeigen, ohne irgend welchen Anspruch darauf zu machen, den wirklichen Gang des Luftdruckes durch solche einfache Funktionen darzustellen.

(Fünfte Anfangsverteilung.) Um noch einen Begriff von den aus der Superposition der Anfangswelle und der thermischen Welle entstehenden Druckverteilungen nach gewisser Zeit über der Oberfläche unseres Weltkörpers zu bekommen, wurden einige Wetterkarten berechnet. Die bisher angenommene Anfangsverteilung wurde hiezu ein wenig abgeändert; sie wurde gesetzt:

$$p_0 = a + b\cos 2\varphi - c\cos 3\varphi \cos n(\lambda + \psi).$$

Tritt nämlich $-c\cos 3\varphi$ an Stelle von $c\sin 2\varphi$, so erstrecken sich die Druckdifferenzen der Maxima und Minima nicht so weit zum Äquator, sondern verschwinden schon bei 30°. Da es sich hier stets nur um Breiten handelt, die dem Äquator nicht zu nahe liegen, so spielt die Verteilung, welche durch diesen Ansatz in Breiten unter 30° zu Anfang herrschen würde, keine Rolle und wurde nicht weiter berücksichtigt.

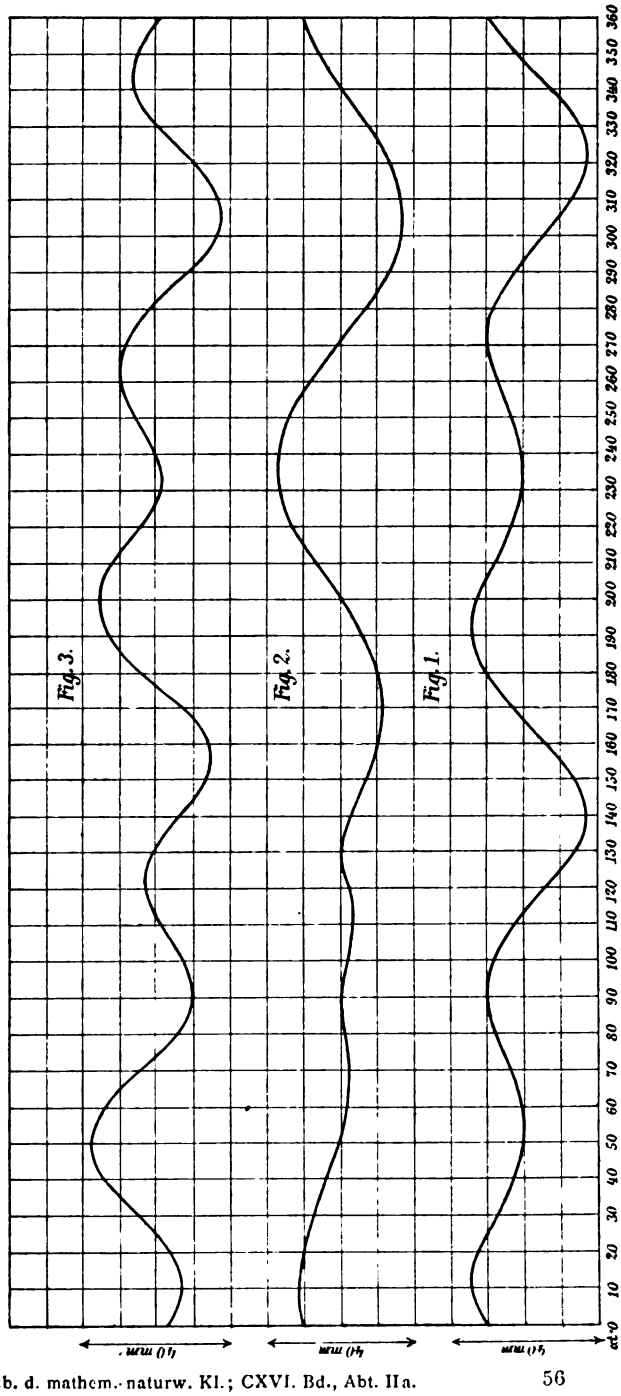


Fig. 3.
Fig. 2.
Fig. 1.
0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 120 130 140 150 160 170 180 190 200 210 220 230 240 250 260 270 280 290 300 310 320 330 340 350 360

Die Zentren des tiefen, beziehungsweise hohen Druckes der Anfangsverteilung liegen jetzt bei 60° (für das Glied $c \cos 3\varphi \cdot \cos n(\lambda+\psi)$), am Pole verschwinden die Unterschiede. Über diese Verteilung ist noch die Abnahme des Druckes gegen den Pol $a+b \cos 2\varphi$ gelagert. Wir wollen $a = 755\ mm$, $b = 10\ mm$, $c = 10\ mm$ und $\psi = 0$ setzen und damit zunächst die Anfangsverteilung darstellen (Tafel 1). Die Wetterkarte zeigt die angenommene Anfangsdruckverteilung für den Fall, daß drei Minima und drei Maxima vorhanden sind, also für $n = 3$. Sie stellt in Merkatorprojektion unseren Weltkörper von 30 bis 90° nördlicher Breite dar. Wie bisher werden auf demselben zwei Kontinente und zwei Meere angenommen; das Gebiet der letzteren ist auf der Karte mit Wellenlinien bedeckt.

Die Veränderung der Druckverteilung wird berechnet aus der Integralgleichung

$$p = a+b \cos 2\varphi - c \cos 3\varphi \cos 3(\lambda - \alpha t) - \frac{\beta \cos \varphi (\cos \varphi - \cos 30)}{2\alpha} [\sin 2\lambda - \sin 2(\lambda - \alpha t)].$$

Setzt man z. B. $\alpha t = 45°$, so erhält man die Druckverteilung nach der Zeit $\frac{\tau}{8}$, oder, da $\tau = 22$ Tage, nach 2·75 Tagen. Das Resultat dieser Rechnung ist in Tafel 2 dargestellt. Es zeigt sich, daß statt der drei Maxima und drei Minima eigentlich jetzt nur mehr zwei vorhanden sind. Das östliche Minimum hat im Westen eine Isobarenausbuchtung, die das dritte verkümmerte Minimum nachweist. Auch das zwischen den beiden anfangs gelegene Maximum ist verschwunden. Hingegen hat sich das westliche Minimum vertieft, die beiden Maxima sich erhöht, in ungleicher Weise.

Ferner fanden wir für die Geschwindigkeit der Bewegung der Anfangsverteilung im früheren $\alpha = 3 \cdot 3 . 10^{-6}/\text{sec}^{-1}$ im Winkelmaß oder im gleichen Maß pro Tag 0·285, was gleich ist 16·4 Längengraden. Dies gibt in 2·75 Tagen den Weg von 45·1 Längengraden. Aus dem Vergleiche der Tafeln 1 und 2 sieht man, daß in dieser Zeit das mit I bezeichnete Minimum tatsächlich etwa den Weg von 50° zurückgelegt hat, das mit III

bezeichnete einen solchen von nur 20°. Die Geschwindigkeit der Bewegung der Depressionen, welche 45 Längengrade betragen sollte, wird also durch die thermische Welle sehr verändert. Nebstbei hat das Minimum I sowie die Maxima westlich und östlich davon auch eine von der Ost—West-Richtung abweichende Bewegung eingeschlagen. Das Minimum ist etwas gegen Süden gezogen, die Maxima gegen Norden. Wir beobachten also sowohl eine Intensitätsänderung als eine Änderung der Geschwindigkeit und Zugrichtung der Gebiete hohen und tiefen Druckes.

Bei der Willkürlichkeit in der Wahl der Bedingungen wird von einer weiteren Darstellung des Verlaufes der Druckverteilung abgesehen, da dies eine Beispiel genügen dürfte, um zu zeigen, wie einfache Voraussetzungen schon so komplizierte Veränderungen im Gefolge haben. Es muß aber noch darauf hingewiesen werden, daß der Einfluß von Wasser und Kontinent nicht bloß darin besteht, den Druck zu erniedrigen, beziehungsweise zu erhöhen, sondern daß es ganz darauf ankommt, mit welcher Phasenverschiebung die thermische Welle und die Druckwelle der Anfangsverteilung aufeinandertreffen. Zur Zeit Null ist die thermische Welle ausgeglichen. Dann beginnt der Druck über dem Kontinent zu steigen, hiedurch wird z. B. das Minimum III an der Westküste des einen Kontinents in seiner Bewegung gebremst und bewegt sich in der Zeit $\frac{\tau}{8}$ eben nur um etwa 20 Längengrade statt um 45. Würde das Minimum an der Westküste zu einer anderen Phase der thermischen Welle auftreffen, etwa, wenn auf dem Kontinent der Druck durch sie zu fallen beginnt, so würde die Bewegung des Minimums beschleunigt werden können. Die Depression II, zu Anfang am Kontinente, wird durch Wärmeentziehung fast ausgeglichen; es bleibt nur eine Isobarenausbuchtung zurück; am Meere wird sie sich wieder ausbilden, wie eine Berechnung für den Zeitpunkt $\frac{\tau}{4}$ zeigt.

Auf Tafel 3 wurde noch die Verteilung des mittleren oder normalen Luftdruckes $\bar{p}$ für den Verlauf einer Periode dargestellt, wie sie sich aus der oben angeführten Integralgleichung mit den gewählten Konstanten ergibt. Die Lage der Minima an der Ostgrenze der Meere, der Maxima an der Ostgrenze der Kontinente stimmt mit der Erfahrung, wie schon oben bemerkt wurde, nicht überein. In Wirklichkeit liegen dieselben um weniger als die halbe Breite des Meeres verschoben von der Mittellinie der Meere und Kontinente entfernt. Natürlich wird hier die spezielle Gestaltung der Küsten von Einfluß sein; doch kommt auch bei einer bloßen Berechnung dieser Lagen, wie sie hier versucht wurde, die Voraussetzung, die über die zugeführte Wärme gemacht wird, sehr in Betracht.

Man könnte z. B. diese Annahme, wie schon oben angedeutet, auch so formulieren, daß die Wärmezufuhr dem Unterschiede der normalen Oberflächentemperatur ϑ des Weltkörpers und der jeweiligen Lufttemperatur proportional gesetzt wird, also

$$\frac{dQ}{dt} = a(\vartheta - T_0),$$

wobei

$$T_0 = T + \frac{\delta H}{2},$$

wenn δ die Temperaturabnahme nach oben bezeichnet. Auf diese Weise erhält man durch Integration eine Verschiebung des normalen Druckes im obigen Sinne, die nicht gerade die halbe Breite eines Meeres beträgt, sondern von der Konstanten a abhängig ist.

Das hauptsächliche Resultat dieser Annahmen und Rechnungen ist der Nachweis, daß sich aus denselben die Entwicklung zweier Druckwellen von ungleicher Periode und Phase ergibt, deren Übereinanderlagerung recht komplizierte und langperiodische Schwingungen des Luftdruckes hervorrufen kann. Hiebei ist die »thermische« Welle etwas Primäres, die angenommene Anfangsverteilung, die sich nach Osten verschiebt, etwas mehr Sekundäres.

Die Entstehung der Luftdruckgebilde, die in die Anfangsverteilung einzusetzen sind, ist vielleicht, wie schon oben gesagt, auf unserer Erde durch recht geringfügige Details in der Verteilung von Wasser und Land gegeben. Die thermische Welle auf unserer Erde wird dagegen wesentlich von der Land- und Wasserverteilung in großen Zügen abhängen, weswegen es vielleicht bei genauerer Kenntnis der zu verschiedenen Zeiten und an verschiedenen Orten zugeführten Wärmemenge möglich sein wird, diese Druckwelle, wenigstens in ihrem Wesen, auch für unsere Erde zu berechnen. Mit einer Kenntnis derselben wird man dann an eine gegebene Anfangsverteilung herantreten können, die wirklich beobachtet wurde, und die Veränderungen, welche sie erleidet, auswerten können.

Es ist bisher kein Nachweis erbracht worden, daß eine derartige thermische Welle wirklich existiert. Sie müßte unter dem Kriterium gesucht werden, daß zu einer bestimmten Jahreszeit und an einem Ort eine periodische Druckschwankung von mehrtägiger Dauer aus dem Gange des Barometers entnommen werden kann. Nach Abzug dieser Druckschwankung müßte eine andere Welle übrig bleiben, welche sich gegen Osten verschiebt; letzteres wäre nachzuweisen, indem derselbe Vorgang für einen anderen Ort im Osten des ersteren eingeschlagen würde. Hier müßte gleichfalls die thermische Welle, vielleicht von anderer Periode, berechnet und aus der Druckkurve eliminiert werden; das Übrigbleibende müßte dann jene Welle vom westlich gelegenen Orte mit einer gewissen Phasenverschiebung sein. Daß es bei der Struktur unserer Erde möglich ist, daß die thermische Welle in jeder Breite eine andere Periodenlänge hat, ist wohl klar; sie kann vielleicht als Summe mehrerer Sinuswellen dargestellt werden. Eine derartige Untersuchung wurde hier nicht durchgeführt. Sie könnte aber unter Abwägung der wahren und nur scheinbaren Wellenlängen vielleicht gemacht werden, wenn versucht würde, die Barographenkurve durch eine Fourier'sche Reihe darzustellen. Eine mehr physikalische Methode wäre es, die Größe von $\frac{dQ}{dt}$ durch Messungen zu bestimmen, wobei freilich die Schwierigkeit darin besteht, stets die Temperatur derselben Luftmenge zu

messen. Diese Untersuchung wäre wohl auch abgesehen von der weiteren Rechnung sehr nützlich, da die Anwendung unserer Differentialgleichung (5) dann auch ohne Integration schon praktische Verwendbarkeit hätte.

Eine kleine Andeutung für die Realität der errechneten thermischen Welle scheint wenigstens in einem Falle vorhanden zu sein. Die Depressionen, welche vom Stillen Ozean im Winter gegen den nordamerikanischen Kontinent ziehen, bleiben einmal an der Westküste zuweilen ein paar Tage lang stehen, ehe sie auf den Kontinent wandern, ein anderes Mal bewegen sie sich, scheinbar ohne Widerstand zu finden, über die Küste weg. Dieser Vorgang erinnert geradezu an das oben besprochene Beispiel auf Tafel 2. Die zuweilen beobachtete Rückläufigkeit von Depressionen kann auch in der thermischen Welle begründet sein.

Ein schmälerer Kontinent und ein schmäleres Meer verursachen eine Verkleinerung der Länge unserer thermischen Welle, eine Verbreiterung derselben eine Vergrößerung. Auf unserer Erde, wo auf der Nordhälfte die Kontinente Nordamerika und Asien so verschiedene Ausdehnung haben, wird die thermische Welle keine einfache Sinusschwingung mehr sein. Ohne Rechnung ist zu erwarten, daß die Welle hier aus einer kürzeren und einer längeren Periode bestehen wird, die aufeinanderfolgen.

Was die Geschwindigkeit des Fortschreitens der thermischen Welle wie der gegebenen Anfangsverteilung des Druckes betrifft, so ist der für den Winter berechnete Wert kein unwahrscheinlicher; vermöge der in der Formel für a vorkommenden Größe γ, der Druckabnahme gegen den Pol in der Höhe H, ergibt sich leicht, daß die Geschwindigkeit im Winter am größten, im Sommer am kleinsten ist, da die Temperaturdifferenzen zwischen Äquator und Pol denselben Gang haben; dies stimmt mit der Erfahrung überein.

Der ganzen schematischen Rechnung wird man daher eine gewisse Berechtigung nicht absprechen können. Auch ist die Bedeutung der Wärmezu- und -abfuhr für die Bewegung der Luft nicht zu leugnen. Da man aber bisher über diese Größen wenig oder nichts weiß, so ist die Prüfung der Rechnungsergebnisse nicht recht möglich.

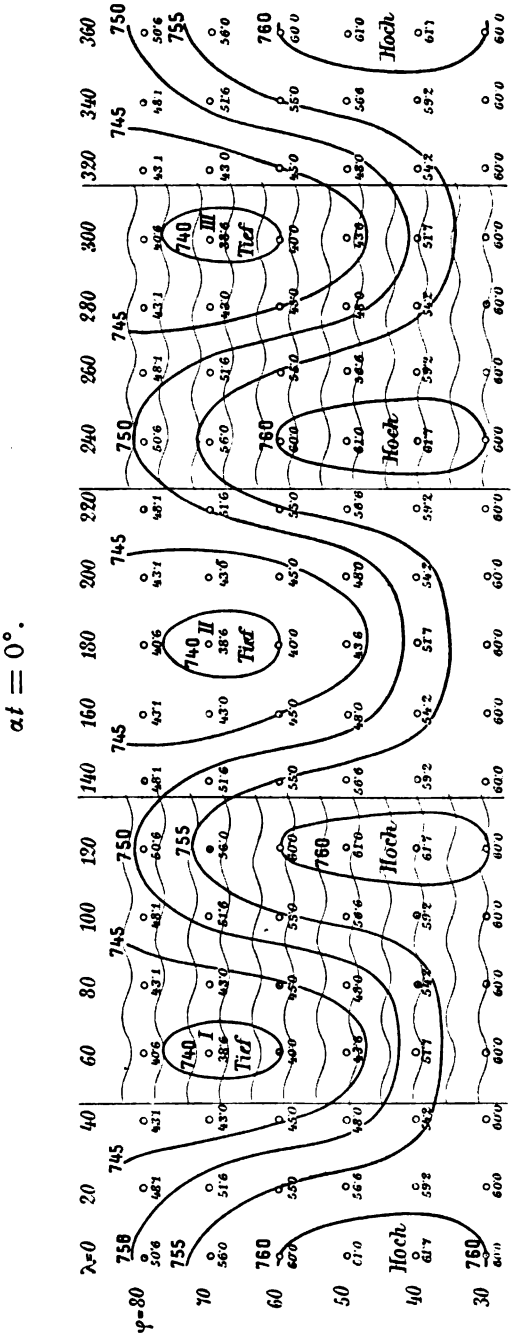
Die allgemeine Vorstellung, welche aus dieser Untersuchung gewonnen wurde, ist also folgende: Die Luftdruckgebilde (Maxima, Minima und alle Zwischenstadien) bewegen sich ursprünglich mit einer ziemlich konstanten Geschwindigkeit von Westen nach Osten, die aber von der Jahreszeit abhängt. Sie werden modifiziert durch den erwärmenden, beziehungsweise abkühlenden Einfluß der Meere und Kontinente auf die über sie hinstreichenden Luftmassen. Durch diesen Einfluß wird die mittlere Druck- und Temperaturverteilung über Wasser und Land rechnerisch in ziemlich ausreichender Weise erklärt, was die Größenordnungen betrifft. Die Meere und Kontinente führen der Luft zwar zu einer Jahreszeit stets ungefähr gleiche Wärmemengen zu (oder ab), aber trotzdem ist die dadurch hervorgebrachte Wirkung auf den Luftdruck keine konstante, sondern eine schwankende. Dies kommt daher, daß sich mit Änderung des Luftdruckes auch die Bewegung der Luftmassen ändert und mithin die Temperatur der Luft, welche im Laufe der Zeit über einen Ort hinwegkommt. Die Schwankungen des Luftdruckes nur unter dem Einflusse von Wärmezufuhr finden um einen Mittelwert herum statt, der einen Gleichgewichtszustand repräsentiert und in den mittleren Isobarenkarten zum Ausdrucke kommt. Neben dieser »thermischen Welle« wird der Luftdruck durch die vorhandenen Luftdruckgebilde bestimmt, die von Westen nach Osten sich bewegen. Der tatsächliche Verlauf des Luftdruckes wird auf diese Weise aus der thermischen Druckwelle und den von Westen her sich verschiebenden Luftdruckgebilden, die sich durch periodische Funktionen darstellen lassen, zusammengesetzt; die Kombination beider Wellen gibt leicht komplizierte Perioden von langer Schwingungsdauer, welche den Aufzeichnungen der Barographen analog sein sollen. Die zu Anfang aufgestellte Differentialgleichung (5), welche unter den sieben zitierten Annahmen abgeleitet wurde, enthält den wesentlichen Inhalt des oben Gesagten; sie ist aber allgemeiner als die Integralgleichung.

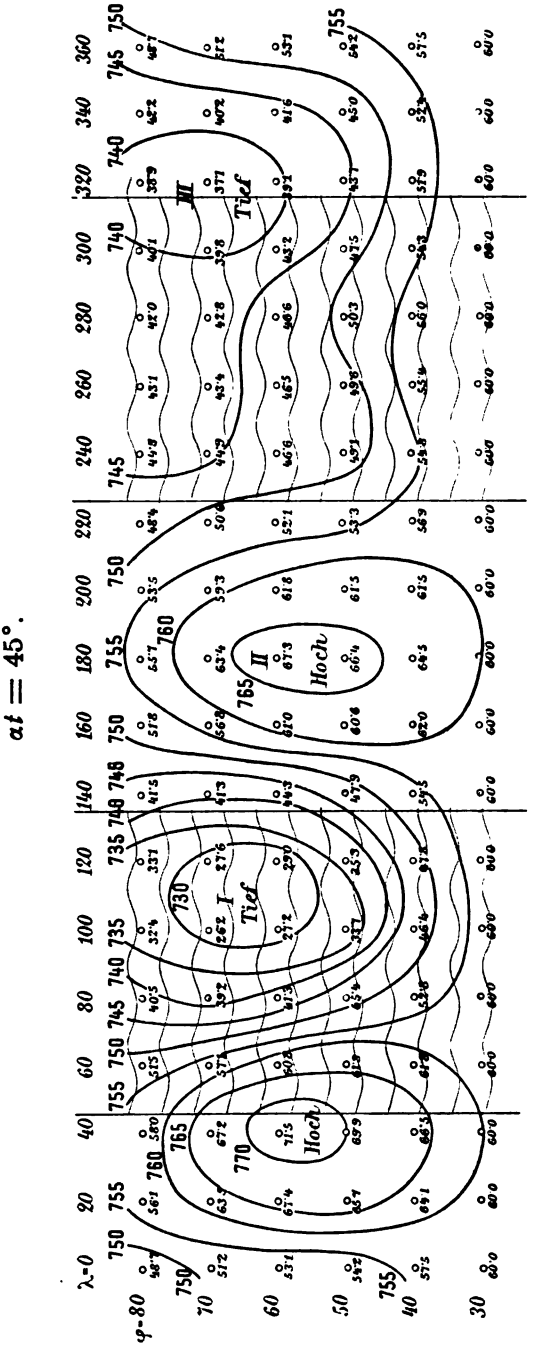
Die große Rolle, welche der »Anfangsverteilung« hier zugeschrieben wurde, wird sich in Wirklichkeit etwas anders darstellen. Die kleineren Druckgebilde werden wohl wesentlich durch lokale Wärmezu- und -abfuhr entstehen und vergehen,

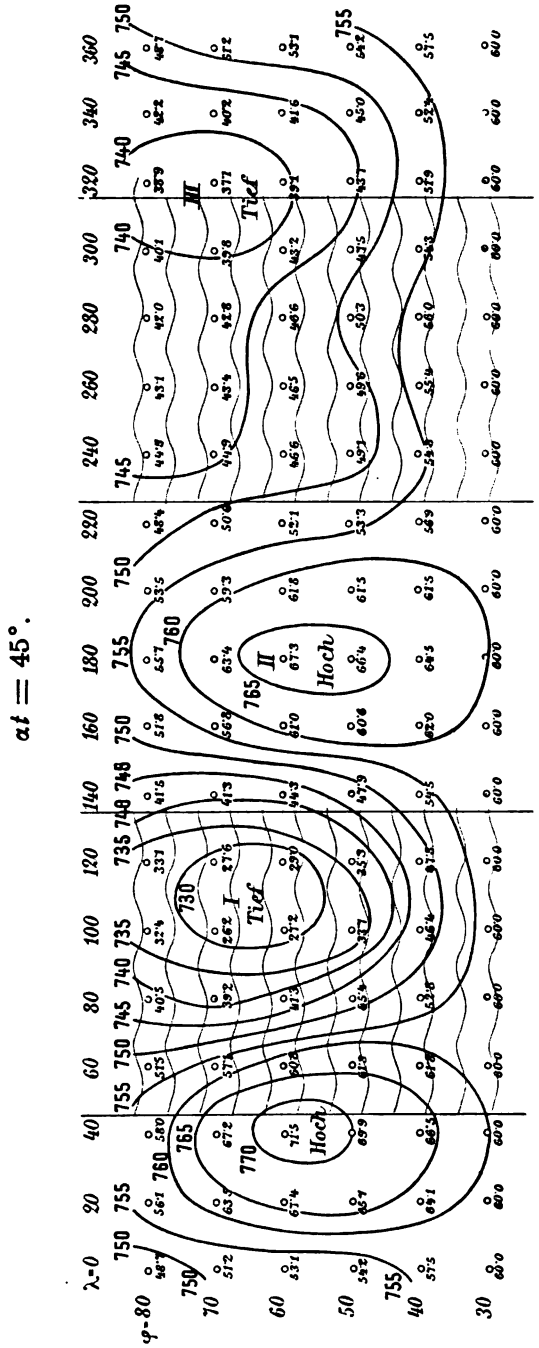
d. h. die Funktion $\frac{dQ}{dt}$ wird in Wahrheit viel komplizierter, auch von der Zeit abhängig sein. Dadurch werden die kleineren Druckgebilde die ihnen hier in der Anfangsverteilung vorgeschriebene unbegrenzte Lebensdauer verlieren, und eine fortwährende Um- und Neubildung derselben muß eintreten. Der äußerst einfache Ansatz für $\frac{dQ}{dt}$ ist der formale Grund für die unbeschränkte Lebensdauer der Maxima und Minima unseres Beispiels. Wird $\frac{dQ}{dt}$, wie oben angedeutet, von der Zeit abhängig, so können neben der Dämpfung der Perioden des Druckes stets neue Maxima und Minima durch lokale Wärme- und Kältezentren entstehen. Die Welle der Anfangsverteilung wird dann als gedämpfte Schwingung bestehen bleiben und daneben die thermische Welle eine weitaus kompliziertere Form annehmen.

Somit ist es wohl klar, daß eine Kenntnis der Größe $\frac{dQ}{dt}$ in diesem Stadium der Angelegenheit das zu sein scheint, was uns am meisten abgeht. Wäre für irgend einen Fall die zugeführte Wärme bekannt, so ließe sich die Gleichung (5) sofort prüfen; nach wenigen derartigen Proben könnte dann der umgekehrte Weg eingeschlagen und diese Größe aus der beobachteten Druckänderung und dem beobachteten Gradienten mittels jener Gleichung für jene Orte der Erdoberfläche bestimmt werden, an welchen man nicht hoffen kann, durch direkte Messungen eine Vorstellung von der Wärmezufuhr und Abfuhr zu erhalten.

Es sei zum Schlusse nochmals betont, daß die gegebenen Rechnungen nur als Hypothesen aufgefaßt werden sollen, daß insbesondere eine Übertragung der gefundenen Resultate auf die tatsächlichen Verhältnisse nur in Form von Analogien möglich ist. Die Arbeit ist aus dem rein persönlichen Bedürfnis entstanden, in dem Chaos der Luftdruckveränderungen an Stelle keiner Vorstellung doch wenigstens eine schematische zu setzen.


$\alpha t = 0°$.
λ=0
φ=80
Tief
Hoch


$\alpha t = 45°$.
I Tief
II Hoch
III Tief
Hoch
λ-0
φ-80


$\alpha t = 45°$.
I Tief
II Hoch
III Tief
Hoch
λ-0
φ-80

Über die Kältemischung aus kristallisiertem Natriumsulfat und konzentrierter Salzsäure

von

L. Szydlowski.

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität Graz.

(Mit 3 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 2. Mai 1907.)

I. Vorbemerkungen.

Die Kältemischung aus Glaubersalz und konzentrierter Salzsäure wurde schon vor mehreren Dezennien[1] zur Erzielung von tiefen Temperaturen verwendet. Bevor die feste Kohlensäure und die flüssige Luft bekannt und allgemein zugänglich waren, wurde diese Kältemischung, wie auch mehrere andere, häufig benützt, und zwar vorwiegend von den Chemikern, da die Ausgangsmaterialien (kristallisiertes Natriumsulfat und konzentrierte Salzsäure) meistens bei der Hand und in jeder, selbst in der heißen Jahreszeit gut haltbar sind.

Obwohl aber diese Kältemischung seit langer Zeit bekannt ist, sind die Angaben über dieselbe sehr mangelhaft, zum Teil auch, wie weiter unten dargelegt wird, unrichtig. Das meistverbreitete Rezept lautet: Die Kältemischung besteht aus acht Teilen Glaubersalz und fünf Teilen konzentrierter Salzsäure und erniedrigt die Temperatur von $+12°$ auf $-18°$.

---

[1] Von wem und wann die Mischung zuerst angewendet wurde, konnte aus der Literatur nicht ersehen werden. Es sei nur erwähnt, daß das angeführte Rezept bereits in den Lehrbüchern der Fünfzigerjahre des vorigen Jahrhunderts enthalten ist, unter anderem in dem Lehrbuche der physikalischen Chemie von H. Buff, H. Kopp und F. Zamminer, 1857 (bei Vieweg & Sohn), p. 231.

Über den physikalisch-chemischen Vorgang, der die Temperaturerniedrigung verursacht, war nur bekannt, daß das Kristallwasser des Glaubersalzes verflüssigt wird und daß sich dabei Natriumchlorid bildet.

Soweit die Angaben, welche sich in den meisten Lehr- und Handbüchern finden.

Eine Ausnahme davon bildet nur die Abhandlung von M. A. Ditte,[1] in welcher die Theorie des Vorganges eingehender erörtert wird. Obwohl nicht alle Ansichten Ditte's richtig sind, so seien doch die wichtigsten Stellen aus seiner Abhandlung im folgenden angeführt, weil nämlich dort der ganze Komplex der einschlägigen theoretischen Fragen aufgeworfen wird.

Die betreffenden Stellen sind einem Referate in »Jahresbericht über die Fortschritte der Chemie«, Bd. 33, p. 104 bis 107 (1880) entnommen und lauten folgendermaßen:

»M. A. Ditte erörtert die Kältemischungen aus einer Säure und einem hydratwasserhaltigen Salze. Nach ihm hat bei der Mischung von Glaubersalz und überschüssiger Salzsäure folgender Vorgang statt:

$$\underbrace{Na_2SO_4 . 10H_2O}_{\text{fest}} + \underbrace{2HCl}_{\text{flüssig}} = \underbrace{2NaCl}_{\text{fest}} + \underbrace{H_2SO_4 + 10H_2O}_{\text{flüssig}},$$

gemäß dem Prinzipe des Arbeitsmaximums, da das wasserfreie Sulfat von Salzsäure unter Wärmeentbindung zersetzt wird. Die Temperaturerniedrigung bei Anwendung des kristallisierten Sulfats kommt daher, daß das gebildete Natriumchlorid wasserfrei ist, folglich sämtliches vorher an das Sulfat gebundene Wasser frei wird und nach der Reaktion, mit Ausnahme eines Niederschlages von Kochsalz, alles flüssig ist. Der Einfluß der Zustandsänderung des Wassers tritt deutlich hervor, wenn man von ungefähr 33° ausgeht und in einem Falle festes und im anderen in seinem Kristallwasser geschmolzenes Glaubersalz anwendet. Im ersteren Falle sinkt die Temperatur plötzlich

[1] M. A. Ditte, Sur les mélanges réfrigerants formés d'un acide et d'un sel hydraté. Compt. rend., *90*, 1163 (1880).

gegen —8°, im zweiten bemerkt man nur eine schwache Temperaturänderung; in beiden Fällen aber bilden sich dieselben Produkte, nämlich gelöste Schwefelsäure und niedergeschlagenes Natriumchlorid. Mit 16 Teilen Glaubersalz und 12 Teilen Salzsäure des Handels, welche ungefähr ein Drittel Chlorwasserstoff enthält und demnach der Zusammensetzung $HCl.4H_2O$ entspricht, erhält man eine Abkühlung um ungefähr 33°.

Abgesehen von einigen Besonderheiten, finden ähnliche Verhältnisse statt bei den Mischungen von Salpetersäure und Natriumphosphat oder Natriumsulfat, von Salzsäure und Alaun oder Natriumsulfat. Daher ist bei der Mischung eines hydratwasserhaltigen Salzes mit einer Säure die Abkühlung nicht der einfachen Lösung des Salzes zuzuschreiben, sondern es findet stets eine doppelte Umsetzung statt, entsprechend dem Grundsatze der größten Arbeit. Diese Umsetzung, welche nur dann vollständig ist, wenn das neugebildete Salz in der sauren Flüssigkeit sich nicht löst, ist gewöhnlich unvollständig und durch den entgegengesetzten Vorgang begrenzt und mit einer Wärmeentbindung verknüpft. Die beobachtete Temperaturerniedrigung rührt daher, daß die angewandten Salze eine große Menge Wasser enthalten, welche bei der Bildung eines wasserfreien Salzes von dem festen Salze abgespalten und verflüssigt wird. Diese Zustandsänderung verschlingt die bei der Reaktion entbundene Wärme und entzieht der Flüssigkeit den Überschuß der zu ihrem Vollzuge nötigen lebendigen Kraft.« — So weit Ditte.

»Berthelot[1] stimmt bezüglich dieser Erklärung der Kältemischungen aus einer Säure und einem hydratwasserhaltigen Salze im allgemeinen mit Ditte überein. Entsprechend dem Prinzipe des Arbeitsmaximums findet der chemische Vorgang unter Wärmeentbindung statt. Dieser wirken als Wärme bindende Vorgänge in vierfacher Gestalt entgegen: Die Dissoziation des Glaubersalzes, die Desaggregation durch das Lösungsmittel (Gleichgewicht zwischen Natriumdisulfat und

[1] M. Berthelot, Sur les mélanges réfrigerants formés par un acide et un sel hydraté. Compt. rend., *90*, 1191 (1880).

Wasser), die Lösung (welche bei Glaubersalz und Salzsäure nur ein Mittelglied ist), endlich die Verflüssigung (des Kristallwassers)«.

Wie man sieht, erblicken Berthelot und Ditte in dem chemischen Vorgange bei unserer Kältemischung eine Bestätigung des Prinzips des Arbeitsmaximums. Und es sei daher hingewiesen auf eine entgegengesetzte Auffassung von J. H. van 't Hoff, der gerade in diesem Vorgange ein Beispiel einer Reaktion sieht, die dem Prinzipe des Arbeitsmaximums widerspricht.

J. H. van 't Hoff[1] sagt:

»Dennoch ist es nicht schwer, Beispiele anzuführen, bei denen eine chemische Reaktion unter Wärmeabsorption erfolgt: Die Kältemischungen, z. B. von Salzsäure und Glaubersalz, welche auf Stattfinden einer chemischen Reaktion beruhen, im gegebenen Falle:

$$Na_2SO_4 . 10H_2O + 2HCl = 2NaCl + H_2SO_4 + 10H_2O$$

zeugen von Tatsachen, welche dem »Principe du travail maximum« widersprechen.«

Ich beschränke mich an dieser Stelle nur auf die Anführung der Ansichten der vorerwähnten Autoren und überlasse die Diskussion der betreffenden Fragen dem Schlußworte, wo dieselbe an der Hand der gewonnenen Resultate der Untersuchung erfolgen kann.

Was den Gang der Untersuchung anlangt, so wurden mir die kalorimetrischen Methoden vom Herrn Vorstande des physikalischen Institutes der Universität Graz, Hofrat Prof. L. Pfaundler, mitgeteilt, dessen Anregung die vorliegende Arbeit ihre Entstehung zu verdanken hat. Auch Pfaundler's »Über die Kältemischungen im allgemeinen etc.« und die Arbeiten seiner Schüler Tollinger,[2] Hammerl[3] und P. E.

[1] Acht Vorträge über physikalische Chemie, p. 20 bis 21 (bei Vieweg & Sohn, 1902).

[2] Tollinger, Über die beim Lösen des salpetersauren Ammoniaks in Wasser auftretenden Wärmeerscheinungen etc. Diese Sitzungsberichte, *72* (1875).

[3] Hammerl, Über die Kältemischung aus Chlorcalcium und Schnee. Diese Sitzungsberichte, *78*, 59 (1878).

Neumayr[1] waren für mich in mancher Beziehung maßgebend, und insofern schließt sich die vorliegende Abhandlung an die Reihe der vorerwähnten Publikationen an. Dieselbe weist aber auch, der Natur der untersuchten Prozesse entsprechend, wesentliche Unterschiede von den zitierten Abhandlungen auf. Es wurde nämlich der ganzen Untersuchung eine ausschließlich experimentelle Grundlage gegeben und ein neues Kapitel, die gewichtsanalytische Untersuchung der Reaktionsprodukte, den früher angewandten Methoden hinzugefügt. Dagegen unterblieb die mathematische Behandlung des Gegenstandes, da dieselbe im vorliegenden Falle nicht gut anwendbar war. Und da ferner die experimentelle Untersuchung allein die vollständige Aufklärung der in Frage stehenden Prozesse lieferte, so war die mathematische Bearbeitung der Resultate auch ohne Belang.

Um die Fragen, die bei der Untersuchung in Betracht kamen, zu beantworten, wurden folgende Bestimmungen und Messungen ausgeführt:

1. Direkte Bestimmungen der Temperaturerniedrigungen.
2. Messungen des Kälteeffektes der Mischungen bei 0° in Bunsen'schen Eiskalorimetern.
3. Messungen des Kälteeffektes oberhalb von 0°, und zwar bei 6° und 15° nach der Mischungsmethode.
4. Quantitativ-analytische Untersuchung der nach beendigter Reaktion vorhandenen Gemische.

Was die erreichbare niedrigste Temperatur anbelangt, so konnte dieselbe nicht in üblicher Weise bestimmt werden. Näheres darüber in dem betreffenden Abschnitte.

Bei sämtlichen Versuchen wurde kristallisiertes Natriumsulfat in Form des feinen Kristallmehles angewandt, weil nur in dieser Form das Salz den genauen Kristallwassergehalt von 10 Molekülen (55·90%) besitzt. Auf die Bestimmungen des Kristallwassers wurde besondere Sorgfalt verwendet und nur diejenigen Proben des Salzes gebraucht, bei denen der gefundene Kristallwassergehalt um nicht mehr als 0·20% von dem berechneten Werte, 55·90%, differierte. Meistens aber war die Differenz nur 0·05 bis 0·10%.

[1] Neumayr, Über die Bestimmung von Lösungswärmen im Bunsen'schen Eiskalorimeter. Ber. d. Innsbr. natur.-med. Ver., 1877.

II. Direkte Bestimmungen der Temperaturerniedrigungen.

Die folgenden Versuche haben hauptsächlich einen orientierenden Wert und machen keinen Anspruch auf große Genauigkeit. Trotzdem sind dieselben angeführt, weil sie einige nicht unwichtige Resultate lieferten, denen zufolge die bisherigen Angaben über die Kältemischung modifiziert werden müssen. Erstens war nämlich die beobachtete Temperaturerniedrigung bei mehreren Versuchen um ein Beträchtliches größer als die bis jetzt angegebene, und zwar statt 30° (von +12° bis —18°), im günstigsten Falle 39·8 (von +21·2° bis —18·6°); allerdings war dabei die Anfangstemperatur um zirka 9° höher.

Wenn man die Anordnung der Versuche in Betracht zieht, so ist es klar, daß die gefundenen Werte für die Temperaturerniedrigungen wegen der unvermeidlichen großen »Kälteverluste« keinesfalls zu hoch, sondern nur zu niedrig sein können.

Zweitens ersieht man aus den angeführten Verhältnissen zwischen Salz und Säure, daß man, um das günstigste Resultat zu erhalten, weniger Salzsäure braucht, als im Rezept angeführt ist (auf 8 Teile Salz 5 Teile Säure), ein Resultat, welches auch bei den kalorimetrischen Messungen bestätigt wurde.

Drittens wurde festgestellt, daß im allgemeinen die Mischungen mit stärkster Säure die größten Temperaturerniedrigungen liefern.

Schließlich wurde gefunden, daß es Mischungsverhältnisse gibt, bei denen, nachdem die Reaktionsprodukte wieder die Anfangstemperatur erlangt hatten, fast kein fester Rückstand in der Mischung zu finden, sondern beinahe alles gelöst war. Solche Mischungsverhältnisse waren die günstigsten, d. h. bei denselben wurden die größten Temperaturerniedrigungen beobachtet. Wie aus den Tabellen zu ersehen ist, sind es die Versuche: Gruppe I, Nr. 3, Gruppe II, Nr. 3, und Gruppe III, Nr. 1 und 2.

Die Versuche wurden in folgender Weise ausgeführt: Das kristallisierte Natriumsulfat wurde in einem zirka 150 cm^3 fassenden Kölbchen abgewogen, die Anfangstemperatur notiert,

dann möglichst rasch aus einer Bürette die erforderliche Menge Salzsäure zugesetzt, innig gemischt, die niedrigste Temperatur notiert und schließlich, nachdem die Mischung wieder die Anfangstemperatur der Ausgangssubstanzen erreicht hatte, von neuem gewogen. Außerdem wurde womöglich der Verlauf der Reaktion und das Aussehen der Mischung nach Beendigung des ganzen Prozesses beobachtet.

Das gebrauchte Thermometer war in Fünftelgrade eingeteilt und gestattete, Temperaturen bis auf 0·1° deutlich abzulesen.

Die Resultate sind in den folgenden Tabellen zusammengestellt und es bedeuten:

p das Gewicht des Salzes;
g das Gewicht der Salzsäure;
$p+g=m$ das Gewicht der Mischung;
$\frac{100\,g}{p}$ $\frac{\text{Salzsäure}}{\text{kristallisiertes Natriumsulfat}}$ in Prozenten,
$\frac{100\,p}{m}$ $\frac{\text{kristallisiertes Natriumsulfat}}{\text{Mischung}}$ in Prozenten.

In der letzten Kolumne sind außerdem die Anmerkungen über die Menge und das Aussehen des Niederschlages enthalten.

Tabelle I.

Gruppe I: Versuche mit 36·69prozentiger Salzsäure.

Nr.	p	g	$\frac{100\,g}{p}$	$\frac{100\,p}{m}$	$t°$	$t'°$	Δt	Anmerkungen
1	47·30	6·13	12·96	88·53	20·1°	−15·6°	35·7°	In der Reaktionmasse beträchtlicher kristallinischer Niederschlag.
2	42·15	9·16	21·73	82·15	20·2	−17·2	37·4	Kristallinischer Niederschlag, weniger als bei 1.
3	45·06	11·62	25·79	79·49	21·2	−18·6	39·8	Fast kein Niederschlag.

Nr.	p	g	$\frac{100\,g}{p}$	$\frac{100\,p}{m}$	$t°$	$t'°$	Δt	Anmerkungen
4	53·70	17·61	32·79	75·30	21·5°	−14·8°	36·3°	Geringer amorpher Niederschlag.
5	49·44	26·29	53·18	65·28	21·4	−15·2	36·6	Amorpher Niederschlag.
6	50·30	29·59	58·83	62·96	21·6	−15·3	36·9	Amorpher Niederschlag.
7	35·60	35·29	99·13	50·22	21·6	−12·2	33·8	Amorpher Niederschlag.
8	25·39	41·97	165·30	37·69	21·2	− 8·1	29·3	Amorpher Niederschlag.

Tabelle II.

Gruppe II: Salzsäure — 30·13% HCl.

Nr.	p	g	$\frac{100\,g}{p}$	$\frac{100\,p}{m}$	$t°$	$t'°$	Δt	Anmerkungen
1	50·68	5·70	11·24	89·88	20·4°	zirka 0°	20·4°	Nur geringe Verflüssigung.[1]
2	44·72	7·09	15·86	86·31	20·0	−12·6°	32·6	Beträchtlicher kristallinischer Niederschlag.
3	43·60	9·22	21·14	82·54	19·9	−17·2	37·1	Fast kein Niederschlag.
4	40·92	13·33	32·58	75·43	20·0	−14·8	34·8	Geringer Niederschlag.
5	40·83	21·76	53·29	65·23	20·4	−15·6	36·0	Geringer amorpher Niederschlag.
6	41·78	24·05	57·56	63·46	19·7	−14·4	34·1	Amorpher Niederschlag.
7	35·04	35·41	101·05	49·74	19·7	−11·8	31·5	Amorpher Niederschlag.
8	35·38	41·47	117·21	46·04	19·7	−11·8	31·5	Amorpher Niederschlag.

[1] Und dadurch wurde die Beobachtung erschwert.

Tabelle III.

Gruppe III: Salzsäure — 24·47% HCl.

Nr.	p	g	$\frac{100\,g}{p}$	$\frac{100\,p}{m}$	$t°$	$t'°$	Δt	Anmerkungen
1	38·30	12·52	32·69	75·36	21·0°	−11·8°	32·8°	Geringer kristalliniscer Niederschlag.
2	39·31	21·64	56·57	63·86	20·5	−12·0	32·5	Fast kein Niederschlag.
3	34·30	33·73	98·34	50·42	19·8	−10·0	29·8	Amorpher Niederschlag.
4	27·63	44·78	162·07	38·16	19·9	− 8·2	28·1	Amorpher Niederschlag.

III. Bestimmung des Kälteeffektes der Mischungen im Bunsen'schen Eiskalorimeter.

Der kalorische Effekt der untersuchten Kältemischung hängt nicht nur von dem Mischungsverhältnisse zwischen kristallisiertem Natriumsulfat und Salzsäure und von der Konzentration der letzteren, sondern auch von der Anfangstemperatur der Bestandteile ab. Infolgedessen mußte man, um das günstigste Mischungsverhältnis und die günstigste Konzentration der Salzsäure zu finden, eine Reihe von Messungen bei einer konstanten Temperatur vornehmen. Weil aber diese wichtige Bedingung bei den kalorimetrischen Messungen nach der Mischungsmethode schwer zu erfüllen ist, so wurden die folgenden Messungen in Bunsen'schen Eiskalorimetern ausgeführt, und auf diese Weise konnte die Reaktionswärme genau bei 0° bestimmt werden.

Außerdem handelte es sich bei den folgenden Messungen um die Frage, ob und unter welchen experimentellen Bedingungen sich das Bunsen'sche Kalorimeter zur Messung der negativen Wärme (»Kälte«) eignet.[1] Denn, wie bekannt,

[1] Die zitierte Abhandlung von Neumayr, welche auch die Bestimmung des Kälteeffektes einer Kältemischung im Bunsen'schen Kalorimeter zum Thema hat, läßt in dieser Beziehung manche Unklarheiten übrig.

sind die direkten Messungen der negativen Wärme im Bunsenschen Kalorimeter infolge der Unterkühlungserscheinungen nicht genau möglich. Infolgedessen habe ich nach Pfaundler[1] bei den folgenden Versuchen die »Kältemenge« der Mischung durch die Einführung einer bekannten Wärmemenge kompensiert und den Überschuß der letzteren bestimmt, woraus sich die der Kältemischung entsprechende »Kältemenge« berechnen ließ. Als Erhitzungskörper wurde Quarz (SiO_2) gebraucht, dessen spezifische Wärme sicher festgestellt ist (0·19) und der von Salzsäure nicht angegriffen wird.

Was die verschiedenen Modifikationen des Bunsen'schen Eiskalorimeters anbetrifft, so wurde diejenige von Schuller und Wartha für den vorliegenden Zweck am geeignetsten gefunden.[2] Die gebrauchten Apparate waren auch im wesentlichen nach der Vorschrift von Schuller und Wartha hergestellt und mit Dreiwegehähnen nach Pfaundler versehen. Die Apparate wurden zuerst in Gefäße mit destilliertem Wasser und dann erst in Eis eingestellt. In das destillierte Wasser wurden außerdem Stücke von chemisch reinem Eise geworfen, um dadurch die Unterkühlungserscheinungen im Wasser zu verhindern. Zur Erzeugung der Eishülle im Innern des Apparates selbst wurden feste Kohlensäure und Alkohol verwendet. Dieselben wurden in das Innere des eprouvettenförmigen Gefäßes des Apparates hineingebracht, und zwar zuerst Alkohol, dann mehrere Male in kleinen Portionen Kohlensäure, worauf die Eishülle rasch und leicht entstand.

Eine wichtige Bedingung für das Gelingen der Messungen ist die Art der Einführung der Substanzen in das eprouvettenförmige Gefäß des Kalorimeters. Es muß nämlich dabei sorgfältig vermieden werden, daß ein Teil der Substanz an den Wänden des Gefäßes hängen bleibt; es muß sowohl das Salz wie die Säure ohne Verlust bis auf den Boden des Gefäßes

---

[1] Müller-Pfaundler's Lehrbuch der Physik, Bd. II, 2. Abt. (Wärmelehre), p. 312 und 449.

[2] In Bezug auf den Grad der Genauigkeit der Messungen im Bunsen'schen Eiskalorimeter mit Skalenrohr und demjenigen nach Schuller und Wartha schließe ich mich der Ansicht Longuinin's an, der die Messungen im Schuller-Wartha'schen Kalorimeter für genauer hält.

gelangen. Ferner muß vermieden werden, daß das Natriumsulfat in der Zeit, während welcher die Substanzen vor dem Versuch im Innern des Kalorimeters verbleiben, Wasser anzieht. Um diesen Hauptbedingungen zu entsprechen, wurden sowohl kristallisiertes Natriumsulfat wie Salzsäure in dünnwandige Glaskugeln eingeschmolzen, letztere an dünnen Zwirnfäden in das Innere des eprouvettenförmigen Gefäßes gebracht, dort mehrere Stunden gelassen, bis mit Sicherheit anzunehmen war, daß dieselben die Temperatur von 0° angenommen hatten, und schließlich vor dem Versuch mittels eines dünnen Glasstabes, welcher ebenfalls die ganze Zeit vor dem Versuch im Innern des Gefäßes sich befand, zerbrochen. Die Substanzen wurden innig gemischt und dann erst der auf den Siedepunkt des Wassers erhitzte[1] Quarz hineingeworfen. Um die Korrektion zu bestimmen, wurde in üblicher Weise das Quecksilber in der Vor- und in der Nachperiode gewogen.

Nach jedem Versuch wurden der hineingebrachte Quarz und die Reaktionsprodukte entfernt und das Innere des eprouvettenförmigen Gefäßes mit Wasser, Alkohol und Äther gewaschen und vollständig getrocknet. Der nächste Versuch konnte erst ausgeführt werden, nachdem das durch erwähnte Operationen gestörte Gleichgewicht im Innern des Kalorimeters wieder hergestellt war, d. h. nachdem die Zu-, beziehungsweise Abnahme des Quecksilbers möglichst gering und regelmäßig geworden war.

Bei den Berechnungen wurde die Kalorie 15° nach Dieterici[2] angenommen, d. h.

$$q_{15} = 0{\cdot}015460\, g \text{ Hg.}$$

Die Resultate sind in folgenden Tabellen zusammengestellt und es bedeuten:

p das Gewicht des Salzes;
g das Gewicht der Säure;
$p+g = m$ das Gewicht der Mischung;

---

[1] Im Pfaundler'schen Erhitzungsapparat.

[2] C. Dieterici, Ann. d. Physik, 1905, Nr. 4.

$\frac{100\,g}{p}$ $\frac{\text{Säure}}{\text{Salz}}$ in Prozenten;

$\frac{100\,p}{m}$ $\frac{\text{Salz}}{\text{Mischung}}$ in Prozenten;

WE Reaktionswärme (negative) pro 1 g des Salzes;

W_1E_1 Reaktionswärme (negative) pro 1 g der Mischung.

Tabelle IV.

Die Versuche mit 36·60 prozentiger[1] Salzsäure.

Nr.	p	g	$\frac{100\,g}{p}$	$\frac{100\,p}{m}$	WE	W_1E_1
1	11·0493	1·6921	15·31	86·72	22·422	19·44
2	9·1594	1·7599	19·21	83·88	25·68	21·52
3	5·7749	1·5445	26·74	78·90	34·77	27·43
4	5·5486	1·6950	30·55	76·60	35·60	27·28
5	5·8645	1·8240	31·10	76·28	36·82	27·43
6	5·3458	1·8120	33·90	74·68	41·30	30·85
7	5·9028	2·3475	39·77	71·55	43·45	31·08
8	6·3551	2·5915	40·78	71·03	43·91	31·19
9	7·1307	3·5082	49·20	67·02	46·26	31·01
10	4·1612	2·2698	54·55	64·71	45·66	29·55
11	6·7102	3·7949	56·55	63·88	45·23	28·89
12	4·5125	6·1407	136·08	42·37	31·04	13·15
13	7·2210	12·5148	173·31	36·59	30·48	11·15
14	5·1354	11·7991	229·76	30·33	30·23	9·17
15	3·2134	12·0552	375·15	21·05	28·92	6·09

Tabelle V.

Die Versuche mit 24·47 prozentiger Salzsäure.

Nr.	p	g	$\frac{100\,g}{p}$	$\frac{100\,p}{m}$	WE	W_1E_1
1	6·8246	1·8811	27·56	78·40	25·77	20·21
2	6·4970	2·5946	39·93	71·46	35·99	25·72
3	6·9174	3·3197	47·99	67·57	40·23	27·18
4	6·9719	4·2332	60·72	62·22	43·13	26·84
5	6·9296	12·5689	181·38	35·54	35·66	12·67

[1] Mittel aus drei Bestimmungen: 36·47, 36·65 und 36·68%.

Man ersieht aus den Tabellen, daß die 36·60prozentige Salzsäure vorteilhafter ist als die 24·47prozentige, indem die Mischungen mit der ersteren Säure pro 1 *g* der Mischung mehr »Kälte« als diejenigen

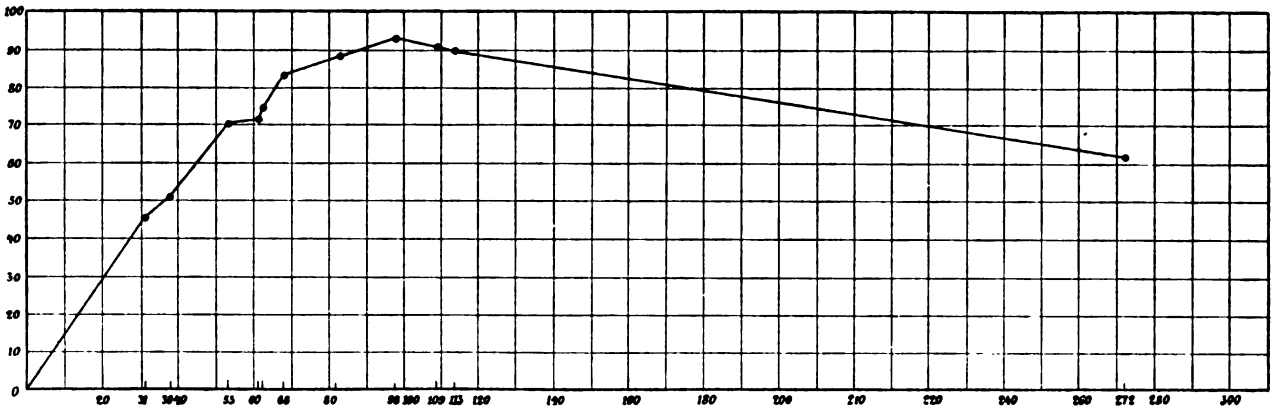


Fig. 1. Maßstab: 1 *mm* = 1% Salzsäure, respektive 1 *WE* (1 Grammkalorie).

mit der letzteren liefern. Infolgedessen wurden im folgenden nur die Mischungen mit der konzentrierteren 36·60prozentigen Salzsäure untersucht.

Den größten Kälteeffekt pro 1 *g* der Mischung liefern bei 36·60prozentiger Salzsäure die Mischungen, bei welchen $\frac{\text{Salzsäure}}{\text{kristallisiertes Natriumsulfat}} = 0{\cdot}4$ bis $0{\cdot}5$ ist.

Die Resultate der Versuche mit 36·60prozentiger Salzsäure sind in der Fig. 1 graphisch dargestellt, wobei auf der Abszissenachse die Prozente Säure auf 1 g Salz $\left(\frac{100\,g}{p}\right)$ aufgetragen sind und die Ordinaten die entsprechenden Werte für Kälteeffekte pro 1 g Salz darstellen *(WE)*.

IV. Bestimmung des Kälteeffektes und der spezifischen Wärme der Mischungen oberhalb von 0°.

Nachdem durch die vorhergegangenen Versuche der Kälteeffekt der Mischungen und das günstigste Mischungsverhältnis bei 0° bestimmt worden waren, war es weiter notwendig, dasselbe auch bei anderen Temperaturen zu bestimmen, um dadurch die Abhängigkeit der Reaktionswärme von der Temperatur und die günstigste Anfangstemperatur der Ausgangsmaterialien finden zu können. Dabei wurde auch die spezifische Wärme der Lösungen, welche die Mischungen mit Wasser lieferten, bestimmt. Die angewandte Methode läuft im wesentlichen auf die Messung der Lösungswärme hinaus, und zwar wurde einerseits diejenige des kristallisierten Natriumsulfats + Salzsäure bestimmt, wobei dieselben, ohne miteinander in Berührung zu kommen, gelöst wurden, andrerseits wurde diejenige der Reaktionsprodukte gemessen, nachdem die Mischung wieder die Anfangstemperatur der Materialien, und zwar in beiden Fällen dieselbe Temperatur, erlangt hatte.

Die theoretische Grundlage für die angewandte Methode bildet das bekannte Gesetz von Hess: »Die Energiedifferenz zwischen zwei Zuständen eines chemischen Systems ist unabhängig von dem Wege, auf welchem es aus dem einen Zustand in den anderen gelangt ist.«

In der untersuchten Kältemischung hat man in beiden Fällen als Endzustand die Lösung der Ausgangssubstanzen in Wasser.[1] Im ersten Falle, wenn kristallisiertes Natrium-

[1] Allerdings sind dabei die Dissoziationsverhältnisse in beiden Lösungen verschieden, da im ersten Falle kristallisiertes Natriumsulfat und konzentrierte Salzsäure unmittelbar in Wasser gelöst werden, im zweiten Falle aber die aus den letzteren entstandenen Reaktionsprodukte. Diese Verschiedenheit in

sulfat+konzentrierte Salzsäure gelöst werden, ohne miteinander in Berührung zu kommen, geht das System kristallisiertes Natriumsulfat+konzentrierte Salzsäure in dasjenige der wässerigen Lösung unmittelbar über und die dabei auftretende Lösungswärme stellt die gesamte meßbare Quantität der Energiedifferenz dar.

Im zweiten Falle, d. h. wenn die Reaktionsprodukte der Kältemischung gelöst werden, setzt sich die gesamte Energiedifferenz aus der Energie der Kältemischung und der Lösungswärme der Reaktionsprodukte zusammen. In beiden Fällen muß der Wert für die gesamte Energiedifferenz der gleiche sein. Bezeichnet man mit A die Lösungswärme im ersten Falle (für Säure und Salz getrennt), mit B diejenige im zweiten Falle und mit x die Energie der Kältemischung (alle Werte einheitlich, also z. B. pro 1 g des Salzes berechnet), so ist $A = x + B$.

In diesem Ausdruck ist A bei den in Betracht kommenden Mischungsverhältnissen negativ. Dagegen ist B negativ nur bis zum Verhältnisse $\frac{\text{Säure}}{\text{Salz}} = 0 \cdot 25$ (annähernd) für eine $36 \cdot 56$-prozentige Salzsäure. Bei mehr Säure wird B positiv, d. h. die Reaktionsprodukte in ihrer Summe haben eine positive Lösungswärme. Das bedeutet, daß der Vorgang in der Kältemischung in Bezug auf den Wärmeverbrauch weiter geht als derjenige beim Lösen des kristallisierten Natriumsulfats und der Salzsäure (getrennt) im ersten Falle und infolgedessen muß, um zu demselben Zustande zu gelangen wie im ersten Falle, im zweiten Falle Wärme entwickelt werden.

Daher stellt der Ausdruck $A = x \pm B$ eine algebraische Summe dar, wobei das Vorzeichen bei B sich ändert, je nachdem beim Lösen der Reaktionsprodukte ein Aufstieg oder ein Abstieg des Thermometers beobachtet wurde. Der Kälteeffekt der Mischung ist $x = A \pm B$, und zwar addiert man B zu A in

---

den Dissoziationsverhältnissen mußte aber, wenn eine solche bei derartigen Messungen überhaupt berücksichtigt werden soll, ihren Ausdruck in der Änderung des Wertes der spezifischen Wärme der betreffenden Lösungen finden und, da die spezifische Wärme jedesmal bestimmt wurde, so wurde damit der eventuelle Einfluß der Dissoziationsverschiedenheiten auch mitberücksichtigt.

allen denjenigen Fällen, wo die Reaktionsprodukte eine positive Lösungswärme haben, und zieht von A ab, wenn letztere negativ ist.

Die Versuche wurden in folgender Weise ausgeführt:

1. Salz und Säure, jedes für sich in einer dünnwandigen Glaskugel eingeschmolzen und genau gewogen, wurden in ein mit Wasser gefülltes Platinkalorimeter gebracht und in diesem eine längere Zeit (1 bis 2 Stunden) samt Thermometer und Rührer bei einer möglichst konstanten Temperatur stehen gelassen. Um die Lösungswärme zu bestimmen, wurden die Kugeln zerbrochen, deren Inhalt in Wasser vollständig gelöst und die Temperaturerniedrigung notiert. Außerdem wurde die Vor- und Nachperiode beobachtet und die Korrektion für die Hauptperiode nach Regnault-Pfaundler berechnet.

Der Lösungsvorgang dauerte höchstens 2 Minuten. Nach Beendigung des Lösungsversuches wurde die spezifische Wärme der entstandenen Lösung in üblicher Weise[1] mittels Quarz (SiO_2) bestimmt.

Aus den erhaltenen Zahlen wurde die Lösungswärme des Systems kristallisiertes Natriumsulfat+konzentrierte Salzsäure (getrennt) berechnet, und zwar pro 1 g des Salzes und pro 1 g der Mischung.

2. Salz und Säure wurden in demselben Verhältnisse wie bei 1. in ein und derselben Glaskugel zusammengemischt und abgewogen.[2] Die zugeschmolzene Kugel wurde in das Kalorimeter gebracht und die Lösungswärme wie bei 1. bestimmt. Auch die spezifische Wärme wurde in derselben Weise und mit derselben Probe von Quarz bestimmt.

Die beiden Lösungsversuche (1 und 2) wurden womöglich bei derselben Anfangstemperatur begonnen.

Das gebrauchte Thermometer wurde in 0·02° eingeteilt und gestattete, Temperaturen bis auf 0·01° genau abzulesen und die Tausendstel noch abzuschätzen.

Das Verhältnis zwischen Salzsäure und kristallisiertem Natriumsulfat sollte sowohl bei 1. wie bei 2. dasselbe sein.

[1] Tollinger, p. 4 bis 5 in früher zitierter Abhandlung.

[2] Die Glaskugel wurde zugeschmolzen und das Ganze abgewogen, nachdem die Reaktionsmasse annähernd die Anfangstemperatur erreicht hatte.

Diese wichtige Bedingung konnte allerdings experimentell nicht genauer als auf einige Zehntelprozente erreicht werden.

Bei folgenden Versuchen wurde nur konzentrierte 36·56-prozentige Salzsäure gebraucht, da durch die vorangegangenen Messungen im Bunsen'schen Eiskalorimeter bereits gezeigt worden war, daß, je konzentrierter die Säure, desto größer der Kälteeffekt pro Gewichtseinheit der Mischung war.

Die Resultate der Versuche sind in den beiden folgenden Tabellen zusammengestellt.

Tabelle VI enthält erstens die Daten der Bestimmungen der Lösungswärme von kristallisiertem Natriumsulfat+Salzsäure getrennt und zweitens diejenige der Reaktionsprodukte, wobei die Paare von Versuchen, bei welchen die Bestandteile in nahezu denselben Verhältnissen genommen wurden, mit 1 und $1a$, 2 und $2a$ u. s. w. bezeichnet sind, und zwar $1a$, $2a$, $3a$ u. s. w. die Versuche mit Reaktionsprodukten bedeuten. Weiter wurde bezeichnet mit

g das Gewicht der Säure;
p das Gewicht des Salzes;
$g+p=m$ das Gewicht der Mischung;
$\frac{100\,g}{p}$ $\frac{\text{Säure}}{\text{Salz}}$ in Prozenten;
$\frac{100\,p}{m}$ $\frac{\text{Salz}}{\text{Mischung}}$ in Prozenten;
M der Wasserwert des Ganzen;
$t°$ die Anfangstemperatur;
Δt die Temperaturänderung infolge des Lösungsvorganges (Aufstieg oder Abstieg des Thermometers);
LWE Lösungswärme pro 1 g des Salzes;
$L_1W_1E_1$ Lösungswärme pro 1 g der Mischung.

Die Versuche zerfallen in zwei Gruppen, von denen die erste diejenigen bei einer Anfangstemperatur von zirka 15° und die zweite diejenigen bei zirka 6° umfaßt. Außerdem wurde ein Versuch bei zirka 10·5° ausgeführt.

Die Tabelle VII enthält die auf Grund der Werte der Tabelle VI berechneten Kälteeffekte der Mischungen, wobei für

Tabelle VI.

Lösungswärme.

Nr.	p	g	$\frac{100\,g}{p}$	$\frac{100\,p}{m}$	M	$t°$	$\Delta t°$	LWE	$L_1W_1E_1$	Gruppe
1	30·4017	4·6670	15·35	86·89	524·80	14·98°	—3·320°	—57·31	—49·70	
1 *a*	41·1476	6·3795	15·50	86·58	543·43	15·24	—1·230	—16·25	—14·06	
2	38·2132	9·7876	25·62	79·61	540·52	15·68	—3·910	—55·01	—44·30	
2 *a*	36·7990	9·5001	25·81	79·48	536·85	15·48	+0·090	+ 1·31	+ 1·04	
3	17·7758	4·6180	25·98	79·38	515·81	15·26	—1·920	—55·71	—44·22	
3 *a*	17·2601	4·5289	26·24	79·21	518·66	14·95	+0·050	+ 1·51	+ 1·19	
4	14·8257	5·0168	33·84	74·72	513·25	15·58	—1·540	—53·31	—39·83	
4 *a*	15·0975	5·1527	34·13	74·56	515·55	15·07	+0·090	+ 3·07	+ 2·29	I
5	19·9676	10·5316	52·74	65·47	520·95	15·61	—1·857	—48·45	—31·72	
5 *a*	20·7509	10·9951	52·99	65·37	528·40	15·38	+0·140	+ 3·56	+ 2·33	

6	14·5736	8·7082	59·75	62·59	463·61	15·61	—1·410	—44·85	—28·08	
6 *a*	35·2192	20·9077	59·36	62·75	534·07	15·62	+0·250	+ 3·79	+ 2·38	
7	16·2736	14·4154	88·58	53·03	514·42	15·01	—1·143	—36·13	—19·16	
7 *a*	26·0174	23·1006	88·82	52·97	529·56	15·05	+0·335	+ 6·82	+ 3·61	
8	7·1181	11·7479	165·06	37·73	504·53	15·32	—0·150	—10·63	— 4·01	
8 *a*	7·9774	13·3199	166·97	37·46	511·07	15·08	+0·374	+23·96	+ 8·97	
1	25·1347	8·6014	34·22	74·50	536·16	10·46	—2·410	—51·41	—38·30	
1 *a*	32·6025	11·2387	34·47	74·37	542·88	10·80	+0·220	+ 3·66	+ 2·72	
1	15·0324	3·8508	25·62	79·61	462·57	5·75	—1·783	—54·88	—43·69	
1 *a*	18·4329	4·7381	25·70	79·57	474·45	6·28	—0·120	— 3·79	— 2·46	
2	14·6481	4·9431	33·75	74·77	462·87	6·15	—1·660	—52·45	—39·22	II
2 *a*	12·1773	4·1812	34·34	74·44	419·61	6·41	+0·050	+ 1·72	+ 1·32	
3	15·9391	7·9832	50·09	66·63	473·44	6·14	—1·670	—49·60	—33·05	
3 *a*	14·9128	7·6011	50·97	66·24	418·10	6·76	+0·050	+ 1·40	+ 0·93	

Tabelle VII.

Reaktionswärme.

Nr.	$\frac{100\,g}{p}$	$\frac{100\,p}{m}$	RW	R_1W_1	Mittlere Anfangstemperatur	Gruppe
1	15·42	86·63	41·06	35·64	15·11°	
Maximum 2	**25·85**	**79·54**	**56·32**	**45·34**	15·58	
Maximum 3	**26·11**	**79·30**	**57·22**	**45·41**	15·10	
4	33·98	74·64	56·38	42·12	15·32	I
5	52·86	65·42	52·01	34·05	15·50	
6	59·56	62·67	48·64	30·46	15·62	
7	88·70	53·00	42·95	22·77	15·03	
8	166·01	37·60	34·59	12·98	15·20	
1	34·30	74·43	55·07	41·01	10·63	
1	25·66	79·59	51·05	41·23	6·01	
2	34·04	74·60	54·18	40·29	6·28	II
3	50·53	66·43	51·00	33·98	6·45	

die Verhältnisse $\frac{\text{Säure}}{\text{Salz}}$ und $\frac{\text{Salz}}{\text{Mischung}}$ die Mittel aus 1 und 1a, 2 und 2a u. s. w. genommen wurden.

Es bedeuten:

$\frac{100\,g}{p}$ $\frac{\text{Säure}}{\text{Salz}}$ in Prozenten;

$\frac{100\,p}{m}$ $\frac{\text{Salz}}{\text{Mischung}}$ in Prozenten;

RW Kälteeffekt pro 1 g des Salzes;

R_1W_1 Kälteeffekt pro 1 g der Mischung.

In der sechsten Kolumne befinden sich die Mittelwerte für die Anfangstemperatur aus 1 und 1a, 2 und 2a u. s. w. Die Werte für die Lösungs- und Reaktionswärme (»Kälteeffekte«) sind, wie üblich, in Grammkalorien angegeben.

Wie man aus der Tabelle ersieht, liefern die größte Kältemenge die Mischungen 2 und 3 in der ersten Gruppe, bei

welchen das Verhältnis $\frac{\text{Säure}}{\text{Salz}} = 0{\cdot}258—0{\cdot}261$ ist und die Anfangstemperatur zirka 15° beträgt. Der Kälteeffekt wächst im allgemeinen mit der Steigerung der Temperatur der Ausgangssubstanzen.

Die Resultate der Tabelle VII sind in der Fig. 2 graphisch dargestellt, wobei wieder, wie bei 1, auf der Abszissenachse die Prozente Salzsäure auf 1 *g* kristallisiertes Natriumsulfat, die Werte für $\frac{100\,g}{p}$, aufgetragen sind und die Ordinaten die entsprechenden Kälteeffekte pro 1 *g* Salz darstellen.

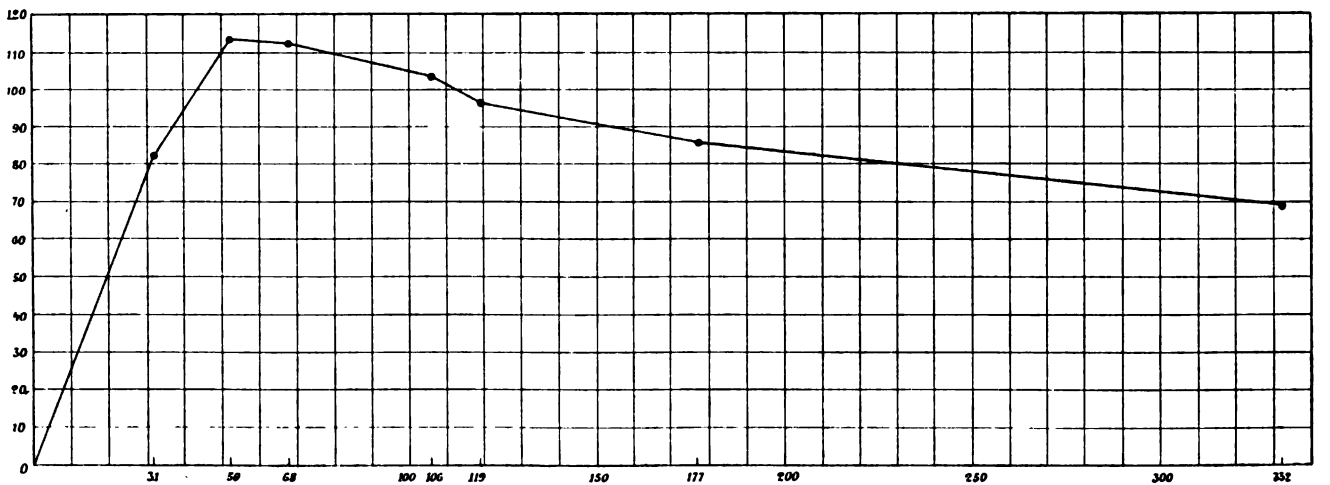


Fig. 2.

Die spezifische Wärme der Mischungen.

Die spezifische Wärme der Lösungen, welche die Kältemischungen mit Wasser lieferten, wurde bei der Berechnung der Lösungswärme berücksichtigt. Die diesbezüglichen Werte werden aber an dieser Stelle nicht angeführt, weil dieselben für die Definition der Kältemischung ohne Belang sind. Dagegen ist die Kenntnis der spezifischen Wärme der Kältemischungen selbst wichtig, da dieselbe unter anderem unerläßlich ist für die Berechnung der Abkühlungswerte der Mischungen.

Die spezifische Wärme der Mischungen läßt sich aus den Daten, die bei der Bestimmung der spezifischen Wärme der Lösungen erhalten wurden, berechnen, wenn man annimmt, daß die Wasserwerte der Lösungen gleich sind der Summe der Wasserwerte der Bestandteile.

Diese Annahme ist aber bekanntlich nicht einwandfrei, da für die Lösungen von Salzen und Säuren in Wasser (und die Reaktionsprodukte bestehen eben aus Salzen und Säuren) kein durchgreifendes Gesetz in Bezug auf die spezifische Wärme gefunden werden konnte. Da aber andrerseits die direkte Bestimmung der spezifischen Wärme der Mischungen nicht unerhebliche experimentelle Schwierigkeiten bietet, so teile ich im folgenden die auf diesem Wege gewonnenen Resultate mit.

Die Werte sind direkt aus den Beobachtungsdaten auf Grund der Formel $x = \frac{\Theta - (M+W)(t_1^\circ - t^\circ)}{(t_1^\circ - t^\circ)\,m}$ berechnet, wobei

Θ ist die durch das Einwerfen des erhitzten Quarzes eingeführte Wärmemenge;
M der Wasserwert des Wassers (spezifische Wärme des Wassers $= 1$),
W der Wasserwert des Apparates (Kalorimeter, Rührer etc.);
$t_1^\circ - t^\circ = \Delta t^\circ$ die Temperaturerhöhung nach Anbringung von sämtlichen Korrektionen;
m das Gewicht der Kältemischung;
x die gesuchte spezifische Wärme der Mischung.

Die erhaltenen Werte sind in folgender Tabelle zusammengestellt, und es bedeuten:

$\frac{100\,p}{m}$ $\frac{\text{Salz}}{\text{Mischung}}$ in Prozenten;

s die spezifische Wärme der Mischung.

Die Versuche, bei welchen konzentrierte Salzsäure und kristallisiertes Natriumsulfat in ähnlichen Verhältnissen genommen wurden, sind wieder mit 1 und 1 *a* u. s. w. bezeichnet, außerdem sind in der vorletzten Kolumne die Mittelwerte für die spezifische Wärme aus je zwei Versuchen 1 und 1 *a* u. s. w. angegeben. Die Mittelwerte sind nur mit zwei Dezimalen angegeben, da schon die zweite Dezimale unsicher ist, indem ein Ablesungs- oder Korrektionsfehler von 0·01° die zweite Dezimale vollständig verändert. Gruppen bedeuten dasselbe wie früher, d. h. die Gruppen der Versuche bei je zirka 15° und zirka 6° Anfangstemperatur.

Tabelle VIII.

Spezifische Wärme.

Nr.	$\frac{100\,p}{m}$	s	Mittelwerte für s	Gruppe	Nr.	$\frac{100\,p}{m}$	s	Mittelwerte für s	Gruppe
1	86·69	0·741	0·74		8	37·73	0·422	0·42	I
1 *a*	86·58	0·744			8 *a*	37·46	0·422		
2	79·61	0·850	0·85						
2 *a*	79·48	0·846			1	74·50	0·752	0·76	bei 10·6°
3	79·48	0·851	0·85		1 *a*	74·37	0·764		
3 *a*	79·38	0·847							
4	74·72	0·769	0·77	I	1	79·61	0·819	0·81	
4 *a*	74·56	0·768			1 *a*	79·57	0·795		
5	65·47	0·643	0·64		2	74·77	0·761	0·76	II
5 *a*	65·37	0·638			2 *a*	74·44	0·753		
6	62·59	0·619	0·62		3	66·63	0·637	0·64	
6 *a*	62·75	0·614			3 *a*	66·24	0·641		
7	53·03	0·562	0·55						
7 *a*	52·97	0·546							

Die Temperaturerniedrigungen und die niedrigste erreichbare Temperatur.

Unter Benützung der Werte für die Reaktionswärme der Mischungen und derjenigen für die spezifische Wärme lassen sich die theoretisch möglichen Temperaturerniedrigungen berechnen. Die Werte für die Temperaturerniedrigungen sind im vorliegenden Falle die Quotienten aus der Reaktionswärme und der entsprechenden spezifischen Wärme, also $\frac{R_1 W_1}{s}$, wobei $R_1 W_1$ die Reaktionswärme pro 1 g der Mischung und s deren spezifische Wärme ist.

Die folgende Tabelle enthält diese Werte für die Anfangstemperatur von 15°. Zum Vergleich mit den theoretischen sind auch die direkt[1] beobachteten Temperaturerniedrigungen angeführt. Die Bezeichnungen sind dieselben wie in früheren Tabellen, wobei $\Delta t = \frac{R_1 W_1}{s}$ ist.

Tabelle IX.

Nr.	$\frac{100\,p}{m}$	$R_1 W_1$	s	$\Delta t°$	Direkt beobachtet	Differenz
1	86·6	35·64	0·74	48·2°	35·7°	12·5°
2	79·5	45·34	0·85	53·3	39·8	13·6
3	79·3	45·41	0·85	53·4		
4	74·6	42·12	0·77	54·7	36·3	18·4
5	65·4	34·05	0·64	53·2	36·6	16·6
6	62·7	30·46	0·62	49·1	36·9	12·2
7	53·0	22·77	0·55	41·4	33·8	7·6
8	37·6	12·98	0·42	30·9	29·3	1·6

Die Tabelle zeigt, daß zwischen den theoretischen und den beobachteten Werten für die Temperaturerniedrigung sich

[1] Dieselben sind der Tabelle I im Abschnitte »Direkte Beobachtungen der Temperaturerniedrigungen« entnommen.

große Differenzen ergeben. Diese können kaum durch die »Kälteverluste« während der Ausführung der Versuche erklärt werden, sondern müssen vielmehr eine andere Ursache haben. In der Tat hat man bei anderen Kältemischungen gefunden, daß die theoretisch mögliche Temperaturerniedrigung und das damit zusammenhängende Temperaturminimum in Wirklichkeit durch die jeweilige Gefrier-, beziehungsweise Sättigungstemperatur der betreffenden Lösung beschränkt wird, da bei dieser Temperatur der Lösungsprozeß, welcher die eigentliche Quelle der Kälteerzeugung ist, seine Grenze erreicht und infolgedessen auch die Kälteerzeugung aufhören muß, beziehungsweise der noch vorhandene Überschuß an Kälte zur Erzeugung von Eis oder zur Abscheidung von Salz verbraucht wird.

Die Bestimmung der Sättigungs-, beziehungsweise Gefriertemperatur wurde auch bei der untersuchten Kältemischung durchzuführen versucht, es hat sich dabei aber Folgendes ergeben.

1. Die Reaktionsgemische, in denen den Analysen zufolge Schwefelsäure vorhanden war, zeigten keine konstanten Gefrierpunkte, obwohl bei manchen Versuchen fast bis auf —70° in einem Kohlensäure-Alkoholbade abgekühlt wurde.

2. In zwei Fällen, wo die Ausgangsmaterialien im Verhältnisse $\frac{\text{Salzsäure}}{\text{kristallisiertes Natriumsulfat}} = 0{\cdot}22—0{\cdot}26$ genommen wurden, konnte ein gewisser Stillstand des Thermometers bei —20° bis —22° beobachtet werden, jedoch waren die Beobachtungsresultate nicht genügend sicher. Wie aus den Analysen zu ersehen ist, bestehen die Reaktionsgemische bei diesen Verhältnissen zwischen Salzsäure und kristallisiertem Natriumsulfat nur aus verdünnter Salzsäure und aus dem vollständig oder zum größten Teile entwässerten Natriumsulfat, enthalten dagegen keine Schwefelsäure und kein Natriumchlorid.

3. Die Lösungen, aus welchen die Gemische teilweise bestehen, sind schon oberhalb von 0°, daher weit oberhalb (z. B. bei 2° in einem Falle) der beobachteten niedrigsten Temperatur gesättigt und trotzdem sinkt die Temperatur bis —15 bis —19°. Dieser scheinbare Widerspruch erklärt sich

aber, wenn man annimmt, daß die Quelle der Kälteerzeugung im vorliegenden Falle nicht der einfache Lösungsprozeß, sondern die Verflüssigung des Kristallwassers des kristallisierten Natriumsulfats ist, wobei sich das kristallwasserfreie Salz, bis auf den geringen Teil, der in Lösung geht, sofort abscheidet. Das Natriumchlorid wird den Analysen gemäß ebenfalls nicht gelöst. Die durch Verflüssigung des Kristallwassers entstandene Kältemenge erniedrigt inzwischen die Temperatur der Mischung weiter, bis der Gefrierpunkt und somit auch das Temperaturminimum erreicht werden.

Nachdem das Reaktionsgemisch wieder die Anfangstemperatur der Ausgangssubstanzen erreicht hat, lösen sich Natriumsulfat und in Spuren auch Natriumchlorid teilweise in der vorhandenen Flüssigkeit wieder auf. Und aus diesem Grunde führt die Bestimmung des Sättigungspunktes einer solchen Lösung zu unbrauchbaren Resultaten.

Und somit bleibt im vorliegenden Falle für die Bestimmung der niedrigsten erreichbaren Temperatur nur die direkte Beobachtung derselben übrig, die wegen der dabei unvermeidlichen Kälteverluste nur wenig genau sein kann.

Der Abkühlungswert der Kältemischung.

Unter dem Abkühlungswerte einer Kältemischung versteht man diejenige Kältemenge, die zur Abkühlung eines fremden Körpers übrig bleibt, nachdem die Kältemischung jene Temperatur, auf welche abgekühlt werden soll, bereits erreicht hat.

Auf Grund der experimentell gewonnenen Daten lassen sich die Abkühlungswerte für verschiedene Mischungsverhältnisse mit der Formel $R_1 W_1 — s.\Delta t°$ berechnen, wobei $R_1 W_1$ wie früher die Reaktionswärme pro 1 g der Mischung, s die spezifische Wärme bei dem betreffenden Mischungsverhältnisse und $\Delta t°$ das Temperaturintervall von der Anfangs- bis zur Abkühlungstemperatur bedeuten.

Die Abkühlungswerte sind für sechs Mischungsverhältnisse berechnet, wobei die Anfangstemperatur 15° geträgt und die Abkühlungstemperaturen 0, —5, —10 und —15° sind. Sonst bedeuten die Bezeichnungen dasselbe wie in früheren Tabellen.

Tabelle X.

Nr.	$\frac{100p}{m}$	Abkühlungswert für			
		0°	—5°	—10°	—15°
1	86·63	24·5	20·8	17·1	13·4
2	79·54	32·6	28·4	24·2	19·9
3	79·30	32·7	28·4	24·2	20·0
4	74·64	30·6	26·8	22·9	19·1
5	65·42	24·4	21·2	18·0	14·8
6	62·67	21·2	18·1	15·1	12·0

Wie man aus der Tabelle ersieht, besitzt den größten Abkühlungswert gerade dasjenige Mischungsverhältnis, welches auch den größten Kälteeffekt liefert, nämlich das Verhältnis $\frac{100p}{m} = 79{\cdot}30\%$ oder $\frac{100g}{p} = 26{\cdot}11$.

V. Analysen der Reaktionsprodukte.

Um den physikalisch-chemischen Vorgang in der Kältemischung erklären zu können, wurden die nach beendigter Reaktion entstehenden Gemische analysiert.

Eine auffallende Erscheinung im vorliegenden Falle ist die Entstehung eines weißen, meist amorphen Niederschlages nach beendigter Reaktion, der nach den bisherigen Angaben hauptsächlich aus Natriumchlorid bestehen sollte. Die Bildung des Natriumchlorids bei der Reaktion wurde überhaupt von allen, die diese Kältemischung erwähnen, angenommen. Wenn man beachtet, daß die genaue Bestimmung des Natriumchlorids und die Abhängigkeit der Menge desselben von dem Verhältnisse zwischen kristallisiertem Natriumsulfat und konzentrierter Salzsäure (Ausgangssubstanzen) ein Mittel gibt zur Berechnung der übrigen Reaktionsprodukte, so ist es klar, daß der Zweck der folgenden Analysen eben die Bestimmung des Natriumchlorids war und auch sein mußte, indem die direkte

Bestimmung der übrigen Reaktionsprodukte im vorliegenden Falle so gut wie unmöglich war.

Die Analysen der Reaktionsgemische wurden in folgender Weise ausgeführt.

Kristallisiertes Natriumsulfat in Form des feinen Kristallmehls wurde in einem Wägegläschen abgewogen und mit konzentrierter Salzsäure versetzt. Nachdem die Reaktion beendigt war und die Mischung wieder die Anfangstemperatur der Ausgangssubstanzen erlangt hatte, und zwar bei einer Reihe der Versuche möglichst dieselbe Temperatur, wurde wieder gewogen. Die Differenz der beiden Wägungen ergab dann das Gewicht der Salzsäure. Darauf wurde das Gemisch durch einen in üblicher Weise hergestellten und auf Gewichtskonstanz geprüften Goochtiegel quantitativ filtriert, möglichst vollständig abgesaugt und mit einer gemessenen Menge 99prozentigen Äthylalkohols nachgewaschen.

Da nach dem Schema:

$$Na_2SO_4 . 10H_2O + 2HCl = 2NaCl + HS_2O_4 + 10H_2O$$

in dem Reaktionsgemisch Natriumchlorid, Schwefelsäure und eventuell unverändertes Natriumsulfat und überschüssige Salzsäure sein konnten und da aus dem festen Rückstande die letzten Reste von Salz- und Schwefelsäure entfernt sein sollten, so mußte der Waschalkohol auf Salz- und Schwefelsäure geprüft werden. Die Prüfung konnte sich aber nur auf Schwefelsäure erstrecken, weil das Natriumchlorid in Alkohol löslich ist und daher beim Auswaschen mit in Lösung geht, während Natriumsulfat in Alkohol unlöslich ist. Das Auswaschen wurde deshalb nur so lange fortgesetzt, bis eine Probe des Waschalkohols nach dem Verdünnen mit Wasser keine Schwefelsäurereaktion mehr zeigte, was in der Regel schon nach einigen Füllungen des Goochtiegels mit Alkohol der Fall war. Schließlich wurde der Tiegel samt dem Inhalte getrocknet und bis zur Gewichtskonstanz schwach geglüht.

Die Menge der getrockneten Substanz stellte nicht genau diejenige des festen Rückstandes im Reaktionsgemische dar, sondern war etwas größer, weil beim Nachwaschen aus den im Wägegläschen und im Tiegel vorhandenen Resten der

Lösung durch den Alkohol das gelöste Salz mitgefällt wurde. Für die Bestimmung der Gesamtmenge des sich bei der Reaktion bildenden Natriumchlorids ist aber dieser Umstand ohne Belang. Dagegen mußte bestimmt werden, wieviel Natriumchlorid der abgesaugte Rückstand enthält, weil die Vorversuche gezeigt hatten, daß derselbe nicht nur aus Natriumchlorid besteht, sondern auch Natriumsulfat enthält. Zu dem Zwecke wurde der Goochtiegelinhalt mittels Durchsaugens von Wasser quantitativ gelöst und in der Lösung die Chlorbestimmung ausgeführt. Bei der Berechnung des Wertes des sich in der Kältemischung bildenden Natriumchlorids mußte außerdem berücksichtigt werden, daß ein geringerer Teil desselben beim Nachwaschen des Absaugrückstandes mit Alkohol in Lösung geht, und infolgedessen mußte die entsprechende Korrektion angebracht werden. Zur Kontrolle, ob der ganze Inhalt des Goochtiegels gelöst worden war, wurde der leere Tiegel getrocknet und wieder gewogen.

Weiter mußte untersucht werden, ob nicht ein Teil des Natriumchlorids in dem Filtrate des Goochtiegelrückstandes sich befindet. Zu dem Zwecke wurde die Lösung zuerst mit Alkohol und dann noch mit Äther versetzt, und zwar so lange, als noch eine merkliche Abscheidung stattfand, dann das Ganze durch einen Goochtiegel abgesaugt, mit wenig Alkohol nachgewaschen und getrocknet, schließlich bis zur Gewichtskonstanz schwach geglüht. Der Goochtiegelinhalt wurde dann mittels durchgesaugten Wassers gelöst und auf Chlor geprüft. Dabei zeigte sich, daß, ausgenommen den Versuch II, bei welchem eine sehr schwache Fällung beobachtet wurde (gefunden 0·07% des theoretischen Wertes[1]), beim Versetzen der Lösung mit Silbernitrat entweder keine oder nur eine äußerst schwache Opaleszenz entstand, was darauf hinweist, daß in der abgeschiedenen Substanz kein Natriumchlorid vorhanden war, denn dieses hätte doch wenigstens zum Teil mitabgeschieden werden müssen, wenn es in der Lösung vorhanden war. Die abgeschiedene Substanz wurde als reines, wasserfreies Natriumsulfat

[1] Unter dem »theoretischen Werte« versteht sich, wie weiter unten auseinandergesetzt ist, derjenige Wert für das NaCl, welcher erhalten werden sollte, wenn das ganze Natriumsulfat in Chlorid verwandelt wäre.

erkannt. Die Fällung des letzteren war allerdings nicht quantitativ, da sich beim Umrechnen der Werte des erhaltenen wasserfreien Natriumsulfats und des Natriumchlorids auf das angewandte kristallisierte Natriumsulfat zeigte, daß die Werte des gefundenen Salzes um 0·54 bis 2·63% niedriger waren als diejenigen des angewandten. Da es sich aber bei den beschriebenen Versuchen um die Bestimmung des Natriumchlorids und nicht um diejenige des Sulfats handelte, so ist jene Abweichung ohne Belang.

Aus der Menge des gefundenen Natriumchlorids lassen sich die übrigen Bestandteile des Reaktionsgemisches, und zwar die Schwefelsäure, die nicht in die Reaktion eingetretene Salzsäure und schließlich das wasserfreie Natriumsulfat berechnen. Eine solche Berechnung ist leicht an der Hand der weiter unten mitgeteilten Werte auszuführen. Dieselbe wurde aber unterlassen, weil sie für den speziellen Zweck der vorliegenden Untersuchung, nämlich die Auffindung desjenigen Mischungsverhältnisses zwischen Salzsäure und kristallisiertem Natriumsulfat, bei welchem die meiste Wärme absorbiert wird, ohne Belang ist, und infolgedessen wurden die bei den Analysen gewonnenen Resultate in einer anderen, weiter unten beschriebenen Weise verwendet.

Bei der Bestimmung des Natriumchlorids wurde gefunden, daß es Mischungsverhältnisse gibt, bei welchen dasselbe nur in Spuren nachzuweisen war (weniger als 0·10% des theoretischen Wertes). Diese geringen Mengen können wohl den Versuchsfehlern zugeschrieben werden, woraus folgt, daß es Mischungsverhältnisse gibt,[1] bei welchen kein Natriumchlorid sich bildet und der in der Mischung vorhandene Niederschlag nur aus Natriumsulfat besteht. Wie aus der Tabelle zu ersehen ist, ist dies der Fall bei den Versuchen 1 und 1*a*, bei welchen $\frac{\text{Säure}}{\text{Salz}} = 0{\cdot}15$, beziehungsweise 0·14 war. Außerdem wurde

[1] Sehr kleine Mengen Natriumchlorids müssen sich allerdings schon im ersten Momente bei dem Zusammentreffen der Salzsäure mit dem kristallisierten Natriumsulfat bilden. Die Salzsäure soll übrigens tropfenweise und unter beständigem Umrühren zugesetzt werden, damit nicht an irgend einer Stelle viel Säure mit wenig Salz in Berührung kommt.

beobachtet, daß bei diesen Verhältnissen zwischen den Ausgangssubstanzen der Niederschlag im Reaktionsgemische aus amorpher und aus kristallinischer Substanz bestand, woraus zu schließen ist, daß dabei wahrscheinlich nicht die ganze Masse des kristallisierten Natriumsulfats in das kristallwasserfreie Salz verwandelt wurde. Bei den Versuchen 2 und $2a$ $\left(\frac{\text{Säure}}{\text{Salz}} = 0{\cdot}28\right)$ wurde nur wenig Natriumchlorid gefunden, bei den Versuchen 3 bis 5 schon viel mehr, bis endlich bei den Versuchen 6 und $6a$ $\left(\frac{\text{Säure}}{\text{Salz}} = 3{\cdot}65\right)$ fast sämtliches Natriumsulfat in Chlorid verwandelt war.

Drückt man die gefundenen Werte für das Natriumchlorid in Prozenten desjenigen Wertes aus, welcher erhalten werden sollte, wenn das ganze angewandte Natriumsulfat in Chlorid verwandelt wäre (»theoretischer Wert«), so erhält man die Daten, die in den Tabellen aufgeschrieben sind. Stellt man weiter die erhaltenen Resultate graphisch in der Weise dar, daß auf der Abszissenachse die Prozente der Salzsäure auf $1\,g$ kristallisiertes Natriumsulfat $\left(\frac{100\,g}{p}\right)$ aufgetragen sind und daß die entsprechenden Ordinaten die gefundenen Werte für das Natriumchlorid in Prozenten des theoretischen Wertes darstellen, so ersieht man aus der Fig. 3, daß die Verbindungslinie der Endpunkte der Ordinaten für die Werte der Versuche 2, 3 und 4 eine sehr schwach nach oben gekrümmte Kurve ist. Um den Schnittpunkt dieser Kurve mit der Abszissenachse zu finden, verlängert man die Verbindungsgerade der Endpunkte der Ordinaten für Versuch 2 und 3 bis zum Schnittpunkte mit der Abszissenachse, wobei der begangene Fehler infolge der äußerst geringen Krümmung der Kurve in dem Falle kein großer sein kann.

Wie man aus der Fig. 3 ersieht, wird die Abszissenachse etwa bei 53 geschnitten, was nach dem Maßstabe $26{\cdot}5\%$ konzentrierter Salzsäure entspricht; dies bedeutet, daß bei einem Verhältnisse $\frac{\text{konzentrierte Salzsäure}}{\text{kristallisiertes Natriumsulfat}} = 0{\cdot}265$ in der Reaktionsmasse kein Natriumchlorid sich bilden soll. Dieses

Resultat ist sehr beachtenswert, wenn man berücksichtigt, daß bei Anwendung einer Salzsäure von derselben Konzentration und bei fast demselben Verhältnisse zwischen den Ausgangssubstanzen bei 15° Anfangstemperatur kalorimetrisch der größte Kälteeffekt gefunden wurde. Näheres darüber im Schlußworte.

Um die Abhängigkeit der Menge des Natriumchlorids von der Temperatur der Ausgangssubstanzen zu bestimmen, wurden das kristallisierte Natriumsulfat und die konzentrierte Salzsäure

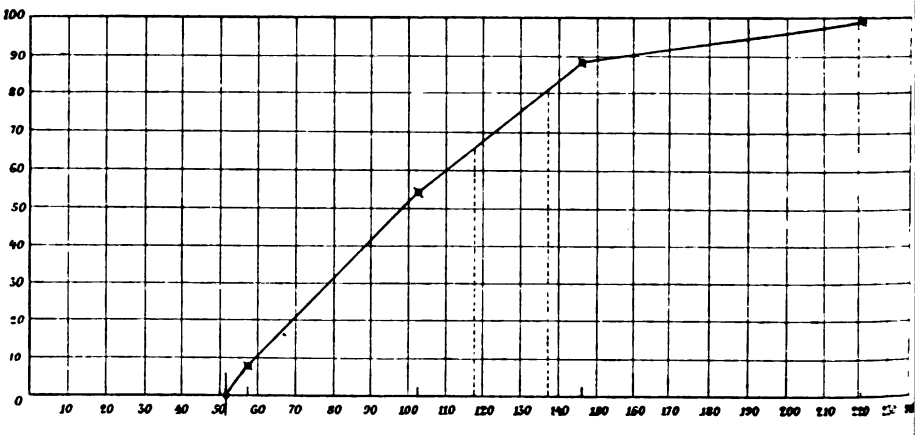


Fig. 3. Maßstab: 1 *mm* = 1 % Salzsäure, respektive 1 % NaCl (des theoretischen Wertes).

vor der Reaktion zuerst auf 0° abgekühlt und das Reaktionsgemisch auch bei 0° (annähernd) abgesaugt. Dabei wurde gefunden, daß die experimentell bestimmten Werte sich nur sehr wenig von den durch Interpolation aus der Fig. 3 gefundenen unterscheiden und daher die Abweichungen wahrscheinlich auf die Versuchsfehler zurückzuführen sind. So erhält man bei 0°:

	Gefunden	Interpoliert
Versuch 1	33·37 %	32·75 %
Versuch 2	40·40	40·50

Daraus folgt, daß bei 0 bis 15° Anfangstemperatur dieselbe wahrscheinlich ohne merklichen Einfluß auf die Menge des sich bildenden Natriumchlorids ist.

Obwohl die beschriebene Methode keinen Anspruch darauf macht, eine einwandfreie, quantitativ-analytische zu sein, so erfüllt dieselbe ihren speziellen Zweck, indem sie das oben erwähnte, für die Definition des günstigsten Mischungsverhältnisses wichtige Ergebnis liefert und überhaupt die zur Erklärung des chemischen Vorganges in der Kältemischung nötigen Tatsachen gibt.

Die Resultate sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt, wobei die Bezeichnungen dasselbe wie früher bedeuten. »Prozente NaCl« bedeutet das gefundene Natriumchlorid in Prozenten des theoretischen Wertes.

Tabelle XI.

Versuche mit 36·67prozentiger Salzsäure.

Anfangstemperatur 15 bis 16°.

Nr.	p	g	$\frac{100\,g}{p}$	Prozente NaCl
1	16·7534	2·5080	14·97%	0·04%
1 *a*	15·8367	2·1918	13·84	0·02
2	19·4686	5·5232	28·40	2·16
2 *a*	17·4967	4·9288	28·17	2·01
3	11·0175	5·6882	51·63	26·40
3 *a*	12·1545	6·2912	51·76	26·79
4	7·5199	5·5028	73·18	44·54
4 *a*	8·1178	5·9625	73·45	44·95
5	4·5126	4·9857	110·48	49·67
5 *a*	5·6715	6·2472	110·15	49·17
6	6·1560	22·4740	365·07	99·46
6 *a*	6·6498	24·2580	364·79	99·57

Schlußwort.

Die Resultate der Untersuchung lassen sich in folgender Weise zusammenfassen:

1. Zur Herstellung der Kältemischung eignet sich am besten die konzentrierteste Salzsäure, weil, je konzentrierter

die Säure, desto weniger von derselben erforderlich ist, um den größten Kälteeffekt pro 1 *g* der Mischung zu erzielen. Der Grad der Konzentration der Salzsäure ist nur durch die Haltbarkeit derselben bei der günstigsten Anfangstemperatur der Ausgangssubstanzen begrenzt.

Bei der Untersuchung wurde eine 36·5prozentige Salzsäure und das kristallisierte Natriumsulfat in Form des feinen Kristallmehls angewendet.

2. Aus der Vergleichung der Resultate der Messungen bei verschiedenen Anfangstemperaturen folgt, daß der Kälteeffekt der Mischung desto größer, je höher die Anfangstemperatur ist. Daher ist die hiefür günstigste Anfangstemperatur eben diejenige höchste Temperatur, welche durch die Haltbarkeit der Substanzen gestattet ist. Da eine konzentrierte Salzsäure oberhalb von 25° schon erheblich zu rauchen beginnt und auch das kristallisierte Natriumsulfat sich bei höheren Temperaturen schlecht hält, so dürfte eine Anfangstemperatur von 20 bis 25° die günstigste sein.

3. Als das günstigste Mischungsverhältnis zwischen konzentrierter Salzsäure und kristallisiertem Natriumsulfat wurde dasjenige gefunden, bei welchem in der Reaktionsmasse sich kein Natriumchlorid bildet.

4. Beachtet man, daß die Entstehung des Natriumchlorids und der Schwefelsäure und die Hydratation der letzteren mit der Entwicklung von positiver Wärme verbunden sind[1] und infolgedessen den definitiven Kälteeffekt vermindern und daß ferner die Quelle der Kälteentwicklung die Verflüssigung des Kristall-

[1] Daß dies wirklich der Fall ist, läßt sich nicht nur theoretisch begründen, sondern wurde auch von mir im Bunsen'schen Eiskalorimeter direkt nachgewiesen. Es wurden Versuche angestellt, um die Wärmemenge zu bestimmen, die bei der Einwirkung von konzentrierter Salzsäure auf das entwässerte Natriumsulfat entbunden wird. Genaue Messungen sind aber hiebei schwer durchzuführen, weil die Substanzen sich im Innern des Kalorimeters nicht innig genug zusammenmischen lassen. Das wasserfreie Natriumsulfat ballt sich nämlich unter Einwirkung von konzentrierter Salzsäure zu festen Klumpen zusammen, wodurch die Genauigkeit der Messungen sehr beeinträchtigt wurde. Jedoch stellt der jedesmal beobachtete beträchtliche Rückgang des Quecksilberfadens im Skalenrohr die Tatsache der Entwicklung von positiver Wärme zweifellos dar.

wassers ist und diese letztere von der Anfangstemperatur abhängt, so lassen sich die Bedingungen über die günstigste Anfangstemperatur und das günstigste Mischungsverhältnis folgendermaßen zusammenfassen:

Das günstigste Mischungsverhältnis und die günstigste Anfangstemperatur der Ausgangssubstanzen ist dasjenige Mischungsverhältnis und diejenige Temperatur, bei welchen das ganze Kristallwasser verflüssigt und kein Natriumchlorid in der Reaktionsmasse gebildet wird. Experimentell wurde ein diesen Bedingungen nahezu entsprechendes Verhältnis $\frac{\text{Salzsäure}}{\text{kristallisiertes Natriumsulfat}} = 0{\cdot}265$ gefunden, und zwar für eine 36·5prozentige Säure und eine Anfangstemperatur von +15°.

5. Bei fast demselben Verhältnisse[1] wurde auch die niedrigste Temperatur, nämlich —18·6° und die größte Temperaturerniedrigung von 39·6°beobachtet; diesem Mischungsverhältnisse kommt auch der größte Abkühlungswert zu.

Das hiemit gewonnene Resultat hat auch in ökonomischer Hinsicht eine gewisse Bedeutung. Es stellt sich nämlich erstens heraus, daß man, um das günstigste Resultat zu erzielen, viel weniger Salzsäure braucht, als in der bisherigen Vorschrift angegeben ist, und zwar statt 0·625 *g* Salzsäure auf 1 *g* Natriumsulfat (oder auf 8 Teile Glaubersalz 5 Teile Salzsäure) nur **0·265** *g*, daher weniger als die Hälfte.

Zweitens wird die Wiedergewinnung der Ausgangsmaterialien dadurch erheblich vereinfacht, indem bei dem gefundenen günstigsten Mischungsverhältnisse die Reaktionsmasse nur aus Natriumsulfat und verdünnter Salzsäure besteht und weder Natriumchlorid noch Schwefelsäure enthält. Die Trennung des Natriumsulfats von der Salzsäure läßt sich leicht erreichen, indem man die Reaktionsmasse abkühlt (womöglich auf 0°), wobei sich das Natriumsulfat fast vollständig abscheidet. Dieses kann abgesaugt und durch Umkristallisieren wieder in das kristallisierte Natriumsulfat verwandelt werden. Die Salz-

[1] $\frac{\text{Säure}}{\text{Salz}} = 0{\cdot}258.$

säure läßt sich aus der Lösung abdestillieren, wobei man eine reine verdünnte Säure erhält.[1]

Es bleibt schließlich noch die Erörterung der in der Einleitung erwähnten theoretischen Fragen übrig. Wie aus den dort angeführten Zitaten zu ersehen ist, wurde angenommen, daß der Vorgang der Kälteerzeugung in dem vorliegenden Falle auf dem Stattfinden der chemischen Reaktion zwischen Natriumsulfat und konzentrierter Salzsäure beruht, d. h. daß mit Hilfe der bei dieser Reaktion entwickelten Wärme die Verflüssigung des Kristallwassers bewerkstelligt wird. Dieses ist aber im allgemeinen nicht der Fall. Die Tatsache, daß es eine Reihe von Mischungen gibt, bei denen die erwähnte Reaktion gar nicht stattfindet (Mischungen mit wenig Salzsäure), und das Ergebnis der Untersuchung, daß den größten Kälteeffekt eben dasjenige Mischungsverhältnis zwischen konzentrierter Salzsäure und kristallisiertem Natriumsulfat liefert, bei welchem das ganze Kristallwasser verflüssigt und dabei kein Natriumchlorid gebildet wird, zeigen, daß zur Verflüssigung des Kristallwassers die lösende Kraft der Salzsäure und die bei der Hydratation der letzteren entstehende Wärme genügen. Dagegen ist der Überschuß der Salzsäure nur schädlich, indem dadurch die mit der Wärmeentwicklung verbundene Reaktion entsteht. Dieses gilt allerdings nur für die Anfangstemperaturen oberhalb von 0° und hauptsächlich für 15° und darüber. Bei 0° dagegen sind die Verhältnisse komplizierter. Den größten Kälteeffekt liefert bei 15° eine Mischung vom Verhältnisse $\frac{\text{Säure}}{\text{Salz}} = 0{\cdot}26$ (45·4 cal. pro 1 *g* der Mischung), dagegen steigt dieses Verhältnis bei 0° bis etwa 0·5 (31·0 cal. pro 1 *g* der Mischung); der Kälteeffekt erreicht aber den Wert, welchen er bei 15° hat, nicht. Das bedeutet, daß bei 0° zur Verflüssigung des Kristallwassers die lösende Kraft der Salzsäure allein nicht genügt und daß Wärme zugefügt werden muß, um den Rest

[1] Ein umgekehrtes Verfahren, nämlich die Salzsäure aus der Reaktionsmasse zuerst abzudestillieren, dürfte sich kaum empfehlen, weil am Ende der Destillation bekanntlich eine Salzsäure von zirka 20% HCl entstehen würde, welche auf das Natriumsulfat im Sinne der Bildung von Natriumchlorid einwirken könnte.

des Kristallwassers zu verflüssigen. Diese Wärme wird durch die chemische Reaktion geliefert, das Gesamtresultat in Bezug auf die Kälteentwicklung wird aber dadurch erniedrigt. Die Hauptquelle der Kälteerzeugung ist jedoch in allen Fällen die Verflüssigung des Kristallwassers durch die Salzsäure, während die chemische Reaktion entweder nur untergeordnete Bedeutung besitzt, wie bei 0° Anfangstemperatur, oder direkt überflüssig ist, wie gegen 15°.

Was schließlich die Frage anbetrifft, ob der Vorgang in der Kältemischung dem Prinzipe des Arbeitsmaximums entspricht oder nicht, so muß hervorgehoben werden, daß derselbe dieses Prinzip weder bestätigen noch widerlegen kann, weil dieser Vorgang selbst keineswegs einheitlicher Natur ist, sondern sich aus mehreren grundverschiedenen Vorgängen zusammensetzt. In der Tat besteht der Vorgang, abgesehen von sekundären Prozessen (Hydratation, Lösung etc.) hauptsächlich in der Verflüssigung des Kristallwassers und bei überschüssiger Salzsäure außerdem in der chemischen Umsetzung zwischen Natriumsulfat und Salzsäure. Der erste Vorgang ist die Überführung des Wassers in einen höheren Aggregatzustand und als solcher mit einem Wärmeverbrauch verbunden. Sobald aber die Konzentration der Salzsäure eine gewisse Grenze überschreitet, beginnt der zweite Vorgang, nämlich die Wechselwirkung zwischen Natriumsulfat und Salzsäure. Der letztere entspricht vollständig dem Prinzipe des Arbeitsmaximums, so weit das Prinzip selbst Geltung hat, was eben bei niederen Temperaturen der Fall ist, indem bei diesen, wie aus der Regel von Le Chatelier folgt, vorzugsweise diejenigen Reaktionen vor sich gehen, die mit Wärmeentwicklung verbunden sind.

Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Klasse erscheinen vom Jahre 1888 (Band XCVII) an in folgenden **vier** gesonderten **Abteilungen,** welche auch einzeln bezogen werden können:

Abteilung I. Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Kristallographie, Botanik, Physiologie der Pflanzen, Zoologie, Paläontologie, Geologie, Physischen Geographie und Reisen.

Abteilung II a. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und Mechanik.

Abteilung II b. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Chemie.

Abteilung III. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Anatomie und Physiologie des Menschen und der Tiere sowie aus jenem der theoretischen Medizin.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichnisse ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung Alfred Hölder, k. u. k. Hof- und Universitätsbuchhändler (Wien, I., Rothenthurmstraße 13), zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Teile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden auch in besonderen Heften unter dem Titel: »Monatshefte für Chemie und verwandte Teile anderer Wissenschaften« herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 14 K — 14 M.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Originalauszüge oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird wie bisher acht Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 5 K — 5 M.

3 2044 093 294 809